



广义对流扩散问题的稳定化有限元方法

吴朔男^{1*}

1. 北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: snwu@math.pku.edu.cn

收稿日期: 2023-06-30; 接受日期: 2023-08-30; 网络出版日期: 202X-XX-XX

国家自然科学基金 (批准号: 12222101)、北京市自然科学基金 (批准号: 1232007) 资助项目

摘要 本文介绍了稳态对流扩散问题的稳定化有限元方法. 其主要难点在于当对流占优时可能出现边界层, 导致传统有限元方法在边界层内失去稳定性, 从而产生剧烈震荡. 在拟均匀网格下, 稳定化有限元方法可分为两类: 迎风型方法和指数拟合方法. 前者利用对流速度的信息在变分形式中增加稳定化项, 而后者利用边界层解的特征将指数函数引入到格式设计中. 这两类方法对于设计电磁场等新型对流扩散问题的数值方法起到重要指导作用.

关键词 对流扩散方程 有限元方法 迎风型 指数拟合 电磁场对流扩散

MSC (2020) 主题分类 65N12, 65N15, 65N30

1 引言

对流扩散方程是一类常见的偏微分方程, 描述了物质在流体介质中同时受到对流和扩散的影响. 其中, 对流项描述了流体运动引起的物质输运, 扩散项描述了物质由于浓度梯度而发生的自发扩散. 对流扩散方程在多个科学和工程领域中都具有广泛的应用, 包括流体力学、天体物理学、地下水流动、气象学、半导体和反应流动等.

在有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上, 经典的标量对流扩散方程有如下形式:

$$\mathcal{L}u := -\varepsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \gamma u = f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内.} \quad (1.1)$$

这里, u 表示待求的物理量 (如浓度、温度等), $\varepsilon > 0$ 表示扩散系数, β 表示速度场. 该问题的适定性可以在一定的边界条件下 (如 $u|_{\partial\Omega} = 0$) 成立. 扩散项 $-\varepsilon \Delta u$ 与对流项 $\beta \cdot \nabla u$ 的相互作用导致了方程解的特殊行为. 例如, 当问题是对流占优, 即 $\varepsilon \ll |\beta|$ 时, 问题 (1.1) 的解可能出现内部或边界层结构 (在非常小的区域解及其导数急剧变化). 边界 $\Gamma := \partial\Omega$ 根据流场方向, 可分为入流出流两类, 即:

$$\Gamma^- := \{x \in \Gamma : \beta \cdot \mathbf{n} < 0\}, \quad \Gamma^+ := \{x \in \Gamma : \beta \cdot \mathbf{n} \geq 0\}.$$

英文引用格式: Wu S N. Stabilized finite element discretizations of general convection-diffusion problems (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2023, 49: 1–25, doi: [10.1360/N012017-XXXX](https://doi.org/10.1360/N012017-XXXX)

对于纯对流问题 (即 $\varepsilon = 0$), 仅需在入流边界 Γ^- 处施加 Dirichlet 边界条件. 因此, 当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, (1.1) 的边界条件不自洽性是导致解可能存在边界层结构的原因之一. 考虑 $u|_{\partial\Omega} = 0$ 的简单情形, 其变分问题为: 求 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$a(u, v) := \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) v + \int_{\Omega} \gamma uv = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.2)$$

在离散层面上, 记 \mathcal{T}_h 为 Ω 的正则单纯形剖分族 (简单起见, 这里假设区域为多边形). 对于任意 $T \in \mathcal{T}_h$, h_T 表示 T 的直径. 对于变分问题 (1.2), 如果使用经典的有限元方法, 并且边界层处网格尺度 h_T 较大, 那么得到的数值解通常会在整个区域中产生大幅度的数值震荡. 该现象的出现不仅是因为经典有限元方法无法充分近似边界层内的解, 也是因为它在层内失去了稳定性, 参见 [139] 中 6.1 节的讨论. 要正确解析这些层结构, 需要细化网格使得 h_T 与扩散和对流之间的比例相当, 使得对流不再在单元内占主导地位. 在许多情况下, 这样的处理会增加大量的自由度, 增加离散问题求解规模. 另一方面, 由于通常情况下只对全局解感兴趣, 因此亟需设计无论网格细化程度的稳定化方法以消除震荡.

