集合论与图论
第一讲　集合

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/∼sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.2.26

课程基本信息

- 主讲：孙猛（Email：sunmeng@math.pku.edu.cn）；
- 助教：王更（Email：cnpkwang@gmail.com）；
- 上课时间地点：周二7-8节，三教403
- 教材：耿素云，屈婉玲，王捍贫，离散数学教程，北京大学出版社。
- 课程评估（最终成绩中百分比可能会有所调整）
  1. 平时成绩（20%）
  2. 期中考试成绩（20%）
  3. 期末考试成绩（60%）
- 如无特殊说明，每次上课所留作业均一周后上课时交，迟交者不计入成绩。

集合

- 集合的概念及集合之间的关系
- 集合的运算
- 基本的集合恒等式
- 集合列的极限

集合与集合元素

- 一般用大写字母$A, B, C, \cdots$表示集合，小写字母$a, b, c, \cdots$表示集合中的元素
- 元素a属于集合A记为$a \in A$，a不属于集合A记为$a \notin A$
- 集合中的元素是不重复的
- 集合中的元素是无序的

表示集合的方法

- 列举法
  - 列出集合中的全体元素，集合由且仅由它的元素所确定
  - $A = \{a, b, c, d\}$，$B = \{2, 4, 6, \cdots\}$
- 描述法
  - 用谓词$P(x)$表示x具有性质P，$A = \{x \mid P(x)\}$表示具有性质P的集合A，$x \in A$当且仅当$P(x)$成立
  - $P_1(x) : x$是英文字母，$C = \{x \mid P_1(x)\}$
  - $P_2(x) : x$是十进制数字，$D = \{y \mid P_2(y)\}$
- 集合的两种表示法可互相转化

集合举例

列举法给出下列集合

1. 偶素数集合
2. 1至200的整数中完全平方数的集合
3. 1至100的整数中完全立方数的集合
4. 非负整数集合
5. 24的素因子集合

集合举例

列举法给出下列集合

1. 偶素数集合
   - $\{2\}$
2. 1至200的整数中完全平方数的集合
   - $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196\}$
3. 1至100的整数中完全立方数的集合
   - $\{1, 8, 27, 64\}$
4. 非负整数集合
   - $\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$
5. 24的素因子集合
   - $\{2, 3\}$

集合举例

描述法给出下列集合

1. 平面直角坐标系中单位圆内的点集
2. 正弦为1的角集
3. $x^2 - y^2 = z^2$的非负整数解集
4. $x^2 + 5x + 6 = 0$的解集

集合举例

描述法给出下列集合

1. 平面直角坐标系中单位圆内的点集
   - $\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2+y^2 \le 1\}$
2. 正弦为1的角集
   - $\{\theta \in \mathbb{R} \mid sin(\theta) = 1\}$
3. $x^2 - y^2 = z^2$的非负整数解集
   - $\{\langle x,y,z\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x^2 - y^2 = z^2\}$
4. $x^2 + 5x + 6 = 0$的解集
   - $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x + 6 = 0\}$

子集与相等关系

定义

设A、B为二集合，若B中的每个元素都是A中的元素，则称B是A的子集，记作$B \subseteq A$，也称A包含B或B含于A，其符号化形式为$B \subseteq A \Longleftrightarrow \forall x(x \in B \to x \in A)$。

- 若B不是A的子集，则记作$B \nsubseteq A$，其符号化形式为$B \nsubseteq A \Longleftrightarrow \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$。

