集合论与图论
第十讲　欧拉图与哈密顿图

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/∼sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.5.14

欧拉图与哈密顿图

- 欧拉图
- 哈密顿图

哥尼斯堡七桥问题

图中是否存在经过每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路?

欧拉图

定义

1. 通过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的通路称为欧拉通路；
2. 通过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的回路称为欧拉回路；
3. 具有欧拉回路的图称为欧拉图；
4. 具有欧拉通路但无欧拉回路的图称为半欧拉图。

欧拉通路是经过所有边的简单通路并且是生成通路（经过所有顶点的通路），同样地，欧拉回路是经过所有边的简单生成回路。

规定平凡图为欧拉图。

无向欧拉图的判别法

定理

设G为无向连通图，则下面三个命题等价:
(1) G是欧拉图;
(2) G中所有顶点的度数都是偶数;
(3) G是若干个边不重的圈的并。

无向半欧拉图的判别法

定理

设G是连通的无向图，G是半欧拉图当且仅当G中恰有两个奇度顶点。

有向欧拉图的判别法

定理

设D为有向连通图，则下面三个命题等价:
(1) D是欧拉图;
(2) $\forall v \in V(D).d^+(v) = d^-(v)$;
(3) D是若干个边不重的有向初级回路的并。

有向半欧拉图的判别法

定理

设D是连通的有向图，D是半欧拉图当且仅当D中恰有两个奇度顶点，其中的一个入度比出度大1，另一个的出度比入度大1，而其余顶点的入度均等于出度。

Fleury算法求无向欧拉图中的欧拉回路

算法

(1) 任取$v_0 \in V(G)$，令$P_0 = v_0$;

(2) 设$P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_i v_i$已经行遍，按下面方法从$E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$中选取$e_{i+1}$:

1. e_{i+1}与v_i相关联;
2. 除非无别的边可供行遍，否则e_{i+1}不应该为$G_i = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$中的桥;

(3) 当(2)不能再进行时，算法停止。

定理

设G是无向欧拉图，则$Fleury$算法终止时得到的简单通路是欧拉回路。

逐步插入回路法算法求无向欧拉图中的欧拉回路

设C是无向欧拉图G中任意一条简单回路，则$G-E(C)$中各顶点度数的奇偶性不变，因而若$E(G)-E(C)\neq\emptyset$，则$G-E(C)$各连通分支均为欧拉图，因而各连通分支均有欧拉回路，可以将这些回路逐步插入C中，形成G中的欧拉回路，这种算法称为逐步插入回路法，设G是n阶无向欧拉图，求G中欧拉回路的逐步插入回路法算法如下：

算法

开始： $i\leftarrow 0, v^*=v_1, v=v_1, P_0=v_1, G_0=G$。

(**1**) 在G_i中取任一条与v关联的边$e=(v,v')$，将e及v'加入P_i中得P_{i+1}。

(**2**) 若$v'=v^*$，转(**3**)，否则$i\leftarrow i+1$，$v=v'$，转(**1**)。

(**3**) 若$E(P_{i+1})=E(G)$，算法结束。否则，令$G_{i+1}=G-E(P_{i+1})$，在G_{i+1}中任取一条与P_{i+1}中某顶点v_k关联的边e，先将P_{i+1}改写成起点（终点）为v_k的简单回路，再置$v^*=v_k, v=v_k, i\leftarrow i+1$，转(**1**)。

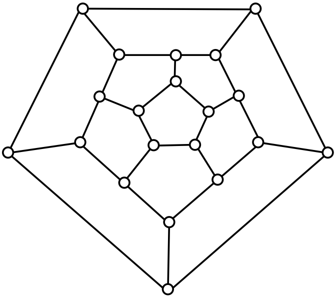
逐步插入回路法的复杂度为$O(m)$，其中m为G的边数。

欧拉图与哈密顿图

- 欧拉图
- **哈密顿图**

哈密顿图

- 1859年英国数学家Willian Hamilton提出一个问题：在正十二面体图上能否求一条初级回路，包含图中所有顶点？他把12面体的20个顶点看成世界上20个城市，边表示城市之间的交通线路，于是问题就变成：能否从某个城市出发，沿交通线路经过每个城市一次，最后回到出发点？
- 对一般的连通图G都可以提这样的问题，即能否找到一条包含图中所有顶点的初级通路或回路。



哈密顿图

定义

1. 经过图中所有顶点一次且仅一次的通路称为哈密顿通路;
2. 经过图中所有顶点一次且仅一次的回路称为哈密顿回路;
3. 具有哈密顿回路的图称为哈密顿图;
4. 具有哈密顿通路而不具有哈密顿回路的图称为半哈密顿图。

