集合论与图论
第四讲(I) 函数

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/∼sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.3.19

函数

- 函数的基本概念
- 函数的性质
- **函数的合成**
- 反函数

函数的合成

定理

设$g: A \to B$，$f: B \to C$，则$f \circ g: A \to C$，且对于任意的$x \in A$，$f \circ g(x) = f(g(x))$。

函数合成的性质

定理

设$g : A \to B$，$f : B \to C$。

1. 如果f和g都是满射的，则$f \circ g$是满射的;
2. 如果f和g都是单射的，则$f \circ g$是单射的;
3. 如果f和g都是双射的，则$f \circ g$是双射的。

此定理的逆不成立，但下面定理成立。

定理

设$g : A \to B$，$f : B \to C$。

1. 如果$f \circ g$是满射的，则f是满射的;
2. 如果$f \circ g$是单射的，则g是单射的;
3. 如果$f \circ g$是双射的，则g是单射的，f是满射的。

函数合成的性质

定理

设$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，已知$f$和$g$按实数集上的“$\leq$”关系都是单调递增的，则$f \circ g$也是单调递增的。

函数合成的性质

定理

设$f : A \to B$，则$f = f \circ I_A = I_B \circ f$。其中$I_A$和$I_B$分别为$A$和$B$上的恒等函数。

函数

- 函数的基本概念
- 函数的性质
- 函数的合成
- 反函数

逆关系与函数

- 任给集合A，A中的元素可能有有序对，也可能没有，无论有无有序对作为元素，A 的逆A^{-1}一定是二元关系（可能为空关系）。
- 什么情况下A^{-1}为函数?

定理

设A为一个集合，A^{-1}为函数当且仅当A为单根的。

推论

设R为二元关系，R为函数当且仅当R^{-1}为单根的。

逆关系与函数

例

设$f_1, f_2, f_3 \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$，且对于任意$n \in \mathbb{N}$,

$$f_1(n) = 2n;$$

$$f_2(n) = \begin{cases} 0, & n = 0\text{或}n = 1, \\ n-1, & n \geq 2; \end{cases} \qquad f_3(n) = \begin{cases} n-1, & n\text{为奇数}, \\ n+1, & n\text{为偶数}。 \end{cases}$$

试分析$f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_3^{-1}$中哪些属于$\mathbb{N} \not\to \mathbb{N}$，哪些属于$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$。

反函数

定理

设$f : A \to B$为双射函数，则$f^{-1} : B \to A$，且f^{-1}也为双射函数。

定义

设$f : A \to B$，如果f是双射的，则称f的逆f^{-1}为f的反函数。

反函数

例

下列函数中哪些具有反函数？如果有，写出其反函数。

1. 设$f_1 : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$，$\mathbb{Z}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \land x > 0\}$，且$f_1(x) = x + 1$。
2. 设$f_2 : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$，$\mathbb{Z}_+$同上，且
$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$
3. 设$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，且$f_3(x) = x^3$。
4. 设$f_4 : \mathbb{R} \to B$，$f_4(x) = e^x$，其中$B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \land x \geq 0\}$。
5. 设$f_5 : A \to \mathbb{R}$，$f_5(x) = \sqrt{x}$，其中$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \land x \geq 1\}$。

反函数

例

构造$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$到$\mathbb{N}$的双射函数，并求其反函数。

函数的逆

- 对前面例子中的函数，有以下事实:

$$f\circ f^{-1}(x)=f(f^{-1}(x))=x$$
$$f^{-1}\circ f(\langle x,y\rangle)=f^{-1}(f(\langle x,y\rangle))=\langle x,y\rangle$$

- 一般情况下，设$f:A\to B$且为双射，可知$f^{-1}:B\to A$也为双射，并且

$$f^{-1}\circ f=I_A:A\to A,\quad f\circ f^{-1}=I_B:B\to B$$

定义

设$f:A\to B$，$g:B\to A$，如果$g\circ f=I_A$，则称g为f的左逆。
若$f\circ g=I_B$，则称g为f的右逆。

若$f:A\to B$为双射，则f^{-1}既是f的左逆，又是f的右逆。

函数的逆

定理

设$f : A \to B$，且$A \neq \emptyset$。

1. f存在左逆当且仅当f是单射的;
2. f存在右逆当且仅当f是满射的;
3. f既有左逆又有右逆当且仅当f是双射的;
4. 如果f是双射的，则f的左逆与右逆相等。

若$f : A \to B$双射，则$f^{-1} : B \to A$既是f的左逆，又是f的右逆，而且再无其它的左逆和右逆。

函数的逆

例

设$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，且$f(x)=2x$，求$f$的一个左逆。

例

设$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}-\{0,1,\cdots,10\}$，且

$$f(x)=\begin{cases}11, & x\in\{0,1,\cdots,10\},\\ x, & x\in\mathbb{N}-\{0,1,\cdots,10\},\end{cases}$$

求f的一个右逆。

例

设$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，且$f(x)=-x$，试求$f$的一个左逆和一个右逆。

作业

1. 讨论下面函数的性质，并对双射函数求出其反函数:

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，且$f(x)=2x^2-6x+4$;
2. $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$，且$f(x)=\ln x$;
3. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，且

$$f(n)=\begin{cases} n+2, & n=0,1,2, \\ 0, & n=3, \\ 1, & n=4, \\ n, & n\geq 5. \end{cases}$$

2. 设$f:A\to B$是函数，R是A上的关系，且满足:

$$aRb\Leftrightarrow f(a)=f(b)$$

证明R是A上的等价关系。（R称为由函数f导出的等价关系）。

作业

3. 设$f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$，且

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = x,$$

$$f_3(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{N}, \\ 1, & x \notin \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$f_4(x) = 1$$

令E_i是由f_i导出的等价关系，$i = 1, 2, 3, 4$。

1. 画出偏序集$\langle\{\mathbb{R}/E_1, \mathbb{R}/E_2, \mathbb{R}/E_3, \mathbb{R}/E_4\}, \text{加细}\rangle$的哈斯图；
2. 设$g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/E_i$是自然映射，求$g_i(0)$（$i = 1, 2, 3, 4$）。