定义

设A、B为二集合，若A包含B且B包含A，则称A与B相等，记作$A = B$。即

$$A = B \Longleftrightarrow \forall x(x \in A \longleftrightarrow x \in B)$$

真子集与空集

定义

设A、B为二集合，若A为B的子集，且$A \neq B$，则称A为B的**真子集**，记作$A \subset B$，也称B真包含A，即

$$A \subset B \Longleftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

- 若A不是B的真子集，则记作$A \not\subset B$。

定义

不拥有任何元素的集合称为**空集合**，简称为**空集**，记作$\emptyset$。

子集与空集

判断下列命题正确性

1. $A \subseteq A$。 $\surd$
2. 若$A \subseteq B$且$A \neq B$，则$B \not\subseteq A$。 $\surd$
3. 若$A \subseteq B$且$B \subseteq C$，则$A \subseteq C$。 $\surd$
4. $A \not\subset A$。 $\surd$
5. 若$A \subset B$，则$B \not\subset A$。 $\surd$
6. 若$A \subset B$且$B \subset C$，则$A \subset C$。 $\surd$
7. $\emptyset \subseteq \emptyset$。 $\surd$
8. $\emptyset \in \emptyset$。 $\times$
9. $\emptyset \in \{\emptyset\}$。 $\surd$
10. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$。 $\surd$

子集与空集

定理

空集是一切集合的子集。

证明： 只要证明对于任意的集合A，均有$\emptyset \subseteq A$成立，即证明$\forall x(x \in \emptyset \longrightarrow x \in A)$为真，这是显然的。

推论

空集是惟一的。

证明： 设$\emptyset_1$和$\emptyset_2$都是空集，易知$\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2 \wedge \emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$，所以$\emptyset_1 = \emptyset_2$。

全集

定义

如果限定所讨论的集合都是某一集合的子集，则称该集合为全集，常记为E。

- 全集的概念是相对的，可根据具体情况决定。
- 根据某一具体情况定义的全集是不惟一的。

幂集

定义

设A为一个集合，称由A的所有子集组成的集合为A的**幂集**，记作$\wp(A)$。描述法表示为$\wp(A)=\{x \mid x \subseteq A\}$。

- 若$|A|=n$，通过分别计算A的0元、1元直至n元的所有子集，再将它们组成集合，即可计算出$\wp(A)$。
  - $|\wp(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$

计算$A=\{a,b,c,d\}$的幂集$\wp(A)$

- 0元子集$C_4^0=1$个：$\emptyset$;
- 1元子集$C_4^1=4$个：$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}$;
- 2元子集$C_4^2=6$个：$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\}$, $\{c,d\}$;
- 3元子集$C_4^3=4$个：$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$;
- 4元子集$C_4^4=1$个：$\{a,b,c,d\}$;

$$
\begin{aligned}
\wp(A)=\{&\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\\
&\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\\
&\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\\
&\{a,b,c,d\}\}
\end{aligned}
$$

计算$B=\{1,\{2,3\}\}$的幂集$\wp(B)$

- 0元子集1个：$\emptyset$;
- 1元子集2个：$\{1\},\{\{2,3\}\}$;
- 2元子集1个：$\{1,\{2,3\}\}$;

$$\wp(B)=\{\emptyset,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$$

集族

- 除了$\wp(A)$这样由集合构成的集合外，数学中还会遇到许多其他形式的由集合构成的集合，统称这样的集合为**集族**。若将集族中的集合都赋予记号，则可得带指标集的集族，见如下定义：

定义

设$\mathcal{A}$为一个集族，S为一个集合，若对于任意的$\alpha \in S$，存在惟一的$A_\alpha \in \mathcal{A}$与之对应，而且$\mathcal{A}$中的任一集合都对应S中的某一元素，则称$\mathcal{A}$是以S为指标集的**集族**，S称为$\mathcal{A}$的**指标集**。常记为$\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$，或$\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$。

- 若将$\emptyset$看成集族，则称$\emptyset$为**空集族**。

集族举例

- 设$A_1=\{x\mid x\in\mathbb{N}\wedge x$为奇数$\}$，$A_2=\{x\mid x\in\mathbb{N}\wedge x$为偶数$\}$，则$\{A_1,A_2\}$是以$\{1,2\}$为指标集的集族。
- 设p为一素数，$A_k=\{x\mid x=k(\mathrm{mod}\ p)\}$，$k=0,1,\cdots,p-1$，则$\mathcal{A}=\{A_0,A_1,\cdots,A_{p-1}\}$是以$\{0,1,2,\cdots,p-1\}$为指标集的集族，也可记为$\mathcal{A}=\{A_k\mid k\in\{0,1,\cdots,p-1\}\}$
或$\mathcal{A}=\{A_k\}_{k\in\{0,1,2,\cdots,p-1\}}$。
- 设$A_n=\{x\mid x\in\mathbb{N}\wedge x=n\}$，则$\mathcal{A}=\{A_n\mid n\in\mathbb{N}\}$是以$\mathbb{N}$为指标集的集族，集族中的元素为以各自然数为元素的单元集。
- 令$\mathbb{N}_+=\mathbb{N}-\{0\}$，设$A_n=\{x\mid 0\leq x<\frac{1}{n}\wedge n\in\mathbb{N}_+\}$，则$\mathcal{A}=\{A_n\mid n\in\mathbb{N}_+\}$是以$\mathbb{N}_+$为指标集的集族，其元素为半开半闭区间$[0,\frac{1}{n})$，$n=1,2,\cdots$。

