集合论与图论
第二讲　二元关系

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/~sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.3.5

二元关系

- 有序对与笛卡尔积
- 二元关系
- 关系矩阵和关系图
- 关系的性质
- 二元关系的幂运算
- 关系的闭包
- 等价关系和划分
- 序关系

有序对和n元组

- 有序对：$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$;
- n元组：$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle = \langle\langle a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$;

定理

$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

笛卡尔积

- $A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$;
- $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle \wedge a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}$
- 笛卡尔积的基本性质
  - 交换律和结合律不再适合
  - 对并、交分配律成立
  - $A \times \emptyset = \emptyset$，$\emptyset \times A = \emptyset$
  - $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$
  - 若$A \neq \emptyset$，则$A \times B \subseteq A \times C$当且仅当$B \subseteq C$

举例

关系基本概念举例

- 写出三元组$\langle a, b, c\rangle$和$\langle a, \langle b, c\rangle\rangle$的集合表达式，这两者相等吗?
  - $\langle a, b, c\rangle = \langle\langle a, b\rangle, c\rangle = \{\{\{a\}, \{a, b\}\}, \{\{\{a\}, \{a, b\}\}, c\}\}$;
  - $\langle a, \langle b, c\rangle\rangle = \{\{a\}, \{a, \{\{b\}, \{b, c\}\}\}\}$;
  - 显然两者不相等。

举例

关系基本概念举例

- 什么条件下，下列等式成立?
  - $A \times B = \emptyset$
    - $A = \emptyset$或$B = \emptyset$
  - $A \times B = B \times A$
    - $A = \emptyset$或$B = \emptyset$或$A = B$
  - $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
    - $A = \emptyset$或$B = \emptyset$或$C = \emptyset$

二元关系

- 有序对与笛卡尔积
- 二元关系
- 关系矩阵和关系图
- 关系的性质
- 二元关系的幂运算
- 关系的闭包
- 等价关系和划分
- 序关系

二元关系的定义

定义

若集合F中的全体元素均为有序的$n(n \geq 2)$元组，则称F为n元关系，特别地，当$n = 2$时，称F为二元关系，简称关系。

- 设A, B为二集合，$A \times B$的任何子集均称为A到B的二元关系；
- $A \times A$的子集R称为A上的二元关系：$R \subseteq A \times A$或$R \in \mathcal{P}(A \times A)$;
- A上的全域关系$E_A = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in A\} = A \times A$;
- A上的恒等关系$I_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$;
- 对A到B的二元关系R，若$\langle a, b\rangle \in R$，则称$a$与$b$有关系$R$，记为$aRb$，若$\langle a, b\rangle \notin R$，则称$a$与$b$没有关系$R$，记为$a\overline{R}b$。

二元关系的运算

- $R \subseteq A \times B$的定义域和值域
  - 定义域：$dom(R) = \{x \mid \exists y(xRy)\}$;
  - 值域：$ran(R) = \{y \mid \exists x(xRy)\}$。
- 关系的逆与复合，对$R \subseteq A \times B$，$S \subseteq B \times C$，
  - 称$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R\}$为$R$的逆;
  - 称$S \circ R = \{\langle a, c\rangle \mid \exists b(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S)\}$为$S$与$R$的（逆序）合成或复合;
- 关系的限制和像，对$R \subseteq A \times B$和$D \subseteq A$，
  - 称$R \restriction D = \{\langle a, b\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R \wedge a \in D\}$为$R$在$D$上的限制;
  - 称$R[D] = ran(R \restriction D)$为$D$在$R$下的像。
- 单根和单值关系，
  - 若对于任意的$b \in ran(R)$，存在惟一$a \in dom(R)$，使得$\langle a, b\rangle \in R$，则称$R$是单根的;
  - 若对于任意的$a \in dom(R)$，存在惟一$b \in ran(R)$，使得$\langle a, b\rangle \in R$，则称$R$是单值的。

关系运算举例

设$R_1=\{\langle a,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$，$R_2=\{\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,b\rangle,\langle d,d\rangle\}$，$A=\{a,c\}$，求

