集合论与图论
第三讲(II)　函数

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/~sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.3.12

函数

- 函数的基本概念
- 函数的性质
- 函数的合成
- 反函数

函数的定义

定义

对二元关系F，若F是单值的，则称F是**函数**或**映射**，即
F是函数$\Leftrightarrow$ F是二元关系$\wedge$
$\forall x \forall y \forall z (x \in domF \wedge y \in ranF \wedge z \in ranF \wedge xFy \wedge xFz \rightarrow y = z)$。

- 空函数$\emptyset$;
- 对于函数F，$\langle x, y \rangle \in F \Leftrightarrow xFy \Leftrightarrow F(x) = y$，若$F$不是函数，则最后一种表示法无效;

偏函数

定义

设A、B为二集合，F为函数，若$domF \subseteq A$，且$ranF \subseteq B$，则称F是A到B的偏函数，记为$F : A \nrightarrow B$。称A为F的前域，记A到B的全体偏函数为$A \nrightarrow B$，即

$$A \nrightarrow B = \{F \mid F : A \nrightarrow B\}$$

由定义可知$A \nrightarrow B \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$。

偏函数

例

设$A=\{a,b\}$，$B=\{1,2\}$，求$A \nrightarrow B$。

解：要从$A\times B$的全体子集，即$\mathcal{P}(A\times B)$中找出全体函数，它们都是A到B的偏函数。

- $A\times B$的零元子集$\emptyset$为函数，记为f_0。
- $A\times B$的4个1元子集均为函数，记

$$f_1=\{\langle a,1\rangle\},\ f_2=\{\langle a,2\rangle\},\ f_3=\{\langle b,1\rangle\},\ f_4=\{\langle b,2\rangle\}$$

- $A\times B$的6个2元子集有4个为函数，记

$$\begin{aligned} f_5&=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle\},\ f_6=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle\},\\ f_7&=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle\},\ f_8=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle\}\end{aligned}$$

- $A\times B$的3元子集和4元子集均不是函数。

因此A到B的全体偏函数共有9个，即$A \nrightarrow B=\{f_0,f_1,\cdots,f_8\}$。

全函数

定义

设F是A到B的偏函数，且$domF = A$，则称F为A到B的全函数，简称A到B 的函数，记作$F : A \to B$，记A到B的全体全函数为B^A或$A \to B$，即$B^A = A \to B = \{F \mid F : A \to B\}$。

- 由定义可知，若$F : A \to B$，则$F : A \nrightarrow B$，但反之不成立。

例

设$A = \{a, b\}$，$B = \{1, 2\}$，求B^A。

- 设A, B均为有穷集合，$|A| = n$，$|B| = m$，且$n \geq 1$，$m \geq 1$，则$|B^A| = m^n$，即A到B共有m^n个全函数。
- 当$A = \emptyset$时，B^A中只有空函数，即$B^A = \{\emptyset\}$。
- 当$A \neq \emptyset$而$B = \emptyset$时，$B^A = \emptyset$，即此时A到B无全函数，但此时$\emptyset$为A到B的惟一偏函数。

真偏函数

定义

设F为A到B的偏函数，即$F: A \mathrel{+\!\!\!\!\to} B$，且$domF \subset A$，则称$F$为$A$到$B$的**真偏函数**，记作$F: A \mathrel{+\!\!\!\!+\!\!\!\!\to} B$，记$A$到$B$的全体真偏函数为$A \mathrel{+\!\!\!\!+\!\!\!\!\to} B$，即$A \mathrel{+\!\!\!\!+\!\!\!\!\to} B = \{F \mid F: A \mathrel{+\!\!\!\!+\!\!\!\!\to} B\}$。

- 显然$A \mathrel{+\!\!\!\!+\!\!\!\!\to} B \subset A \mathrel{+\!\!\!\!\to} B$且$A \to B \subset A \mathrel{+\!\!\!\!\to} B$，并且

$$A \mathrel{+\!\!\!\!\to} B = (A \mathrel{+\!\!\!\!+\!\!\!\!\to} B) \cup (A \to B)$$