多重集合

- 设全集为E，E中元素可以不止一次在A中出现的集合A，称为多重集合，若E中元素a在A中出现$k(k \geq 0)$次，则称a在A中的重复度为k。
- 设全集$E = \{a, b, c, d, e\}$。$A = \{a, a, b, b, c\}$为多重集合，其中a, b的重复度为2，c的重复度为1，d, e的重复度均为0。
- 集合可以看成是各元素重复度均小于等于1的多重集合。

集合

- 集合的概念及集合之间的关系
- 集合的运算
- 基本的集合恒等式
- 集合列的极限

集合的并

定义

设A, B为二集合，称由A和B的所有元素组成的集合为A与B的并集，记作$A \cup B$，称$\cup$为并运算符，$A \cup B$的描述法表示为$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$。

例

设$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 5 \leq x \leq 10\}$，$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 10 \wedge x$为素数$\}$，则

$$A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

集合的并

- 集合的并运算可以推广到有限个或可数个集合的情况:
  - 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个集合,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid \exists i(1 \leq i \leq n \wedge x \in A_i)\}$$

  - 对于可数个集合$A_1, A_2, \cdots$, 其并集为:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

集合的并

例

- 设$A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge n-1 \le x \le n\}$, $n = 1, 2, \cdots, 10$,则

$$\bigcup_{n=1}^{10} A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \le x \le 10\} = [0, 10]$$

- 设$A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \le x \le \frac{1}{n}\}$, $n = 1, 2, \cdots$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \le x \le 1\} = [0, 1]$$

集合的交

定义

设A, B为二集合，称由A和B的公共元素组成的集合为A与B的交集，记作$A\cap B$，称$\cap$为交运算符，$A\cap B$的描述法表示为$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$。

例

设$A=\{x\mid x\in\mathbb{N}\wedge x\text{为奇数}\wedge 0\leq x\leq 20\}$，$B=\{x\mid x\in\mathbb{N}\wedge x\text{为素数}\wedge 0\leq x\leq 20\}$，则

$$A\cap B=\{3,5,7,11,13,17,19\}$$

集合的交

- 同并运算类似，集合的交运算可以推广到有限个或可数个集合：
  - 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个集合，

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \\ &= \{x \mid \forall i(1 \leq i \leq n \rightarrow x \in A_i)\}\end{aligned}$$

  - 对于可数个集合$A_1, A_2, \cdots$，其交集为：

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

集合的交

例

- 设$A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \le x \le \frac{1}{n}\}$， $n = 1, 2, \cdots, 10$， 则

$$\bigcap_{n=1}^{10} A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \le x \le \frac{1}{10}\} = [0, \frac{1}{10}]$$

- 设$A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \le x \le n\}$， $n = 1, 2, \cdots,$ 则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \le x \le 1\} = [0, 1]$$

集合的交

定义

设A, B为二集合，若$A \cap B = \emptyset$，则称A, B是不交的，设$A_1, A_2, \cdots$是可数个集合，若对于任意的$i \neq j$，均有$A_i \cap A_j = \emptyset$，则称$A_1, A_2, \cdots$是互不相交的。

例

设$A_n = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge n - 1 < x < n\}$，$n = 1, 2, \cdots$，则$A_1$, $A_2, \cdots$是互不相交的。