在拟均匀网格 (quasi-uniform meshes) 下, 本文将回顾 (1.1) 的两类稳定化有限元方法:

- (1) 迎风型方法 (见第 2 节), 包括: 残量型、对称型稳定化方法, 以及间断 Galerkin 方法;
- (2) 指数拟和方法 (见第 3 节), 包括: 指数拟合样条, 以及算子指数拟合.

对流扩散问题的数值方法还涉及许多重要研究课题, 在本文中未涉及, 感兴趣的读者可以参考专著或综述 [97, 98, 118, 135, 139]. 这里列举一些与有限元方法相关的研究课题及相关进展:

- 自适应边界层网格 (Layer-adapted meshes). 边界层解是对流占优时的一个典型解, 可以设计不同类型的自适应边界层网格来捕捉该特征 [9, 132]. 作为最常用的一种自适应边界层网格, Shishkin 类型网格下可应用标准有限元方法 [99, 122, 136, 142], 以及流线扩散有限元方法 [40, 101, 140, 155]. 相应的超收敛及后处理技术也有很多研究 [51, 100, 121, 123, 156].

- 快速求解器. 尽管对流项导致离散系统非对称, 扩散占优时经典的快速求解技术仍然保持有效, 例如多重网格法 [10, 19, 20] 和区域分解法 [37, 38]. 对于对流占优情况的求解器设计, 在磨光时应考虑自由度重排 [17, 55, 144, 146], 在粗化时也应基于流场信息 [92, 93, 104, 111].

- 时间发展问题数值方法. 对于时间发展的对流扩散方程, 一个重要的工作是 Cockburn 与 Shu 提出的局部间断 Galerkin (LDG) 方法 [45], 并以此发展了大量数值方法 [46, 109, 133]. 另一类重要方法是特征线法 [50, 114], 并引出一系列研究工作 [39, 58, 74, 89, 125, 126].

近年来, 对流扩散方程在电磁场等向量场问题中也有着愈发重要的应用. 例如, 国际原子能机构在清洁核能源官方说明 [70] 中指出, 磁约束核聚变是最佳的清洁核能源, 其核心机制是“强力磁场控制高能碰撞的等离子体”. 本文也将基于一些标量问题的稳定化有限元方法, 讨论其在电磁场等新型对流扩散问题中的推广和应用.

2 迎风型方法

迎风格式是处理对流项的经典方法, 它可以有效地减轻数值震荡, 特别是在对流占优的情况下. 在差分方法中, 迎风的含义是差分方向与流场相反. 本节将介绍如何在有限元框架下应用这种迎风思想. 总的来说, 在试验函数或测试函数的选择以及双线性型的设计中, 可以明确地利用流场信息, 从而提高数值方法的稳定性.

2.1 残量型稳定化

为了保持数值格式的稳定性, 本小节首先讨论将加权残差添加到标准 Galerkin 有限元格式的两种稳定化技术: 流线扩散和最小二乘有限元方法. 由于精确解的残差为零, 该稳定化方法可以天然保持相容性. 随后讨论将残量自由泡函数加入到有限元空间的稳定化技术, 并说明这两种稳定化技术的紧密联系. 本小节中的有限元空间为如下标准的分片 k 次连续函数空间:

$$V_h := \{v_h \in H_0^1(\Omega) : v_h|_T \in \mathcal{P}_k(T) \text{ 对于任意单元 } T \in \mathcal{T}_h\}.$$

2.1.1 流线扩散型方法 (SDFEM 或 SUPG)

基于流线扩散的有限元方法最早由 Hughes 和 Brooks 提出, 称为流线扩散有限元 (streamline-diffusion FEM, SDFEM) [75]; 它的另一个熟知的名称为流线迎风 Petrov Galerkin (streamline upwind Petrov Galerkin, SUPG) [29]. 该方法在双线性型中加入带权的残量, 以达到格式的稳定化. 其定义为: 寻找 $u_h \in V_h$ 使得对于任意的 $v_h \in V_h$, 满足

$$a(u_h, v_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (-\varepsilon \Delta u_h + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u_h + \gamma u_h, \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v_h)_T = (f, v_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (f, \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v_h)_T, \quad (2.1)$$