- $R_1\cup R_2$， $R_1\cap R_2$， R_1-R_2；
- $dom(R_1)$， $dom(R_2)$， $dom(R_1\cup R_2)$， $dom(R_1\cap R_2)$；
- $ran(R_1)$， $ran(R_2)$， $ran(R_1\cup R_2)$， $ran(R_1\cap R_2)$；
- $R_1\upharpoonright A$， $R_2[A]$；
- $R_1\circ R_2$， $R_2\circ R_1$， $R_1\circ R_1$， $R_2\circ R_2$。

关系运算的性质

定理

对集合F、G，有

1. $dom(F \cup G) = domF \cup domG$;
2. $ran(F \cup G) = ranF \cup ranG$;
3. $dom(F \cap G) \subseteq domF \cap domG$;
4. $ran(F \cap G) \subseteq ranF \cap ranG$;
5. $domF - domG \subseteq dom(F - G)$;
6. $ranF - ranG \subseteq ran(F - G)$。

关系运算的性质

定理

对R_1、R_2、R_3，有

1. $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$;
2. $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = R_1 \circ R_2 \cup R_1 \circ R_3$;
3. $(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = R_1 \circ R_3 \cup R_2 \circ R_3$;
4. $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3$;
5. $(R_1 \cap R_2) \circ R_3 \subseteq R_1 \circ R_3 \cap R_2 \circ R_3$。

关系运算的性质

定理

对集合F、G，有

1. $domF^{-1} = ranF$;
2. $ranF^{-1} = domF$;
3. $(F^{-1})^{-1} \subseteq F$，当$F$为关系时，等号成立;
4. $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$。

关系运算的性质

定理

设R、S、A、B、$\mathcal{A}$为集合，$\mathcal{A} \neq \emptyset$，则

1. $R \upharpoonright (A \cup B) = (R \upharpoonright A) \cup (R \upharpoonright B)$;
2. $R \upharpoonright (A \cap B) = (R \upharpoonright A) \cap (R \upharpoonright B)$;
3. $R \upharpoonright \bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{R \upharpoonright A \mid A \in \mathcal{A}\}$;
4. $R \upharpoonright \bigcap \mathcal{A} = \bigcap \{R \upharpoonright A \mid A \in \mathcal{A}\}$;
5. $(R \circ S) \upharpoonright A = R \circ (S \upharpoonright A)$;

关系运算的性质

定理

设R、S、A、B、$\mathcal{A}$为集合，$\mathcal{A} \neq \emptyset$，则

1. $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$;
2. $R[\bigcup \mathcal{A}] = \bigcup\{R[A] \mid A \in \mathcal{A}\}$;
3. $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$;
4. $R[\bigcap \mathcal{A}] \subseteq \bigcap\{R[A] \mid A \in \mathcal{A}\}$;
5. $R[A] - R[B] \subseteq R[A - B]$;
6. $(R \circ S)[A] = R[S[A]]$。

二元关系

- 有序对与笛卡尔积
- 二元关系
- 关系矩阵和关系图
- 关系的性质
- 二元关系的幂运算
- 关系的闭包
- 等价关系和划分
- 序关系

关系矩阵

定义

设$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$R\subseteq A\times A$，称矩阵$M(R)=(r_{ij})_{n\times n}$为$R$的关系矩阵，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & x_iRx_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

关系矩阵有下列性质:

- R的集合表达式与R的关系矩阵是可以惟一相互确定的。
- $M(R^{-1})=(M(R))^T$。
- 若对$F=\{0,1\}$中的元素加法使用逻辑加（$0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=1$），则对于任意的$R_1,R_2\subseteq A\times A$，均有

$$M(R_1\circ R_2)=M(R_2)\cdot M(R_1)$$

关系矩阵

例

设$A=\{a,b,c\}$，$R_1,R_2\subseteq A\times A$，其集合表达式分别为：$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$，$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$，则有

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad M(R_1^{-1})=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\quad M(R_1\circ R_2)=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad M(R_2^{-1})=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}\quad M(R_2\circ R_1)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

