集合论与图论
第十二讲　平面图

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/∼sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.5.28

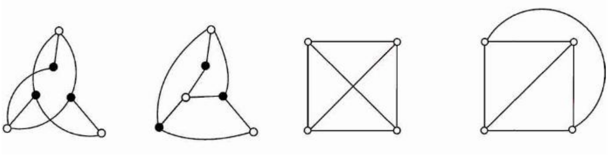
平面图

- 基本概念
- 欧拉公式
- 平面图的判断
- 平面图的对偶图
- 外平面图

平面图

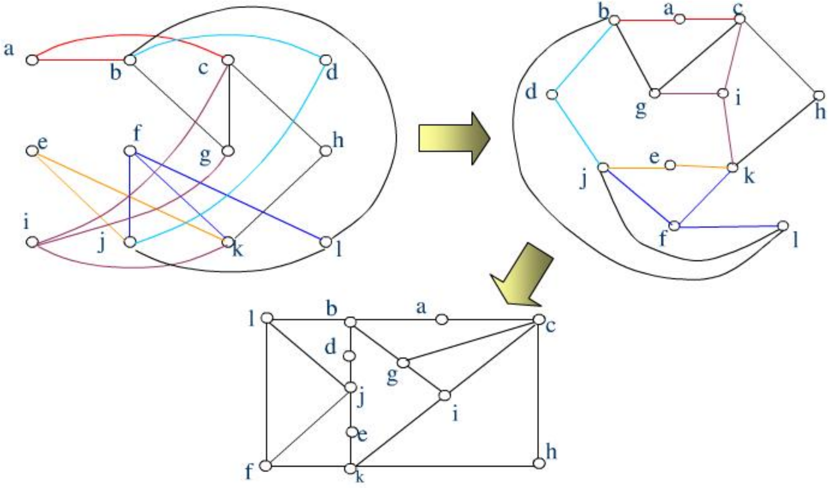
定义

如果图G能以这样的方式画在曲面S上，即除顶点处外无边相交，则称G可嵌入曲面S。若G 可嵌入平面Π，则称G是可平面图或平面图。画出的没有边相交的图称为G的平面表示或平面嵌入。无平面嵌入的图称为非平面图。



(1) (2) (3) (4)

一个平面图的例子



约当定理

自身不相交的、始点和终点重合的曲线称为**约当曲线**。

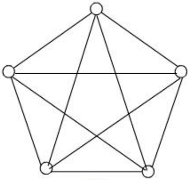
定理

设L是平面Π上的一条约当曲线，平面的其余部分被分成了两个不相交的开集，分别称为L的内部和外部，则连接L的内部点和外部点的任何连续曲线必与L相交。

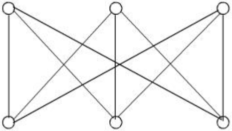
平面图

例

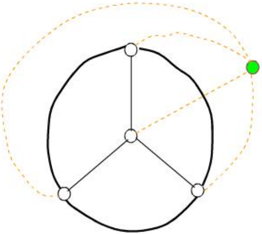
用约当定理证明K_5和$K_{3,3}$不是平面图。



K_5



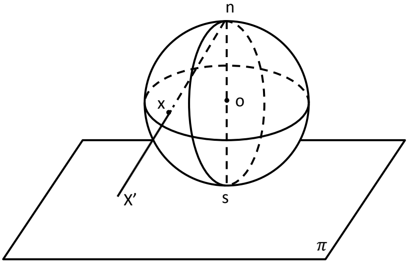
$K_{3,3}$



平面图

定理

图G可嵌入球面当且仅当G可嵌入平面。



推论

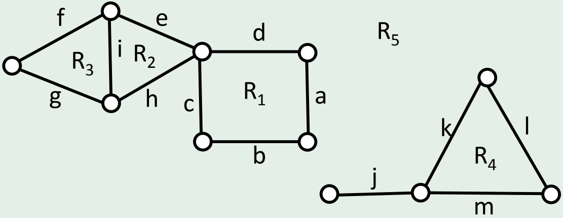
设$\widetilde{G}$与$\widetilde{G}'$分别是平面图G的球面嵌入与平面嵌入，则$\widetilde{G} \cong \widetilde{G}'$。