其中, $(\cdot, \cdot)_T$ 代表单元 T 上的 L^2 内积, δ_T 为人工参数, 称为流线扩散参数. 当 V_h 为分片线性连续函数空间且常数项 $\gamma = 0$ 时, 稳定化项变为 $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u_h, \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v_h)_T$, 其强形式对应着微分算子 $-\delta |\boldsymbol{\beta}|^2 u_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}$, 其中 δ 为分片常数函数, $u_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}}$ 为流速 $\boldsymbol{\beta}$ 的二阶方向导数. 因此, 该稳定化可以看作在流线扩散方向增加数值粘性, 因此得名 SDFEM. 另一方面, (2.1) 可以看作将测试函数空间 (即 v_h 所在的空间) 由 V_h 换为 $\{v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v_h : v_h \in V_h\}$, 即测试函数空间由试验函数空间加流线迎风得到, 因此得名 SUPG.

SUPG 方法满足相容性, 即 (2.1) 中将 u_h 换为真解 u 时恒成立 (又称 Galerkin 正交性). 流线扩散参数 δ_T 的选取则需兼顾稳定性与收敛性. 从最终误差阶的角度, 拟最优的 δ_T 选取策略为 (见 [139] 中 6.4 节):

$$\delta_T = \begin{cases} \delta_0 h_T & \text{如果 } Pe_T > 1 \quad (\text{对流占优情况}), \\ \delta_1 h_T^2 / \varepsilon & \text{如果 } Pe_T \leq 1 \quad (\text{扩散占优情况}). \end{cases} \quad (2.2)$$

其中, 网格 Péclet 数定义为 $Pe_T := \|\boldsymbol{\beta}\|_{0,\infty,T} h_T / (2\varepsilon)$, δ_0 和 δ_1 为人工选取的正参数.

是否可以在 (2.2) 的选取准则下给出 δ_T 的“最优”选择? 对于一维常系数问题, 最优的 δ_T 对应于 Pin-Allen-Southwell 格式 [49, 82], 具体形式见后文 (3.2). 一般来说, 这个问题的答案是否定的. 对于多维问题, 可考虑 δ_T 的选取与 ε 一致收敛性的联系 [117, 130, 141], 或与解在边界层内外的精度的联系 [103, 145]; 其他相关讨论参见 [60, 73, 86, 87, 118].

SDFEM (SUPG) 格式有许多后续改进. 例如, 为了在内部或边界层获得高分辨率, 可以在流线扩散格式加入错风 (crosswind) 耗散 [47, 88, 110]; 为了在离散层面保持最大值原理, 可以对 SDFEM 加入非线性激波捕捉校正项 [31, 32, 81, 94, 102, 108, 131]. 文献 [83–85] 综述了多种减少边界层伪震荡的数值方法, 并通过大量数值算例加以佐证.

最小二乘有限元方法 (Galerkin Least Square Finite Element Method, GLSFEM). SUPG 的一个重要特点是, 在标准 Galerkin 方法中添加每个单元的加权残量, 其相容性与权重的选取无关. 另

一种权重选取方法对应着问题 (1.1) 的如下加权残量

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (\mathcal{L}u_h - f, \mathcal{L}v_h)_T. \quad (2.3)$$

将此项替换 SUPG 方法 (2.1) 中的加权残量, 得到的数值格式称为 GLSFEM [78]. 由于残量 (2.3) 可以看作在每个单元内求解最小二乘问题 $\min_{v_h \in V_h} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \|\mathcal{L}v_h - f\|_{0,T}^2$, 该方法因而得名. 更一般地, 可以考虑残量 $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (\mathcal{L}u_h - f, \psi(v_h))_T$, 其中 ψ 为给定算子. 显然, SUPG 对应着 $\psi(v_h) = \beta \cdot \nabla v_h$, GLSFEM 对应着 $\psi(v_h) = \mathcal{L}v_h$; 文献 [61] 中考虑了 $\gamma = 0$ 时 $\psi(v_h) = \varepsilon \Delta v_h + \beta \cdot \nabla v_h$ 的格式.

