集合论与图论
第十一讲　树

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/~sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.5.21

树

- **无向树的定义及性质**
- 生成树
- 环路空间
- 断集空间
- 根树

无向树

定义

连通无回路（本讲回路均指初级回路或简单回路，不含复杂回路）的无向图称为无向树，常用T表示树，若无向图G至少有两个连通分支，且每个连通分支都是树，则称G为森林。平凡图称为平凡树。
设$T=\langle V,E\rangle$为一棵无向树，对任意$v\in V$，若$d(v)=1$，则称v为T的树叶，若$d(v)\geq 2$，则称v为T的分支点。若T为平凡树，则T既无树叶，也无分支点。

无向树的性质

定理

设$G=\langle V,E\rangle$为n阶m条边的无向图，则下面各命题等价:

1. G是树（连通无回路）;
2. G中任二顶点之间存在惟一的一条路径;
3. G中没有圈，且$m=n-1$;
4. G是连通的，且$m=n-1$;
5. G是连通的，且G中任何边均为桥;
6. G中没有圈，但在G中任二不同顶点u,v之间增添边(u,v)，所得图含惟一的一个圈。

无向树的性质

定理

设T是n阶非平凡的无向树，则T至少有两片树叶。

定义

1个分支点带着$n-1$片树叶的n阶无向树称为n阶星形图，其分支点称为星心。常用S_n表示n阶星形图。

树

- 无向树的定义及性质
- 生成树
- 环路空间
- 断集空间
- 根树

生成树的定义

定义

设T是无向图G的子图且为树，则称T为G的树，若T是G的生成子图并且为树，则称T为G的生成树。对任意的边$e \in E(G)$，若$e \in E(T)$，则称e为T 的树枝，否则称e为T的弦，并称$G[E(G) - E(T)]$为T的余树，记作$\overline{T}$。

注意：在此定义中$\overline{T}$不一定是树。

无向图的生成树

定理

无向图G具有生成树当且仅当G是连通的。

推论

1. 设G为n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$。
2. 设T是n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树，则T的余树$\overline{T}$中含$m-n+1$条边。
3. 设T是连通图G的一棵生成树，$\overline{T}$为T的余树，C为G中任意一圈，则$E(\overline{T}) \cap E(C) \neq \emptyset$。

例

设G'是无向连通图G的无圈子图，则G中存在生成树T含G'中所有边。

基本回路

定理

设T是无向连通图G的一棵生成树，e为T的任意一条弦，则$T\cup e$中含G的只含一条弦其余边均为树枝的圈，而且不同的弦对应的圈不同。

定义

设T是n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树，$e_1', e_2', \cdots, e_{m-n+1}'$为$T$的弦，$C_r$是$T$添加$e_r'$产生的$G$中只含弦$e_r'$其余边均为树枝的圈，称$C_r$为$G$对应$T$的弦$e_r'$的基本回路或基本圈，$r=1,2,\cdots,m-n+1$，并称$\{C_1, C_2, \cdots, C_{m-n+1}\}$为$G$对应$T$的基本回路系统，称$m-n+1$为$G$的圈秩，记作$\xi(G)$。

n阶m条边的无向连通图G的不同生成树对应的基本回路系统可能不同，但基本回路系统中元素个数均为G的圈秩$\xi(G)$。

基本割集

定理

设T是连通图G的一棵生成树，e为T的一条树枝，则G中存在只含树枝e，其余元素均为弦的割集，设e_1, e_2是T的不同的树枝，则它们对应的只含一条树枝的割集是不同的。

定义

设T是n阶连通图G的一棵生成树，$e_1', e_2', \cdots, e_{n-1}'$为$T$的树枝，$S_l$为$G$的只含树枝$e_l'$的割集，则称$S_l$为$G$的对应生成树$T$由树枝$e_l'$产生的基本割集，$l = 1, 2, \cdots, n-1$，并称$\{S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}\}$为$G$对应$T$的基本割集系统，称$n-1$为$G$的割集秩，记为$\eta(G)$。