相对补与对称差

定义

设A, B为二集合，称属于A而不属于B的全体元素组成的集合为B对A的相对补集，记作$A-B$，称$-$为相对补运算符，$A-B$的描述法表示为

$$A-B=\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}。$$

定义

设A, B为二集合，称属于A而不属于B，或属于B而不属于A的全体元素组成的集合为A与B的对称差，记作$A \oplus B$，称$\oplus$为对称差运算符，$A \oplus B$的描述法表示为

$$A \oplus B=\{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}。$$

相对补与对称差

- $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$。

例

设$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \le x < 2\}$，$B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 1 \le x < 3\}$，则

- $A - B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \le x < 1\} = [0, 1)$;
- $B - A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 2 \le x < 3\} = [2, 3)$;
- $A \oplus B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (0 \le x < 1 \vee 2 \le x < 3)\} = [0, 1) \cup [2, 3)$。

绝对补

定义

设E为全集，$A \subseteq E$，称A对E的相对补集$E - A$为A的绝对补集，简记为$\sim A$，称$\sim$为绝对补运算符。$\sim A$的描述法表示为

$$\sim A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}。$$

例

设$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x < 2\}$，当将实数集$\mathbb{R}$作为全集时，

$$\begin{aligned} \sim A &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (-\infty < x < 0 \vee 2 \leq x < +\infty)\} \\ &= (-\infty, 0) \cup [2, +\infty) \end{aligned}$$

集族上的运算

定义

设$\mathcal{A}$为一个集族，称由$\mathcal{A}$中全体元素的元素组成的集合为$\mathcal{A}$ 的广义并集，记作$\bigcup\mathcal{A}$，称$\bigcup$为广义并运算符。$\bigcup\mathcal{A}$的描述法表示为$\bigcup\mathcal{A}=\{x \mid \exists z(z\in\mathcal{A}\wedge x\in z)\}$。

定义

对非空集族$\mathcal{A}$，称由$\mathcal{A}$中全体元素的公共元素组成的集合为$\mathcal{A}$ 的广义交集，记作$\bigcap\mathcal{A}$，称$\bigcup$为广义交运算符。$\bigcap\mathcal{A}$的描述法表示为$\bigcap\mathcal{A}=\{x \mid \forall z(z\in\mathcal{A}\rightarrow x\in z)\}$。

集族上的运算

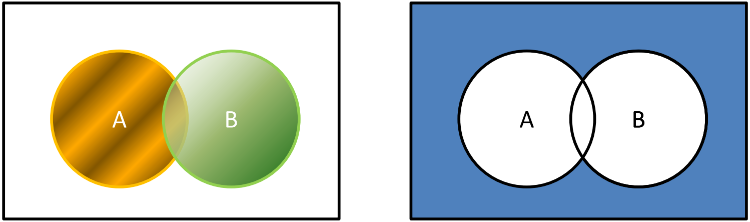
- 设$\mathcal{A}=\{\{a,b\},\{c,d\},\{d,e,f\}\}$，则
$$\bigcup\mathcal{A}=\{a,b,c,d,e,f\}。$$
- 设$\mathcal{A}=\{\{1,2,3\},\{1,a,b\},\{1,6,7\}\}$，则
$$\bigcap\mathcal{A}=\{1\}。$$
- 当$\mathcal{A}$是以S为指标集的集族时，
$$\bigcup\mathcal{A}=\bigcup\{A_\alpha\mid\alpha\in S\}=\cup_{\alpha\in S}A_\alpha$$
$$\bigcap\mathcal{A}=\bigcap\{A_\alpha\mid\alpha\in S\}=\cap_{\alpha\in S}A_\alpha$$

集合运算的分类

- 相对于广义并和广义交的概念来说，我们将前面给出的集合的并和交分别称为初级并和初级交。
- 为了规定运算的优先级，将集合的各种运算分成两类：
  1. 绝对补、求幂集、广义并、广义交
  2. 初级并、初级交、相对补、对称差

  第一类运算按照从右到左的顺序进行，第二类运算顺序往往由括号决定，多个括号并排或无括号部分按由左向右的顺序进行。

文氏图



容斥原理

定理

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个集合，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i<j}|A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