2.1.2 残量自由泡函数稳定化 (Residual-free Bubble Function, RBF)

在 [28] 中, Brezzi 和 Russo 首先给出了流线扩散型方法的一种新的刻画. 其核心想法是, SUPG 格式的稳定性可以由 (局部) 泡函数的静态凝聚 (static condensation) 产生 [8]. 为了更加清晰地展示这种刻画, 以下将假设 β 与 f 为分片常数, $\gamma = 0$, 讨论分片线性连续有限元空间 V_h (即 $k = 1$) 的泡函数稳定化.

假设已经给定单元 T 上的某个泡函数 \tilde{b}_T , 定义如下泡函数空间:

$$B_h = \text{span}\{\tilde{b}_T \in H_0^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}. \quad (2.4)$$

于是可以在有限元空间 $V_h \oplus B_h$ 上求解 (1.2), 便获得泡函数稳定化方法的一种表达形式. 另一种表达形式利用静态凝聚的思想, 即局部消去泡函数. 具体地说, 将数值解分解为 $u_h = u_L + u_B \in V_h \oplus B_h$, 并分别取测试函数为 $v_L \in V_h$ 和 $v_B \in B_h$, 得到

$$\varepsilon(\nabla(u_L + u_B), \nabla v_L) + (\beta \cdot \nabla(u_L + u_B), v_L) = (f, v_L), \quad (2.5)$$

$$\varepsilon(\nabla(u_L + u_B), \nabla v_B) + (\beta \cdot \nabla(u_L + u_B), v_B) = (f, v_B). \quad (2.6)$$

注意到 (2.6) 为一维问题, 通过简单计算可得到 $u_B = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} d_T \tilde{b}_T$, 其中 $d_T = \frac{(1, \tilde{b}_T)_T}{\varepsilon |\tilde{b}_T|_{1,T}^2} (f - \beta \cdot \nabla u_L)|_T$. 再将 u_B 的结果带回 (2.5), 便得到泡稳定化方法的如下表达形式: 寻找 $u_L \in V_h$, 使得

$$a(u_L, v_L) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \kappa_T (\beta \cdot \nabla u_L, \beta \cdot \nabla v_L)_T = (f, v_L) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \kappa_T (f, \beta \cdot \nabla v_L)_T, \quad \forall v_L \in V_h. \quad (2.7)$$

该形式与流线扩散型 (SUPG) 方法 (2.1) 一致, 只是稳定化参数变为

$$\kappa_T = \frac{1}{|T|} \frac{|(1, \tilde{b}_T)_T|^2}{\varepsilon |\tilde{b}_T|_{1,T}^2}.$$

泡函数稳定化与 SUPG 的相关性只在单纯形网格的线性元空间成立, 四边形网格结果不同 [21, 95].

随之而来的问题是, 如何选取泡函数 \tilde{b}_T ? 注意到 (2.6), 当 v_B 跑遍所有 $H_0^1(T)$ 时, 恰好为如下问题的弱解: $u_B|_{\partial T} = 0$, 在 T 内, $-\varepsilon \Delta u_B + \beta \cdot \nabla u_B = (f - \beta \cdot \nabla u_L)|_T$. 同时, 注意到右端项在单元 T 为常数, 因此, 理想情况下 \tilde{b}_T 为残量自由的泡函数 (residual-free bubble function), 即

$$-\varepsilon \Delta \tilde{b}_T + \beta \cdot \nabla \tilde{b}_T = 1 \quad \text{在 } T \text{ 内}, \quad \tilde{b}_T = 0 \quad \text{在 } \partial T \text{ 上}. \quad (2.8)$$

对于一维情况, \tilde{b}_T 可以解析解出, 带入 (2.7) 同样对应于 Π 'in-Allen-Southwell 格式 [49, 82], 具体形式见后文 (3.2). 对于高维问题, (2.8) 的解析解形式复杂, 实际情况下可选取伪残量自由泡函数 [23], 次网格稳定化 [27], 多层方法 [62, 67] 等.