哈密顿图的必要条件

定理

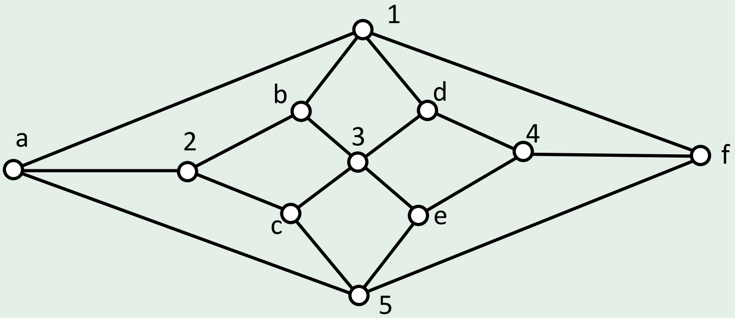
设无向图$G = \langle V, E \rangle$为哈密顿图，则对于V的任意非空真子集V_1均有
$$p(G - V_1) \le |V_1|$$
其中$p(G - V_1)$为$G - V_1$的连通分支数。

推论

设无向图$G = \langle V, E \rangle$为半哈密顿图，则对于V的任意非空真子集V_1均有
$$p(G - V_1) \le |V_1| + 1$$

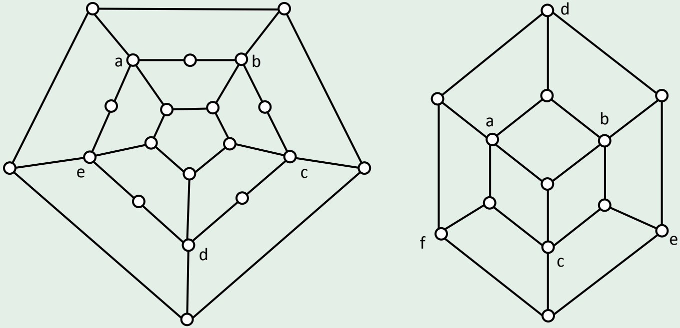
哈密顿图的必要条件

例



哈密顿图的必要条件

例



哈密顿图的充分条件

定理

设G是n阶无向简单图，若对于G中任意不相邻的顶点v_i, v_j，均有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n - 1 \qquad (*)$$

则G中存在哈密顿通路。

哈密顿图的充分条件

推论

设G为$n(n \geq 3)$阶无向简单图，若对于G中任意不相邻的顶点v_i, v_j，均有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n \qquad (**)$$

则G中存在哈密顿回路，从而G是哈密顿图。

推论

设G为$n(n \geq 3)$阶无向简单图，若对任意的$v \in V(G)$，均有$d(v) \geq \frac{n}{2}$，则G为哈密顿图。

哈密顿图的充分条件

定理

设u, v为无向n阶简单图G中两个不相邻的顶点，且$d(u) + d(v) \geq n$，则G为哈密顿图当且仅当$G \cup (u, v)$为哈密顿图。

竞赛图与哈密顿图

定理

设D为n（$n \geq 2$）阶竞赛图，则D具有哈密顿通路。

推论

设D为n阶有向图，若D含n阶竞赛图作为子图，则D中具有哈密顿通路。

竞赛图与哈密顿图

定理

强连通的竞赛图D为哈密顿图。

推论

设D是n阶有向图，若D中含n阶强连通的竞赛图作为子图，则D为哈密顿图。

完全图与哈密顿图

除K_2外所有的完全图K_n都是哈密顿图。设C_1, C_2均为图G的哈密顿回路，若$E(C_1)\cap E(C_2)=\emptyset$，则称$C_1$与$C_2$是边不重的哈密顿图回路。

问题

$K_n(n\geq 3)$中含多少条边不重的哈密顿回路?

定理

完全图$K_{2k+1}(k\geq 1)$中含k条边不重的哈密顿回路，且k条边不重的哈密顿回路含K_{2k+1}中的全部边。

推论

$K_{2k}(k\geq 2)$中含$k-1$条边不重的哈密顿回路，从K_{2k}中删除这$k-1$条哈密顿回路上的所有边后所得图含k条彼此不相邻的边。

作业

1. 编写程序搜索出正十二面体图（教材图8.8）中全部不同的哈密顿回路。（本次作业下次上课前通过email发给助教，说明所用语言及开发环境）