由此可得

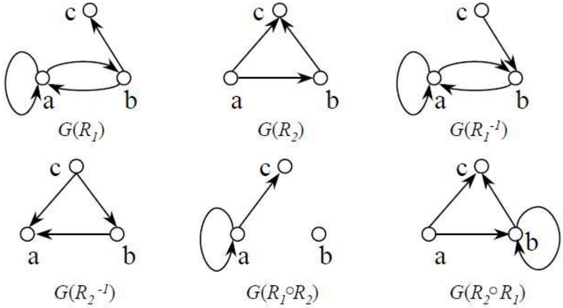
$$R_1^{-1}=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle\},\quad R_1\circ R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle\},$$

$$R_2^{-1}=\{\langle b,a\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle\},\quad R_2\circ R_1=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle\}.$$

关系图

定义

设$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$R\subseteq A\times A$，以A中元素为顶点，在图中用“∘”表示顶点。若x_iRx_j，则从顶点x_i向x_j引有向边$\langle x_i,x_j\rangle$，称所画的图为R的关系图，记作$G(R)$。



二元关系

- 有序对与笛卡尔积
- 二元关系
- 关系矩阵和关系图
- **关系的性质**
- 二元关系的幂运算
- 关系的闭包
- 等价关系和划分
- 序关系

自反性、对称性与传递性

定义

设A为一集合，$R \subseteq A \times A$。

1. 若对于任意的$x \in A$，均有xRx，则称R是A上自反的二元关系，即
$$R\text{是自反的} \iff \forall x(x \in A \rightarrow xRx)$$
2. 若对于任意的$x \in A$，均有$x\not{R}x$（即$\langle x,x\rangle \notin R$），则称$R$是$A$上反自反的二元关系，即
$$R\text{是反自反的} \iff \forall x(x \in A \rightarrow x\not{R}x)$$
3. 对于任意的$x,y \in A$，若xRy，则yRx，则称R为A上对称的二元关系，即
$$R\text{是对称的} \iff \forall x\forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$$
4. 对于任意的$x,y \in A$，若xRy，且$x \neq y$，则$y\not{R}x$，则称R为A上反对称的二元关系，即
$$R\text{是反对称的} \iff \forall x\forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$$
5. 对于任意的$x,y,z \in A$，若xRy，且yRz，则xRz，则称R为A上传递的二元关系，即
$$R\text{是传递的} \iff \forall x\forall y\forall z(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

自反性

定理

设$R \subseteq A \times A$，则下面的命题等价:

1. R是自反的;
2. $I_A \subseteq R$;
3. R^{-1}是自反的;
4. $M(R)$主对角线上的元素全为1;
5. $G(R)$的每个顶点处均有环（顶点到自身的有向边）。

反自反性

定理

设$R \subseteq A \times A$，则下面的命题等价:

1. R是反自反的;
2. $I_A \cap R = \emptyset$;
3. R^{-1}是反自反的;
4. $M(R)$主对角线上的元素全为0;
5. $G(R)$的每个顶点处均无环。

对称性

定理

设$R \subseteq A \times A$，则下面的命题等价:

1. R是对称的;
2. $R^{-1} = R$;
3. $M(R)$是对称的;
4. $G(R)$中任何二个顶点之间若有有向边，则必有两条方向相反的有向边。

反对称性

定理

设$R \subseteq A \times A$，则下面的命题等价:

1. R是反对称的;
2. $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;
3. 在$M(R)$中，若任意的$r_{ij} = 1 (i \neq j)$，则必有$r_{ji} = 0$;
4. $G(R)$中，对于任何二个顶点$x_i, x_j (i \neq j)$，若有有向边$\langle x_i, x_j \rangle$，则必没有$\langle x_j, x_i \rangle$。