平面图的面

定义

设G为平面图（平面嵌入），由G的边将G所在的平面划分成若干个区域，每个区域都称为G的一个面，其中面积无限的面称为无限面或外部面，常记为R_0，面积有限的面称为有限面或内部面，常分别记为R_1, $R_2, \cdots, R_k$。包围每个面的所有边组成的回路组称为该面的边界，边界的长度称为该面的次数，而R的次数常记为$deg(R)$。

例



平面图的面

定理

平面图G中所有面的次数之和等于边数m的2倍:

$$\sum_{i=1}^{r} deg(R_i) = 2m$$

其中r为G的面数。

定理

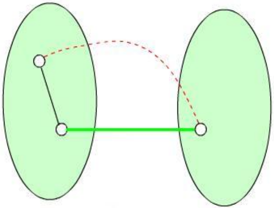
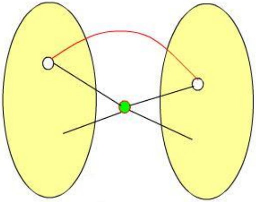
设R是平面图G的某个平面嵌入$\widetilde{G}$的一个内部面，则存在G的平面嵌入$\widetilde{G}_1$以R作为外部面。

极大平面图

定义

设G为简单平面图，若在G的任意不相邻的顶点u, v之间加边(u, v)，所得图为非平面图，则称G为极大平面图。

- $K_1, K_2, K_3, K_5 - e$（表示K_5删除任意一条边）均为极大平面图。
- 由定义易知，极大平面图必是连通的。另外，当阶数$n \geq 3$时，有割点或桥的平面图不可能是极大平面图。

极大平面图

定理

G为$n(n \geq 3)$阶简单的连通平面图，G为极大平面图当且仅当G的每个面的次数均为3。

定理

$n(n \geq 4)$阶极大平面图G中，$\delta(G) \geq 3$。

极小非平面图

设G是n阶简单平面图，用添加边的方法（顶点不增加），总可以得到含G作为子图的n阶极大平面图。

定义

若在非平面图G中任意删除一条边，所得图为平面图，则称G为极小非平面图。

- K_5和$K_{3,3}$都是极小非平面图。
- 若一个图G是平面图，则它的任何子图都是平面图，若G是非平面图，则它的母图（若存在）也是非平面图。

平面图

- 基本概念
- 欧拉公式
- 平面图的判断
- 平面图的对偶图
- 外平面图

欧拉公式

欧拉在研究多面体时发现多面体的顶点数V、棱数E和面数F之间满足

$$V - E + F = 2$$

后来发现连通平面图G的阶数n、边数m和面数r也有类似的公式:

定理

对于任意的连通的平面图G，有

$$n - m + r = 2$$

其中n, m, r分别为G的阶数、边数和面数。

本定理称为欧拉公式。定理中条件“连通性”是不可少的，对于非连通平面图有欧拉公式的推广形式:

定理

对于任意具有$p(p \geq 2)$个连通分支的平面图G，有

$$n - m + r = p + 1$$

其中n, m, r分别为G的顶点数、边数和面数。

平面图的性质

定理

设G是连通的平面图，且G的各面的次数至少为$l(l \geq 3)$，则G的边数m与顶点数n有如下关系：

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)。$$

例

利用上一定理证明K_5和$K_{3,3}$不是平面图。

定理

设G是有$p(p \geq 2)$个连通分支的平面图，且G的各面的次数至少为$l(l \geq 3)$，则G的边数m与顶点数n有如下关系：

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-p-1)。$$

平面图的性质

定理

设G是$n(n \geq 3)$阶m条边的简单平面图，则$m \leq 3n-6$。

定理

设G是$n(n \geq 3)$阶m条边的极大平面图，则$m = 3n-6$。

定理

设G是简单平面图，则G中至少存在一个顶点，其度数小于等于5。

平面图

- 基本概念
- 欧拉公式
- **平面图的判断**
- 平面图的对偶图
- 外平面图

图的同胚

定义

设$e=(u,v)$为图G中一条边，在G中删除e，增加新的顶点w，使u和v均与w相邻，即$G'=(G-e)\cup\{(u,w),(w,v)\}$，称为在$G$中插入2度顶点$w$。
设w为G中一个2度顶点，w 与u,v相邻，删除w，增加新边(u,v)，即$G'=(G-w)\cup\{(u,v)\}$，称为在G中消去2度顶点w。

定义

若两个图G_1和G_2是同构的，或通过反复插入或消去2度顶点后是同构的，则称G_1与G_2 是同胚的。

库拉图斯基定理

定理

图G是平面图当且仅当G不含与K_5同胚子图，也不含与$K_{3,3}$同胚子图。

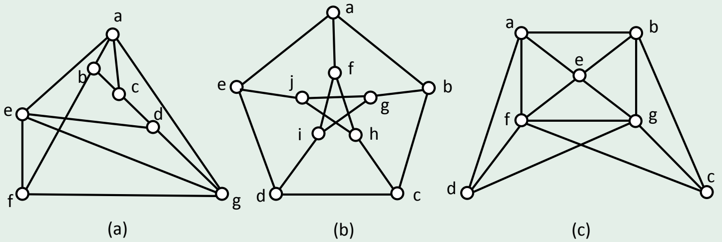
定理

图G是平面图当且仅当G中没有可以收缩到K_5的子图，也没有可以收缩到$K_{3,3}$的子图。

平面图的判断

例

证明下面的图均不是平面图。



平面图的判断

例

K_6有哪些非同构的连通的含$K_{3,3}$为子图的生成子图是非平面图？

平面图

- 基本概念
- 欧拉公式
- 平面图的判断
- **平面图的对偶图**
- 外平面图

平面图的对偶图

定义

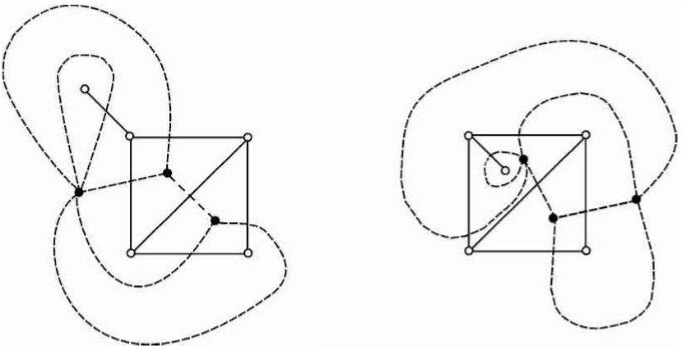
设G是平面图的某一个平面嵌入，构造图G^*如下:

1. 在G的每个面R_i中放置G^*的一个顶点v_i^*;
2. 设e为G的一条边，若e在G的面R_i与R_j的公共边界上，做G^*的边e^*与e相交，且e^*关联G^*的顶点v_i^*, v_j^*，即$e^* = (v_i^*, v_j^*)$，e^* 不与其他任何边相交，若e为G中桥且在R_i的边界上，则e^*是以R_i中顶点v_i^* 为端点的环，即$e^* = (v_i^*, v_i^*)$。