一般来说, 给定分片 k 次多项式空间 V_h 和适当的泡函数空间 B_h , 满足 $V_h \cap B_h = \emptyset$. 则泡函数稳定化方法可表示为: 寻找 $u_h \in V_h$ 满足

$$a(u_h + M(u_h), v_h) = (f, v_h) - a(F(f), v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.9)$$

其中, $M(u_h), F(f) \in B_h$ 由求解 B_h 上的变分子问题得到. 即对于任何 $v_B \in B_h$, 有 $a(M(u_h), v_B) = -a(u_h, v_B)$, $a(F(f), v_B) = (f, v_B)$. 从该形式可看出, 泡函数稳定化与多尺度有限元方法也有紧密联系, 参见 [76, 77, 79, 118].

2.2 对称型稳定化

尽管上节中残量型稳定化方法有许多好的性质, 但其增加的稳定化项是非对称的, 这会在最优控制算法设计 [16]、质量集中 [48] 等技术应用中带来困难. 本小节将考虑避免该缺陷的两种对称型稳定化方法: 局部投影法和连续内罚法.

2.2.1 局部投影法 (Local Projection Stabilization, LPS)

在残量型稳定化方法的讨论中, 人们发现其稳定化的作用只体现在 $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (\beta \cdot \nabla u, \beta \cdot \nabla u)$ 中. 然而, 该项并不相容: 当对流占优时 $\delta_T = \mathcal{O}(h_T)$, 带入真解后的相容性误差为 $\mathcal{O}(h_T^{1/2})$, 导致格式的收敛阶不最优. 局部投影法的基本思想为: 引入另一个有限元空间 D_h , 并记 $\pi_h : L^2(\Omega) \rightarrow D_h$ 为其上的 L^2 投影, 随后用 $\kappa_h(\beta \cdot \nabla u)$ 替代 $\beta \cdot \nabla u$ 的作用. 这里 $\kappa_h := I - \pi_h$, 在 D_h 满足逼近性时可获得高阶相容性误差.

随之产生的一个问题是: 如何定义有限元空间 D_h ? 我们采用 [65, 106] 的符号, 首先给出 D_h 所依赖的网格: 考虑 \mathcal{M}_h 为 Ω 的另一个网格剖分, 其单元 $M \in \mathcal{M}_h$ 称为宏单元, 满足每个 M 包含一个或多个 \mathcal{T}_h 的单元. 通常情况, D_h 取为 \mathcal{M}_h 上的间断有限元空间. 记离散变量所在的分片多项式空间为 $Y_h \subset H^1(\Omega)$. 局部投影法 (LPS) 的定义如下: 寻找 $u_h \in V_h := Y_h \cap H_0^1(\Omega)$ 使得

$$(\varepsilon \nabla u_h, \nabla v_h) + (\beta \cdot \nabla u_h + \gamma u_h, v_h) + S_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad (2.10)$$

其中稳定化项 S_h 取为

$$S_h(u, v) = \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_M \left(\kappa_h(\beta \cdot \nabla u), \kappa_h(\beta \cdot \nabla v) \right)_M. \quad (2.11)$$

LPS 在求解 Stokes 问题 [14] 时被首先提出, 并拓展到求解输运方程 [15] 和 Oseen 方程 [18] 中. 这些结果使用了两层 (two-level) 思想, 即投影空间 D_h 的网格比求解空间 Y_h 的网格粗. 该思路与次网格建模 (subgrid modeling) [56, 68] 有紧密联系, 不同的是, 次网格建模采用梯度的波动作为稳定化项, 而 LPS 采用梯度在速度方向的波动. 另一种思路是保持 D_h 与 Y_h 的网格一致, 即 $\mathcal{M}_h = \mathcal{T}_h$, 而适当扩充求解空间 Y_h 达到格式的稳定性. 对于这两类方法, D_h 与 Y_h 的构造除了需满足传统的逼近性, 另一核心要求为 [65, 106]:

$$\inf_{q_h \in D_h(M)} \sup_{v_h \in Y_h(M)} \frac{(v_h, q_h)_M}{\|v_h\|_{0,M} \|q_h\|_{0,M}} \geq \beta > 0, \quad (2.12)$$