例

设$A = \{a, b\}$，$B = \{1, 2\}$，求$A \mathrel{+\!\!\!\!+\!\!\!\!\to} B$。

- 若$F \in A \mathrel{+\!\!\!\!+\!\!\!\!\to} B$，则$F \in domF \to B$。
- 若$F \in A \mathrel{+\!\!\!\!\to} B$，则$F \in domF \to B$。

函数

- 函数的基本概念
- （全）函数的性质
- 函数的合成
- 反函数

满射、单射和双射

定义

设$f : A \to B$。

1. 若$ranf = B$，则称f是满射的;
2. 若f是单根的，则称f是单射的;
3. 若f既是满射的，又是单射的，则称f是双射的。

例

设$A_1 = \{a, b\}$，$B_1 = \{1, 2, 3\}$，$A_2 = \{a, b, c\}$，$B_2 = \{1, 2\}$，$A_3 = \{a, b, c\}$，$B_3 = \{1, 2, 3\}$，分别写出$A_1 \to B_1$、$A_2 \to B_2$、$A_3 \to B_3$中的满射、单射和双射函数。

满射、单射和双射

设$|A| = n$，$|B| = m$，则

1. 当$n < m$时，$A \to B$中不含满射函数，从而不含双射函数。而当$n \leq m$时，$A \to B$中共含$m(m-1)\cdots(m-n+1)$个不同的单射函数。
2. 当$m = n$时，$A \to B$中共含$n!$个双射函数。
3. 当$m < n$时，$A \to B$中不含单射函数，从而不含双射函数。而当$m \leq n$时，$A \to B$中共含$m!S(n,m)$个不同的满射函数。

例

设$|A| = 5$，$|B| = 3$，则$A \to B$中含多少个满射函数？

满射、单射和双射

例

讨论下列各函数的性质（所出现集合A, B均为非空有穷集合）：

1. $f : A \to A \times B$且$\forall a \in A, f(a) = \langle a, g(a)\rangle$，其中$g : A \to B$;
2. $f : A \times B \to A$且$\forall \langle a, b\rangle \in A \times B, f(\langle a, b\rangle) = a$;
3. $f : A \times B \to B \times A$且$\forall \langle a, b\rangle \in A \times B, f(\langle a, b\rangle) = \langle b, a\rangle$。

满射、单射和双射

例

讨论下列各函数的性质：

1. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$且$f(x)=\lfloor\frac{x}{2}\rfloor$，其中$\lfloor x\rfloor$表示不超过$x$的最大整数;
2. $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$且$f(x)=ln|x|$;
3. $f:(-\infty,1]\to[-1,+\infty)$且$f(x)=x^2-2x$;
4. $f:\mathbb{N}\to\{0,1\}$且$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{为奇数}\\ 1, & x\text{为偶数}\end{cases}$;
5. $f:\mathbb{R}-\{1,-1\}\to\mathbb{R}$且$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$。

函数的象

定义

设$f : A \to B$，$A' \subseteq A$，记A'在f下的象$f[A']$为$f(A')$，即$f(A') = \{y \mid y = f(x) \wedge x \in A'\}$，将$f(A')$仍称为$A'$在$f$下的象。特别地，称$f(A)$为函数$f$的象。设$B' \subseteq B$，称$f^{-1}(B') = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B'\}$为$B'$的完全原象，简称为$B'$的原象。

- 若$f : A \to B$，则$f(A) = ranf$，$f^{-1}(B) = A$。

例

设$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$\mathbb{R}$为实数集，且$f(x) = x^2$，