连通图G的不同生成树对应的基本割集系统可能不同，但基本割集中的元素个数均为$\eta(G)$。

基本回路系统与基本割集系统

例

On Board

标定无向图中生成树个数

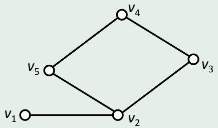
设$G=\langle V,E\rangle$为无向连通图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，即G是顶点标定顺序的标定图，设T_1,T_2是G的两棵生成树，若$E(T_1)\neq E(T_2)$，则认为T_1与T_2是G的不同生成树，在此意义下，记G的生成树个数为$\tau(G)$。

定理

设$G=\langle V,E\rangle$为n阶无向连通标定图（$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$），则对G的任意非环边e均有$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\backslash e)$。

例

计算下图中所有生成树的个数。



标定无向图中生成树个数

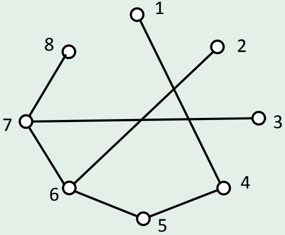
当G为n阶无向完全标定图时，有下面定理:

定理

$\tau(K_n) = n^{n-2} (n \geq 2)$，其中$K_n$为$n$阶无向完全标定图。

例

下图为K_8的一棵生成树，求它对应的长为6的序列。



树

- 无向树的定义及性质
- 生成树
- 环路空间
- 断集空间
- 根树

环路空间

设无向标定图$G=\langle V,E\rangle$无孤立顶点，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$。若将$\emptyset$也看成G的边导出子图，则G共有2^m个不同的边导出子图，并设$G_1,G_2,\cdots,G_{2^m}$为2^m个边导出子图，记$\Omega=\{G_1,G_2,\cdots,G_{2^m}\}$。设$g_i=G[e_i]$，$i=1,2,\cdots,m$，并记$M=\{g_1,g_2,\cdots,g_m\}$，则有

定理

Ω对环和运算及数乘运算：$0\bullet G_i=\emptyset, 1\bullet G_i=G_i, i=1,2,\cdots,2^m$，构成数域$F=\{0,1\}$上的$m$维线性空间，$M$为其生成元集。

定义

设G为一个无向图，称G中圈或有限个边不重的圈的并为环路，规定$\emptyset$为环路。

环路空间

定理

设T是n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树，C_k是对应弦e'_k的基本回路，$k=1,2,\cdots,m-n+1$，则任意的$r(1\le r\le m-n+1)$条弦e'_{i_1}，$e'_{i_2},\cdots,e'_{i_r}$均在$C_{i_1}\bigoplus C_{i_2}\bigoplus\cdots\bigoplus C_{i_r}$中，其中$\bigoplus$为图之间的环和运算。

定理

设C_1和C_2是无向图G中的任意两个回路（初级的或简单的），则环和$C_1\bigoplus C_2$为G中环路。

推论

设C_1和C_2是无向图G中的两个环路，则$C_1\bigoplus C_2$为G中环路（即环路对环和运算封闭）。

环路空间

定理

设G为无向连通图，T为G的任意一棵生成树，则G中任一回路（初级的或简单的）或为T的基本回路或为若干个基本回路的环和。

推论

1. 无向连通图G中任一环路或为某棵生成树的基本回路，或为若干个基本回路的环和。
2. 设G是n阶m条边的无向连通图，设G中有s个回路（初级的或简单的），则$m-n+1 \leq s \leq 2^{m-n+1}-1$。
3. 设G是n阶m条边的无向连通图，设G中有s个环路（含$\emptyset$），则$s = 2^{m-n+1}$。

环路空间

定理

设G为n阶m条边的无向连通图，设$C_{环}$为G中环路（含$\emptyset$）组成的集合，则$C_{环}$是Ω的$m-n+1$维的子空间，其中Ω是G的所有边导出子图的集合。