其中 $Y_h(M) := \{w_h|_M : w_h \in Y_h\} \cap H_0^1(M)$. 该条件表明, $Y_h(M)$ 的维数至少需大于或等于 $D_h(M)$ 的维数. 根据 [134] 的结果, 当所有宏单元均等价于一个参考宏单元时, 条件 (2.12) 可简化为 $Z_M := \{q_h \in D_h(M) : (q_h, v_h)_M = 0, \forall v_h \in Y_h(M)\} = \{0\}$. 下面简要介绍两类方法对应的一些例子, 具体的分析参见 [106].

两层方法的例子. 对于单纯形网格, 最常用的例子是将宏单元 $M \in \mathcal{M}_h$ 的每个顶点与其重心相连, 得到 $d+1$ 个子单纯形; 这些单纯形组成的网格便是 \mathcal{T}_h , 并记 $\mathcal{M}_h = \mathcal{T}_{2h}$. 此时, 一族满足 (2.12) 有限元空间对记为 $(Y_h, D_h) = (\mathcal{P}_{k,h}, \mathcal{P}_{k-1,2h}^{-1})$, 其中 $\mathcal{P}_{k,h}$ 表示 \mathcal{T}_h 上分片 k 次 ($k \geq 1$) 连续有限元空间, $\mathcal{P}_{k-1,2h}^{-1}$ 表示 \mathcal{T}_{2h} 上分片 $k-1$ 次间断有限元空间. 类似的想法可以应用于四边形 ($d=2$) 和六面体 ($d=3$) 网格, 但其逼近性和关于 (2.12) 的要求更加复杂, 具体参见 [6, 106].

扩充 Y_h 的例子. 记 $\lambda_i (i=1, \dots, d+1)$ 为单纯形 T 的重心坐标. 考虑 T 的体泡函数 $b_T := \prod_{i=1}^{d+1} \lambda_i$, 并记 $\mathcal{P}_k^{\text{bubble}}(T) := \mathcal{P}_k(T) + b_T \cdot \mathcal{P}_{k-1}(T)$, 其中 $k \geq 1$. 一个常用的稳定有限元空间取法为 $(Y_h, D_h) = (\mathcal{P}_{k,h}^{\text{bubble}}, \mathcal{P}_{k-1,h}^{-1})$. 注意到 $\mathcal{P}_k^{\text{bubble}}(T)$ 的定义中并不一定是直和, 其包含的体泡函数维数恰好为 $k-1$ 次多项式维数, 即 $\dim Y_h(T) = \dim D_h(T)$. 也就是说, 这种扩充从局部维数的角度是最优的. 同样的, 该想法也可应用于四边形和六面体网格 [6, 106].

下面简述扩充 Y_h 与 SUPG 的关系. 考虑 $k=1$ 的情况, 此时 $\mathcal{P}_1^{\text{bubble}}(T)$ 中的两部分为直和. 记 $\tau_T = \tau_M$, 类似于 2.1.2 节的讨论, 局部求解泡函数, 可得到

$$\varepsilon(\nabla u_L, \nabla v_L) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u_L, v_L) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \theta_T (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u_L, \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v_L)_T = (f, v_L) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \theta_T (f, \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v_L)_T,$$

其中流线扩散参数为

$$\theta_T := \frac{1}{|T|} \cdot \frac{|(1, b_T)_T|^2}{\varepsilon |b_T|_{1,T}^2 + \tau_T \|\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla b_T\|_{0,T}^2} \sim \frac{h_T^2}{\varepsilon + \tau_T \|\boldsymbol{\beta}\|^2}.$$

对比流线扩散型方法的选取经验 (2.2), 对流占优时取 $\tau_T \sim h_T / \|\boldsymbol{\beta}\|$, 扩散占优时取 $\tau_T = 0$ 即可.