1. 取$A_1 = [0, +\infty)$，$A_2 = [1, 3)$，$A_3 = \mathbb{R}$，
   则$f(A_1) = [0, +\infty)$，$f(A_2) = [1, 9)$，$f(A_3) = [0, +\infty)$。
2. 取$B_1 = (1, 4)$，$B_2 = [0, 1]$，$B_3 = \mathbb{R}$，
   则$f^{-1}(B_1) = (-2, -1) \cup (1, 2)$，$f^{-1}(B_2) = [-1, 1]$，$f^{-1}(B_3) = \mathbb{R}$。

函数的性质

定理

设$f: C \to D$，且f为单射的，$\mathcal{C}$为C的非空子集族，$C_1, C_2 \subseteq C$，则

1. $f(\bigcup \mathcal{C}) = \bigcup\{f(A) \mid A \in \mathcal{C}\}$;
2. $f(\bigcap \mathcal{C}) = \bigcap\{f(A) \mid A \in \mathcal{C}\}$;
3. $f(C_1 - C_2) = f(C_1) - f(C_2)$。

定理

设$f: C \to D$，$D_1, D_2 \subseteq D$，$\mathcal{D}$为D的非空子集族，则

1. $f^{-1}(\bigcup \mathcal{D}) = \bigcup\{f^{-1}(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$;
2. $f^{-1}(\bigcap \mathcal{D}) = \bigcap\{f^{-1}(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$;
3. $f^{-1}(D_1 - D_2) = f^{-1}(D_1) - f^{-1}(D_2)$。

一些特殊函数

定义

1. 设$f: A \to B$，如果存在$b \in B$，使得对所有$x \in A$，均有$f(x) = b$，则称f是A到B的常数函数。
2. 设$f: A \to A$，对于任意的$x \in A$，$f(x) = x$，则称f为A上的恒等函数。事实上，f是A上的恒等关系，因此A上的恒等函数依然记为I_A。
3. 设$f: A \to \{0,1\}$，$A' \subseteq A$，若

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A' \\ 0, & x \in A - A' \end{cases}$$

则称f为A上关于A'的特征函数。通常A'的特征函数记为$\chi_{A'}$。

设$A = \{a, b, c, d\}$，$A' = \{a, d\}$，$\chi_{A'}: A \to \{0,1\}$，则

$$\chi_{A'}(a) = \chi_{A'}(d) = 1, \quad \chi_{A'}(b) = \chi_{A'}(c) = 0$$

函数的单调性

定义

设A, B为二集合，$\preccurlyeq_1, \preccurlyeq_2$分别为$A, B$上的全序关系，$f : A \to B$。若对于任意的$x_1, x_2 \in A$，如果$x_1 \prec_1 x_2$，则$f(x_1) \preccurlyeq_2 f(x_2)$，则称$f$是单调递增的，如果$x_1 \prec_1 x_2$，则$f(x_1) \prec_2 f(x_2)$，则称$f$是严格单调递增的。如果$x_1 \prec_1 x_2$，则$f(x_2) \preccurlyeq_2 f(x_1)$，则称$f$是单调递减的，如果$x_1 \prec_1 x_2$，则$f(x_2) \prec_2 f(x_1)$，则称$f$是严格单调递减的。

例

在实数集$\mathbb{R}$上取“$\leq$”关系，

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$f(x) = e^x$是$\mathbb{R}$上的严格单调递增函数;
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$g(x) = e^{-x}$是$\mathbb{R}$上的严格单调递减函数。

自然映射

定义

设R是A上的等价关系，A/R是A关于R的商集，设$f : A \to A/R$，且$f(a) = [a]$，则称f为A到A/R的自然映射或典型映射。

例

设$A = \{a, b, c, d\}$，$R = I_A \cup \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$，则$R$为$A$上的等价关系。$f : A \to A/R$，则

$$f(a) = [a] = \{a, b\}$$
$$f(b) = [b] = \{a, b\}$$
$$f(c) = [c] = \{c\}$$
$$f(d) = [d] = \{d\}$$

- 一般情况下，自然映射函数均为满射的，但当等价关系R不是恒等关系时，自然映射均不是单射的。