树

- 无向树的定义及性质
- 生成树
- 环路空间
- 断集空间
- 根树

断集

定义

设$G=\langle V,E\rangle$为一个无向图，$V_1\subset V$且$V_1\neq\emptyset$，记$\overline{V}=V-V_1$，称$\{(u,v)|u\in V_1\wedge v\in\overline{V_1}\}$为$G$ 中的一个断集，记作$E(V_1\times\overline{V_1})$，简记作$(V_1,\overline{V_1})$。

断集

定理

连通图G中每个割集至少包含G的每棵生成树的一个树枝。

定理

设G是n阶m条边的无向连通图，T是G的一棵生成树，S_b为T对应的基本割集系统，则对于任意的$S_{i_1}, S_{i_2}, \cdots, S_{i_k} \in S_b$，必有它们对应的树枝$e'_{i_1}, e'_{i_2}, \cdots, e'_{i_k}$均在$S_{i_1} \bigoplus S_{i_2} \bigoplus \cdots \bigoplus S_{i_k}$中，其中$\bigoplus$为对称差运算。

定理

设S_1, S_2为无向图G的两个断集，则$S_1 \bigoplus S_2$为G中断集，其中$\bigoplus$为对称差运算。

定理

设G为无向连通图，T为G的任意一棵生成树，则G中任一断集或为T的基本割集，或为若干个基本割集的对称差集。

树

- 无向树的定义及性质
- 生成树
- 环路空间
- 断集空间
- 根树

根树的定义

若有向图D的基图是无向树，则称D是有向树，通常用T表示。

定义

若有向树T是平凡树或T中有一个顶点的入度为0，其余顶点的入度均为1，则称T为根树。入度为0的顶点称为树根，入度为1出度为0的顶点称为树叶，入度为1出度不为0的顶点称为内点，内点和树根统称为分支点。从树根到T的任一顶点v的通路（路径）长度称为v的层数，层数最大的顶点的层数称为树高。

定义

设T为一棵根树，$v_i, v_j \in V(T)$，若v_i可达v_j，则称v_i是v_j的祖先，v_j是v_i的后代，若v_i邻接到v_j，则称v_i是v_j的父亲，v_j是v_i的儿子；若v_j, v_k的父亲相同，则称v_j和v_k是兄弟。

定义

若将根树T的层数相同的顶点都标定上次序，则称T为有序树。

r叉树

定义

设T为一棵根树。

1. 若T的每个分支点至多有r个儿子，则称T为r叉树;
2. 若T的每个分支点恰好有r个儿子，则称T为r叉正则树;
3. 若T是r叉正则树且每个树叶的层数均为树高，则称T为r叉完全正则树;
4. 若T是r叉树且为有序树，则称T为r叉有序树;
5. 若T是r叉正则树且为有序树，则称T为r叉正则有序树;
6. 若T是r叉完全正则树且为有序树，则称T为r叉完全正则有序树。

子树

定义

设T为一棵根树，$v \in V(T)$，称v及其后代的导出子图T_v为T的以v为根的子树。

2叉正则有序树的每个分支点的两个儿子导出的子树分别称为该分支点的左子树 和右子树。

根树的周游

对一棵根树的每个顶点都访问且只访问一次称为周游一棵根树。设T是一棵2叉正则有序树，按对树根、左子树、右子树的不同访问顺序主要有以下3种周游方法:

1. 先左子树，再树根，再右子树的周游方法，称为中序周游;
2. 先树根，再左子树，再右子树的周游方法，称为前序周游;
3. 先左子树，再右子树，再树根的周游方法，称为后序周游。

作业

1. 一棵无向树T有5片树叶，3个2度分支点，其余的分支点都是3度顶点，问T共有几个顶点？画出所有非同构的可能的T。
2. 令$v_1, v_2, \cdots, v_n$是给定结点，$d_1, d_2, \cdots, d_n$是给定的数，满足$\sum d_i = 2n-2, d_i \geq 1$。证明在集合$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$上满足$d(v_i) = d_i, i = 1, 2, \cdots, n$的树的数目是
$$\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\cdots(d_n-1)!}$$