2.2.2 连续内罚法 (Continuous Interior Penalty, CIP)

另一种对称型稳定化方法为连续内罚有限元方法 (CIP): 在边界处, 通过函数值的惩罚近似边界条件; 在单元内部, 通过对导数信息的惩罚获得稳定性. 具体的说, 取离散空间满足 $V_h \subset H^1(\Omega)$, 注意这里没有强制零边值. CIP 的定义如下: 寻找 $u_h \in V_h$ 满足

$$a_h(u_h, v_h) + J_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad (2.13)$$

其中, 方程及边界惩罚项和稳定化项分别定义为

$$\begin{aligned} a_h(u, v) &:= \varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u + \gamma u, v) - \langle \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}u, v \rangle_{\Gamma^-} \\ &\quad - \varepsilon \langle \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, v \rangle_{\Gamma} - \varepsilon \langle u, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \rangle_{\Gamma} + \sum_{F \in \mathcal{F}_\Gamma} \eta_F \varepsilon h_F^{-1} \langle u, v \rangle_F, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$J_h(u, v) := \sum_{F \in \mathcal{F}_h^0} \tau_F \langle \boldsymbol{\beta}_h \cdot \llbracket \nabla u \rrbracket_F, \boldsymbol{\beta}_h \cdot \llbracket \nabla v \rrbracket_F \rangle_F. \quad (2.15)$$

这里, \mathcal{F}_h^0 为所有内部单元面的集合, η_F 为边界惩罚参数; $\boldsymbol{\beta}_h$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的连续分片线性近似, 对于 $F \in \mathcal{F}_h^0$ 上给定的单位外法向 \mathbf{n}_F , 函数跳跃定义为 $\llbracket w \rrbracket_F := \lim_{t \rightarrow 0} w(x + t\mathbf{n}_F) - w(x - t\mathbf{n}_F)$. 显然, (2.15) 与 F 上单位外法向选取无关. 由于稳定化项的形式在二维时为单元边界的导数跳跃, 该方法也被称为边稳定化方法 (edge stabilization). 类似的稳定化参见 [30, 34, 35].

CIP 的稳定化机制与 LPS 有密切联系. 事实上, [30] 中构造了一个投影算子 $\pi_h^* : H^2(\mathcal{T}_h) \rightarrow V_h$, 对于任意 $v_h \in V_h$ 与单元 T , 均满足:

$$h_T \|\beta_h \cdot \nabla v_h - \pi_h^*(\beta_h \cdot \nabla v_h)\|_{0,T}^2 \leq C \sum_{F \in \mathcal{F}_h(T)} \int_F h_F^2 |\beta_h \cdot [\nabla v_h]_F|^2 dS,$$

其中 $\mathcal{F}_h(T) := \{F \in \mathcal{F}_h^0 : F \cap T \neq \emptyset\}$. 该不等式的另一个方向在 [34] 中给出, 即说明 CIP 可以等效地看作将 (2.11) 中 κ_h 换做 $I - \pi_h^*$ 的 LPS. 然而, 相较于非协调的 LPS 方法, CIP 的优势在于其满足相容性, 也较容易推广到局部网格和多项式次数加密的版本 (hp FEM) [33].

2.3 间断 Galerkin 方法 (Discontinuous Galerkin, DG)

间断 Galerkin 是数值求解偏微分方程最常用的方法之一. 对于对流扩散问题, 相关的 DG 格式研究工作很多 [42, 43, 45, 54, 72, 80, 143, 154]. 这些 DG 方法形式不同, 本小节将采用 [7] 提出的加权残量 (weighted-residual) 方法给出一个统一形式. 令 F 为相邻单元 T^+ 和 T^- 的公共面, \mathbf{n}^\pm 为 ∂T^\pm 上的单位外法向. 对于内部面 $F \in \mathcal{F}_h^0$, 定义如下 DG 中常用的平均和跳跃:

$$\{v\} = \frac{1}{2}(v^+ + v^-), \quad [[v]] = v^+ \mathbf{n}^+ + v^- \mathbf{n}^-, \quad \{\mathbf{v}\} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-), \quad [\mathbf{v}] = \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n}^-.$$