传递性

定理

设$R \subseteq A \times A$，则下面的命题等价：

1. R是传递的；
2. $R \circ R \subseteq R$；
3. 在$M(R \circ R)$中，若任意的$r'_{ij} = 1$，则$M(R)$中相应的元素$r_{ij} = 1$；
4. $G(R)$中，对于任何顶点x_i, x_j, x_k，若有有向边$\langle x_i, x_j \rangle$，$\langle x_j, x_k \rangle$，则必有有向边$\langle x_i, x_k \rangle$（即若从x_i到x_k有长度为2的有向通路，则从x_i到x_k必有长度为1的有向通路）。

关系的性质

例

设$A=\{a,b,c\}$，$R_i\subseteq A\times A(i=1,2,\cdots,6)$的集合表达式分别为:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}\\
R_2 &= \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}\\
R_3 &= \{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}\\
R_4 &= \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}\\
R_5 &= \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}\\
R_6 &= \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,a\rangle\}
\end{aligned}
$$

这些关系分别有什么性质?

关系的性质

定理

设$R_1, R_2 \subseteq A \times A$。

1. 若R_1, R_2是自反的，则$R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \circ R_2, R_2 \circ R_1$也是自反的;
2. 若R_1, R_2是反自反的，则$R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2, R_2 - R_1$也是反自反的;
3. 若R_1, R_2是对称的，则$R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_1 \cup R_2, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2, R_2 - R_1, \sim R_1, \sim R_2$也是对称的;
4. 若R_1, R_2是反对称的，则$R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_1 \cap R_2, R_1 - R_2, R_2 - R_1$ 也是反对称的;
5. 若R_1, R_2是传递的，则$R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_1 \cap R_2$也是传递的。

二元关系

- 有序对与笛卡尔积
- 二元关系
- 关系矩阵和关系图
- 关系的性质
- 二元关系的幂运算
- 关系的闭包
- 等价关系和划分
- 序关系

关系的幂运算

定义

设$R \subseteq A \times A$，n为自然数，R的n次幂记作R^n，其中

1. $R^0 = I_A$;
2. $R^{n+1} = R^n \circ R, n \geq 0$。

显然R^n还是A上的二元关系。

例

设$A = \{a, b, c\}$，$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, c\rangle\} \subseteq A \times A$，求$R$的各次幂。

$R^0 = I_A$，$R^1 = R^0 \circ R = R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, c\rangle\}$,

$R^2 = R^1 \circ R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$,

$R^3 = R^2 \circ R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle\} = R^1$,

$R^4 = R^3 \circ R = R \circ R = R^2$，$R^5 = R^4 \circ R = R^2 \circ R = R^3 = R^1, \cdots$,

$R^{2k+1} = R^1 = R, R^{2k+2} = R^2, k = 0, 1, 2, \cdots$

关系的幂运算

定理

设A为含n个元素的有穷集合，$R \subseteq A \times A$，则存在自然数s, t，且满足$0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$，使得$R^s = R^t$。

证明： 显然$\mathcal{P}(A \times A)$中元素对幂运算是封闭的，即对任意的自然数k，有$R^k \in \mathcal{P}(A \times A)$，$k = 0, 1, 2, \cdots$，而$\mathcal{P}(A \times A) = 2^{n^2}$，考虑$R$的各项幂$R^0, R^1, \cdots, R^{n^2}$，共产生$2^{n^2} + 1$个$\mathcal{P}(A \times A)$的二元关系，由鸽巢原理可知，存在$s, t$，满足$0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$，使得$R^s = R^t$。

关系幂运算的指数律

定理

设$R \subseteq A \times A$，m, n为任意的自然数，则下面等式成立：

1. $R^m \circ R^n = R^{m+n}$;
2. $(R^m)^n = R^{mn}$。

定理

设$R \subseteq A \times A$，若存在自然数$s, t(s < t)$，使得$R^s = R^t$，则下面等式成立：

1. $R^{s+k} = R^{t+k}, k \in \mathbb{N}$;
2. $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中$k, i \in \mathbb{N}, p = t - s$;
3. 令$S = \{R^0, R^1, \cdots, R^{t-1}\}$，则对于任意的$q \in \mathbb{N}$，均有$R^q \in S$。