集合计数

在1到10000之间既不是某个整数的平方，也不是某个整数的立方的数有多少个？

集合

- 集合的概念及集合之间的关系
- 集合的运算
- **基本的集合恒等式**
- 集合列的极限

集合恒等式

- 基本恒等式
  - 与命题逻辑中的等值演算非常类似
    - $\cup$类似于$\vee$，$\cap$类似于$\wedge$，$\sim$类似于$\neg$
    - 基本恒等式都可根据集合相等的定义证明
  - 注意德摩根律的绝对形式和相对形式、补交转换律等集合等式
- 集合等式的证明方法
  - 根据集合相等的定义进行证明
    - $A = B$当且仅当$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$
    - 对任意的x，首先以$x \in A$作为附加前提推导$x \in B$，然后以$x \in B$作为附加前提推导$x \in A$
  - 利用基本恒等式进行证明

基本恒等式

- 幂等律：$A \cup A = A$；$A \cap A = A$。
- 交换律：$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$。
- 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。
- 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。
- 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A$；$A \cap (A \cup B) = A$。
- 零律：$A \cup E = E$；$A \cap \emptyset = \emptyset$。
- 同一律：$A \cup \emptyset = A$；$A \cap E = A$。
- 排中律：$A \cup \sim A = E$。
- 矛盾律：$A \cap \sim A = \emptyset$。
- 余补律：$\sim \emptyset = E$；$\sim E = \emptyset$。
- 双重否定律：$\sim (\sim A) = A$。
- 补交转换律：$A - B = A \cap \sim B$。
- 德摩根律：
    - 绝对形式：$\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$；$\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$。
    - 相对形式：$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$；$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$。

集合恒等式的推广

- 交换律、结合律、分配律、德摩根律、吸收律等运算规律可以推广到集族的情况。设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$为集族，$B$为一集合，则分配律和德摩根律分别为

$$
\begin{aligned}
B\bigcup(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}) &= \bigcap_{\alpha\in S}(B\bigcup A_\alpha) \\
B\bigcap(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}) &= \bigcup_{\alpha\in S}(B\bigcap A_\alpha) \\
\sim\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S} &= \bigcap_{\alpha\in S}(\sim A_\alpha) \\
\sim\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S} &= \bigcup_{\alpha\in S}(\sim A_\alpha) \\
B-\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S} &= \bigcap_{\alpha\in S}(B-A_\alpha) \\
B-\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S} &= \bigcup_{\alpha\in S}(B-A_\alpha)
\end{aligned}
$$

集合恒等式推导示例

由定义证明下面的恒等式:

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A - B = A \cap \sim B$;
- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;

- 证明基本思想：欲证$P = Q$，即证

$$P \subseteq Q \wedge Q \subseteq P$$

也就是要证，对于任意的x，有

$$x \in P \Rightarrow x \in Q \text{且} x \in Q \Rightarrow x \in P$$

成立，两式合在一起即$x \in P \Leftrightarrow x \in Q$。

集合恒等式推导示例

使用已有恒等式证明下面的恒等式:

- $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$;
- $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$。

集合恒等式应用示例

对集合A、B、C，已知$A \cup B = A \cup C$，$A \cap B = A \cap C$，证明$B = C$。

证明：
$$\begin{aligned} B &= B \cap (A \cup B) = B \cap (A \cup C) \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ &= (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap C = C \end{aligned}$$

由此例易知，$B = C \Leftrightarrow A \cup B = A \cup C \wedge A \cap B = A \cap C$。

若只有$A \cup B = A \cup C$，或只有$A \cap B = A \cap C$，是否可得到$B = C$?

