集合论与图论
第四讲(II)　自然数

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/∼sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.3.19

自然数

- 自然数的定义
- 数学归纳法
- 传递集合
- 自然数的运算
- $\mathbb{N}$上的序关系

集合的封闭性

定义

设F为一个函数，集合$A \subseteq domF$，如果对于任意的$x \in A$，均有$F(x) \in A$，则称A在函数F下是封闭的。

例

取$F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，且$F(n) = n + 1$，

- 取$A = \mathbb{N}$，则A在F下是封闭的;
- 取$B = \{1, 2, \cdots, 10\}$，则$B \subseteq \mathbb{N}$，B在函数F下不封闭。

Peano系统

定义

*Peano*系统是满足以下公理的有序三元组$\langle M, F, e\rangle$，其中M为一个集合，F为M到M 的函数，e为首元素，5条公理为:

1. $e \in M$;
2. M在F下是封闭的;
3. $e \notin ranF$;
4. F是单射的;
5. 如果M的子集A满足$e \in A$且A在F下是封闭的，则$A = M$。

后继

定义

设A为一个集合，称$A \cup \{A\}$为A的后继，记作A^+，并称求集合的后继为后继运算。

- 由定义易知，$A \subseteq A^+ \wedge A \in A^+$。

例

求下列集合的后继的后继的后继：

1. $\emptyset$;
2. $A = \{a\}$;
3. $B = \{\emptyset, a\}$。

归纳集

定义

设A为一个集合，若A满足:

1. $\emptyset \in A$,
2. 若$\forall a \in A$，则$a^+ \in A$,

则称A是归纳集。

例

$\{\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \cdots\}$是归纳集；$\{\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \cdots, a, a^+, a^{++}, \cdots\}$是归纳集，而当$a \neq \emptyset$时，$\{a, a^+, a^{++}, \cdots\}$不是归纳集。

- 由定义可以看出，$\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \cdots$是所有归纳集的元素，于是可将它们定义成自然数。

自然数

定义

自然数是属于每个归纳集的集合。

由定义及$\{\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \cdots\}$是归纳集可知，$\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \cdots$都是自然数，分别记为$0, 1, 2, \cdots$并且任意的自然数$n$的后继$n^+ = n \cup \{n\}$，为$n$后面紧邻的自然数:

$$
\begin{aligned}
&0 = \emptyset \\
&1 = 0^+ = \{0\} \\
&2 = 1^+ = \{0, 1\} \\
&\quad \cdots \\
&n = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}
\end{aligned}
$$

自然数

定义

设$D = \{v \mid v$是归纳集$\}$，称$\bigcap D$为全体自然数集合，记作$\mathbb{N}$。

由定义易知全体自然数集合$\mathbb{N}$是所有归纳集的子集，并且它是归纳集。

定理

$\mathbb{N}$是归纳集。

定理

设$\mathbb{N}$为自然数集合，$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，且$\sigma(n) = n^+$（称$\sigma$为后继函数），则$\langle \mathbb{N}, \sigma, \emptyset \rangle$是*Peano*系统。