幂指数的化简

- 对于有穷集合上的关系R，必存在$s,t(s<t)$，使得$R^s=R^t$，从而可以化简R幂的指数，但对无穷集合则不一定存在s,t，使得$R^s=R^t$。

例

设$R\subseteq A\times A$，已知$R^7=R^{15}$，试化简R^{100}的指数。

解： $R^{100}=R^{7+11\times 8+5}=R^{7+5}=R^{12}\in\{R^0,R^1,\cdots,R^{14}\}$

二元关系

- 有序对与笛卡尔积
- 二元关系
- 关系矩阵和关系图
- 关系的性质
- 二元关系的幂运算
- 关系的闭包
- 等价关系和划分
- 序关系

关系的闭包

定义

设$A \neq \emptyset$，$R \subseteq A \times A$，R的自反闭包（对称闭包、传递闭包）R'满足如下条件:

1. R'是自反的（对称的、传递的）；
2. $R \subseteq R'$;
3. A上任意的自反的（对称的、传递的）关系R''，若$R \subseteq R''$，则$R' \subseteq R''$。

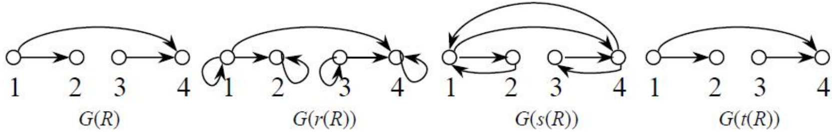
常用$r(R), s(R), t(R)$分别表示R的自反闭包、对称闭包和传递闭包。

关系的闭包

例

设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$，求$r(R),s(R),t(R)$的关系图以及它们的集合表达式。

解： 下面分别给出$R,r(R),s(R),t(R)$的关系图：



$$r(R)=I_A\cup R$$
$$s(R)=R\cup\{\langle 2,1\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,1\rangle\}$$
$$t(R)=R$$

关系的闭包

定理

设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \emptyset$，则

1. R是自反的当且仅当$r(R) = R$;
2. R是对称的当且仅当$s(R) = R$;
3. R是传递的当且仅当$t(R) = R$。

关系的闭包

定理

设集合$A \neq \emptyset$，$R_1, R_2 \subseteq A \times A$，且$R_1 \subseteq R_2$，则

1. $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;
2. $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;
3. $t(R_1) \subseteq t(R_2)$。

关系的闭包

定理

设集合$A \neq \emptyset$，$R_1, R_2 \subseteq A \times A$，则

1. $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$;
2. $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$;
3. $t(R_1 \cup R_2) \subseteq t(R_1) \cup t(R_2)$;

关系的闭包

定理

设集合$A \neq \emptyset$，$R \subseteq A \times A$，则

1. $r(R) = R \cup I_A$;
2. $s(R) = R \cup R^{-1}$;
3. $t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots$。

推论

设A为非空有穷集合，$R \subseteq A \times A$，则存在自然数l，使得

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^l。$$

关系的闭包

例

设$A=\{a,b,c,d\}$， $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$，求$r(R),s(R),t(R)$。

关系的闭包

定理

设集合$A \neq \emptyset$，$R \subseteq A \times A$，则

1. 若R是自反的，则$s(R)$和$t(R)$也是自反的;
2. 若R是对称的，则$r(R)$和$t(R)$也是对称的;
3. 若R是传递的，则$r(R)$也是自反的。

关系的闭包

定理

设集合$A \neq \emptyset$，$R \subseteq A \times A$，则

1. $rs(R) = sr(R)$;
2. $rt(R) = tr(R)$;
3. $st(R) \subseteq ts(R)$。

作业

1. 设A、B、C、D为任意集合，判断如下命题是否为真，并给出证明或反例。
(1) $A\times B=A\times C\Rightarrow B=C$; (2) $A-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$。
2. 设A、B、C为任意集合，证明下列等式成立:
   - $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$;
   - $(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$;
3. 设$A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$，画出$R$和$r(R)$、$s(R)$、$t(R)$的关系图。