称G^*为G的对偶图。

平面图的对偶图

下面两图中，实线边为平面图，虚线边为其对偶图。



对偶图的性质

1. G^*为平面图，而且是平面嵌入。
2. 若边e为G中的环，则它对应的边e^*为G^*的桥，若e为G中的桥，则e^*为G^*中的环。
3. G^*是连通的。
4. 若G的面R_i与R_j的边界上至少有两条公共边，则关联v_i^*与v_j^*的边有平行边，多数情况下，G^*为多重图。
5. 同构的图的对偶图不一定是同构的。

对偶图的性质

定理

设G^*是连通平面图G的对偶图，n^*, m^*, r^*和n, m, r分别为G^*和G的顶点数、边数和面数，则

1. $n^* = r$;
2. $m^* = m$;
3. $r^* = n$;
4. 设G^*的顶点v_i^*位于G的面R_i中，则$d_{G^*}(v_i^*) = deg(R_i)$。

对偶图的性质

定理

设G^*是具有$p(p \geq 2)$个连通分支的平面图G的对偶图，n^*, m^*, r^*和n, m, r 分别为G^*和G的顶点数、边数和面数，则

1. $n^* = r$;
2. $m^* = m$;
3. $r^* = n - p + 1$;
4. 设v_i^*位于G的面R_i中，则$d_{G^*}(v_i^*) = deg(R_i)$。

定理

设G^*是某平面图G的对偶图，在G^*的图形不改变的条件下，$G^{**} \cong G$ 当且仅当G 是连通图。

自对偶图与轮图

定义

设G^*是平面图G的对偶图，若$G^* \cong G$，则称G是自对偶图。

定义

在$n-1(n \geq 4)$边形C_{n-1}内放置一个顶点，使其与C_{n-1}上$n-1$个顶点均相邻，所得简单图称为轮图，记作W_n，当n为奇数时，称W_n为奇阶轮图，当n为偶数时，称W_n为偶阶轮图。另放置的顶点称为轮心。

定理

$n(n \geq 4)$阶轮图W_n是自对偶图。

平面图

- 基本概念
- 欧拉公式
- 平面图的判断
- 平面图的对偶图
- 外平面图

外平面图

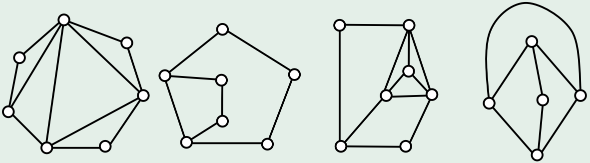
定义

设G是一个平面图，若G存在平面嵌入$\widetilde{G}$，使得G中所有顶点都在$\widetilde{G}$的一个面的边界上，则称G为外可平面图，简称外平面图。

定义

设G是简单的外平面图，若对于G中任意二不相邻的顶点u, v，令$G' = G \cup (u, v)$，则G'不是外平面图，称G为极大外平面图。

例



极大外平面图的性质

定理

所有顶点都在外部面边界上的$n(n \geq 3)$阶外平面图G是极大外平面图当且仅当G的每个内部面的边界都是长为3的圈，外部面的边界是一个长为n的圈。

推论

对于n阶外平面图，总可以用添加新边的方法得到极大外平面图。

定理

所有顶点都在外部面边界上的$n(n \geq 3)$阶极大外平面图G有$n-2$个内部面。

极大外平面图的性质

定理

设G是$n(n \geq 3)$阶极大外平面图，则

1. $m = 2n - 3$，其中m为G中边数;
2. G中至少有3个顶点的度数小于等于3;
3. G中至少有2个顶点的度数等于2;
4. G的点连通度为$\kappa = 2$。

定理

一个图G是外平面图当且仅当G中不含与K_4或$K_{2,3}$同胚子图。

作业

1. 证明不存在非连通的7阶15条边的简单的平面图，并画出一个7阶15条边的极大平面图。
2. 设G为8阶无向简单图，是否G或$\overline{G}$必为非平面图？如是，给出证明，否则，给出反例。
3. 证明不存在具有5个面且每两个面的边界都恰好共享一条公共边的平面图。