练习

设A、B为集合，证明下面四个命题等价:

1. $A \cup B = B$;
2. $A \subseteq B$;
3. $A \cap B = A$;
4. $A - B = \emptyset$。

集合

- 集合的概念及集合之间的关系
- 集合的运算
- 基本的集合恒等式
- 集合列的极限

上极限与下极限

定义

若集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$的指标集$S$为$\mathbb{N}_+$，则称集族$\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}_+}$为集合列，简记为$\{A_k\}$。对于集合列$\{A_k\}$，

- 称$\{x \mid \forall n(n\in\mathbb{N}_+ \to \exists k(k\in\mathbb{N}_+ \wedge k\geq n \wedge x\in A_k))\}$为$\{A_k\}$的上极限集，简称上极限，记作$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$。
- 称$\{x \mid \exists n_0(n_0\in\mathbb{N}_+ \wedge \forall k(k\in\mathbb{N}_+ \wedge k\geq n_0 \to x\in A_k))\}$为$\{A_k\}$的下极限集，简称下极限，记作$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$。
- 当$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$时，称之为$\{A_k\}$的极限集，简称极限，记作$\lim\limits_{k\to\infty} A_k$。若$\{A_k\}$有极限，称$\{A_k\}$是收敛的。

集合列的极限

例

设S_1, S_2为两个集合，作集合列如下：

$$A_k = \begin{cases} S_1, & k\text{为奇数} \\ S_2, & k\text{为偶数} \end{cases} \qquad k = 1, 2, \cdots$$

讨论$\{A_k\}$的收敛情况。

解： 易知 $\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k = S_1 \cup S_2$， $\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k = S_1 \cap S_2$。

当$S_1 = S_2$时，$\{A_k\}$收敛于$S_1 (= S_2)$，否则不收敛。

集合列的极限

例

设在集合列$\{A_k\}$中，$A_k=[0,k]$，讨论$\{A_k\}$的收敛情况。

解： 由定义可知$\overline{\lim_{k\to\infty}} A_k=\underline{\lim_{k\to\infty}} A_k=[0,+\infty)$，所以$\{A_k\}$收敛，且$\lim_{k\to\infty} A_k=[0,+\infty)$。

集合列的极限

定理

设$\{A_k\}$为集合列，则

1. $\varliminf\limits_{k\to\infty} A_k \subseteq \varlimsup\limits_{k\to\infty} A_k$;
2. $\varlimsup\limits_{k\to\infty} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$;
3. $\varliminf\limits_{k\to\infty} A_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$。

集合列的极限

定理

设$\{A_k\}$为一集合列，B为一集合，则

1. $B-\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\underline{\lim_{k\to\infty}}(B-A_k)$;
2. $B-\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k=\overline{\lim_{k\to\infty}}(B-A_k)$。

集合列的极限

对集合列$\{A_k\}$，令$E=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}_+}A_k$为全集，$B_k=\sim A_k$，$k=1,2,\cdots$，则$\{B_k\}$也为一集合列，且有下面定理

定理

$E=\varliminf\limits_{k\to\infty}A_k\cup\varlimsup\limits_{k\to\infty}B_k=\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k\cup\varliminf\limits_{k\to\infty}B_k$。

单调集合列

定义

设$\{A_k\}$为一个集合列，若$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_k \supseteq \cdots$，则称$\{A_k\}$为递减集合列。若$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k \subseteq \cdots$，则称$\{A_k\}$为递增集合列。递减和递增集合列统称为单调集合列。

单调集合列的极限总是存在的，且若$\{A_k\}$递减，则

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n;$$ 若$\{A_k\}$递增，则 $$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;$$

单调集合列

例

- 设$A_k=[k,\infty)$，$k=1,2,\cdots$，则$\{A_k\}$是递减集合列，

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\emptyset;$$

- 设$A_k=[0,k)$，$k=1,2,\cdots$，则$\{A_k\}$是递增集合列，

$$\lim_{k\to\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=[0,+\infty)。$$

作业

1. 证明若对任意集合X，$X \cup Y = X$，则$Y = \emptyset$。
2. 证明对任意集合A, B, C，
   - $A \cap C \subseteq B \cap C \wedge A - C \subseteq B - C \Rightarrow A \subseteq B$;
   - $A \cup B = A \cup C \wedge A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$。
3. 对任意集合A和B，定义$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$，证明以下规律:
   - $A \triangle B = B \triangle A$;
   - $A \triangle A = \emptyset$;
   - $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;
   - $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$。
4. 某班有25名学生，其中14人会打篮球，12人会打排球，6人会打篮球和排球，5人会打篮球和网球，2人会打这3种球，已知6个会打网球的人都至少会打篮球或排球中的一种，求不会打球的人数。