集合论与图论
第十三讲　图的着色

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/∼sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.6.4

图的着色

- 点着色
- 色多项式
- 地图的着色与平面图的点着色
- 边着色

图的色数

定义

对无环无向图G顶点的一种着色，是指对它的每个顶点涂上一种颜色，使得相邻的顶点涂不同的颜色。若能用k种颜色给G的顶点着色，就称对G进行了k着色，也称G是k-可着色的，若G是k-可着色的，但不是$k-1$-可着色的，就称G是k-色图，称这样的k为G的色数，记作$\chi(G)=k$。

k-色图的性质

定理

1. $\chi(G)=1$当且仅当G为零图。
2. $\chi(K_n)=n$。
3. 奇圈和奇数阶轮图都是3-色图，而偶数阶轮图为4-色图。
4. 图G是2-可着色的当且仅当G为二部图。

推论

1. $\chi(G)=2$当且仅当G为非零图的二部图。
2. 图G是2-可着色的当且仅当G中不含奇圈。

k-色图的性质

定理

对于任意的图G，均有

$$\chi(G) \le \Delta(G) + 1$$

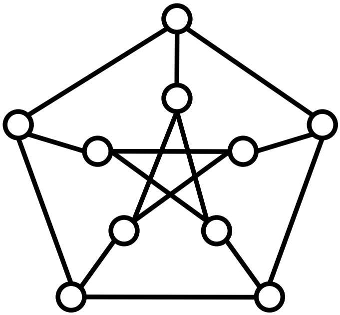
定理 (Brooks)

设连通图不是完全图$K_n(n \ge 3)$也不是奇圈，则$\chi(G) \le \Delta(G)$。

图的色数

例

*Petersen*图的色数$\chi = 3$。



点的着色

定理

对图G进行$\chi(G)$-着色，设$V_i = \{v|v \in V(G)$且v涂颜色$i\}$，$i = 1, 2, \cdots, \chi(G)$，则$\Pi = \{V_1, V_2, \cdots, V_{\chi(G)}\}$是$V(G)$的一个划分。

此定理等价于

定理

对图G进行$\chi(G)$-着色，设

$$R = \{\langle u, v\rangle | u, v \in V(G)\text{且}u, v\text{涂一样的颜色}\},$$

则R是$V(G)$上的等价关系。

图的着色

- 点着色
- 色多项式
- 地图的着色与平面图的点着色
- 边着色

色多项式

定义

设G为n阶无向图，对G进行的两个k着色被认为是不同的，是指至少有一个顶点在两个k着色中被涂不同颜色，以$f(G,k)$表示G的不同k着色方式的总数，称$f(G,k)$为G的色多项式。

若$k<\chi(G)$，显然$f(G,k)=0$，而$\chi(G)$是使$f(G,k)>0$的最小整数。

定理

$f(K_n,k)=k(k-1)\cdots(k-n+1)$，$f(N_n,k)=k^n$，其中$K_n,N_n$分别为$n$阶完全图和$n$阶零图。

推论

$f(K_n,k)=f(K_{n-1},k)(k-n+1), n\geq 2$。

色多项式

定理

在无环无向图G中，$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。

1. $e=(v_i,v_j)\notin E(G)$，则
$$f(G,k)=f(G\cup(v_i,v_j),k)+f(G\backslash(v_i,v_j),k)$$
2. $e=(v_i,v_j)\in E(G)$，则
$$f(G,k)=f(G-e,k)-f(G\backslash e,k)$$

其中$G\backslash(v_i,v_j)$在这里表示将v_i,v_j合并成一个顶点w_{ij}，使它关联v_i,v_j关联的一切边。

推论

$f(G,k)=f(K_{n_1},k)+f(K_{n_2},k)+\cdots+f(K_{n_r},k)$，且$\chi(G)=\min\{n_1,n_2,\cdots n_r\}$。

色多项式的性质

色多项式具有下列性质:

1. $f(G,k)$是n次多项式，其中n为G的阶数;
2. $f(G,k)$中，k^n的系数为1，常数项为0;
3. k^{n-1}的系数为$-m$，m为G中边数;
4. 若G有p个连通分支$G_1,G_2,\cdots,G_p,p\geq 1$，则

$$f(G,p)=\prod_{i=1}^{p}f(G_i,k);$$

5. $f(G,k)$中，系数非0的项的最低次幂为k^p，p为G的连通分支数;
6. $f(G,k)$的系数符号是正负交替的。

色多项式的性质

定理

设V_1是G的点割集，且$G[V_1]$为G的$|V_1|$阶完全子图，$G-V_1$有$p(p\geq 2)$个连通分支$G_1,G_2,\cdots,G_p$，则

$$f(G,k)=\frac{\prod_{i=1}^{p}(f(H_i,k))}{f(G[V_1],k)^{p-1}}$$

其中$H_i=G[V_1\cup V(G_i)],i=1,2,\cdots,p$。

定理

T是n阶树当且仅当$f(T,k)=k(k-1)^{n-1}$。

定理

若G是n阶圈，则

$$f(G,k)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$$

图的着色

- 点着色
- 色多项式
- **地图的着色与平面图的点着色**
- 边着色

地图的着色

定义

连通的无桥平面图的平面嵌入及其所有的面称为平面地图或地图，平面地图的面称为国家，若两个国家的边界至少有一条公共边，则称这两个国家相邻。

定义

平面地图G的一种着色，是指对它的每个国家涂上一种颜色，使相邻的国家涂不同颜色，若能用k种颜色给G着色，就称对G的面进行了k着色，或称G是k-面可着色的。若G是k-面可着色的，但不是$(k-1)$-面可着色的，就称G是k-色地图，或称G的面色数为k，记作$\chi^*(G)=k$。

地图的着色与平面图的点着色

地图的面着色都可以通过平面图的点着色来研究，这是因为平面图都有对偶图。

定理

地图G是k-面可着色的当且仅当它的对偶图G^*是k-可着色的。

这一定理可等价地叙述成如下形式:

定理

设G是连通的无环平面图，G^*是G的对偶图，则G是k-可着色的当且仅当G^*是k-面可着色的。

由上面两个定理可知，研究地图的着色（面着色）等价于研究平面图的点着色。

地图的着色

定理

任何平面图都是6-可着色的。

定理 (Heawood)

任何平面图都是5-可着色的。

UIUC的K. Appel和W. Haken于1976年通过使用计算机进行的1200小时的验证工作，给出了四色定理的证明。之后对其中错误的修正又花了若干年，直到1989年，证明最终定稿出版，超过400页。2004 年，微软剑桥研究院的G. Gonthier使用验证工具Coq对算法程序进行了形式化的可靠性验证。但数学家仍然对使用计算机辅助证明的方式不够满意，希望找到一个完全人工的证明。

定理 (?)

任何平面图都是4-可着色的。

图的着色

- 点着色
- 色多项式
- 地图的着色与平面图的点着色
- 边着色

边色数

定义

对图G边的一种着色，是指对它的每条边涂上一种颜色，使得相邻的边涂不同的颜色，若能用k种颜色给G的边着色就称对G的边进行了k着色，或称G是k-边可着色的，若G是k-边可着色的，但不是$(k-1)$-边可着色的，就称k是G的边色数，记作$\chi'(G)$。

维津定理

关于边色数有下面定理:

定理 (Vizing)

设G是简单图，则$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$。

维津定理说明，对于简单图G，$\chi'(G)$只能取两个值，即$\Delta(G)$或$\Delta(G)$ $+1$。但究竟哪些图的χ'是Δ，哪些是$\Delta + 1$，至今还没有解决，但对于二部图和完全图已经有了结果。

二部图和完全图的边色数

例

设$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$为二部图，则$\chi'(G)=\Delta(G)$。

例

当$n(n\neq 1)$为奇数时，$\chi'(K_n)=n$，而当n为偶数时，$\chi'(K_n)=n-1$。