在边界面 $F \in \mathcal{F}_h^\partial$ 上, $[[v]] = v\mathbf{n}$, $\{v\} = v$, $\{\mathbf{v}\} = \mathbf{v}$. DG 格式稳定化的一个主要机制是加权平均: 在内部面 F 上, 定义权重 α^\pm 满足 $\alpha^+ + \alpha^- = 1$, 则标量和向量函数的加权平均定义为

$$\{v\}_\alpha = \alpha^- v^- + \alpha^+ v^+, \quad \{\mathbf{v}\}_\alpha = \alpha^- \mathbf{v}^- + \alpha^+ \mathbf{v}^+. \tag{2.16}$$

显然, 当 $\alpha^\pm = \frac{1}{2}$ 时, 上述定义即为标准平均. 而 α 的选取与速度 β 相关时, 便起到了迎风的效果.

引入通量 $\sigma(u) := -\varepsilon \nabla u + \beta u$ 并记 $\tilde{\gamma} = \gamma - \text{div} \beta$. 标量对流扩散方程 (1.1) 可写成如下形式:

$$\text{div} \sigma(u) + \tilde{\gamma} u = f.$$

形式上看, 为了保持通量的法向连续性及变量 u 的连续性, 该问题在网格 \mathcal{T}_h 上的等价形式为:

$$\begin{aligned} \text{div} \sigma(u) + \tilde{\gamma} u &= f \quad \text{在每个单元 } T \in \mathcal{T}_h \text{ 上,} \\ [\sigma(u)] &= 0 \quad \text{在每个区域内部面 } F \in \mathcal{F}_h^0 \text{ 上,} \\ [u] &= 0 \quad \text{在每个区域内部面 } F \in \mathcal{F}_h^0 \text{ 上,} \\ u &= 0 \quad \text{在每个区域边界面 } F \in \mathcal{F}_h^\partial \text{ 上.} \end{aligned}$$

于是, 引入权重算子 $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1^D$, 得到如下变分形式: 寻找 $u_h \in V_h$, 使得对于任意 $v_h \in V_h$ 满足

$$\begin{aligned} (\text{div}_h \sigma(u_h) + \tilde{\gamma} u_h - f, \mathcal{B}_0 v_h) + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^0} \int_F [[u_h]] \cdot \mathcal{B}_1 v_h \\ + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^0} \int_F [\sigma(u_h)] \mathcal{B}_2 v_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\partial} \int_F u_h \mathcal{B}_1^D v_h = 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

这里, V_h 取为分片 k 次多项式的 DG 空间, div_h 表示分片散度 (下同). 该形式将各个方程的残量加以组合, 通过选取不同形式的 \mathcal{B} , 便可以得到各种 DG 格式. 其另一个优势是有天然的相容性, 即当 u_h 换为真解 u 时 (2.17) 恒成立.

文献 [7] 给出一些常用的 \mathcal{B} 选取方式, 我们将其总结成最一般的形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0 v|_T &= v, & \mathcal{B}_1 v|_F &= \varepsilon \eta_F h_F^{-1} \llbracket v \rrbracket - \theta \{\varepsilon \nabla_h v\}_\alpha + \{\beta v\}_\alpha - \{\beta v\}, \\ \mathcal{B}_2 v|_F &= -\{v\}_{1-\alpha}, & \mathcal{B}_1^D v|_F &= \varepsilon \eta_F h_F^{-1} v - (\theta \varepsilon \nabla_h v + \beta v \chi_{\Gamma_D^-}) \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中, $\theta \in [-1, 1]$ 为内罚型 DG 控制扩散项处理方式的参数: $\theta = 1$ 为对称型; $\theta = -1$ 为非对称型; $\theta = 0$ 为中性型. 正常数 η_F 有一致正下界, 即对于任意 $F \in \mathcal{F}_h$, 有 $\eta_F \geq \eta_0 > 0$. 格式的迎风机制由权重 α 给出, 即要求 $\beta \cdot \llbracket \alpha \rrbracket = (2\alpha^+ - 1)\beta \cdot \mathbf{n}^+ > 0$. 取 \mathbf{n}^+ 为迎风单元处的外法向, 此条件即要求 $\alpha^+ > \frac{1}{2}$, 即迎风单元在平均时占更多比重.

注意到上述格式虽然在推导时引入通量, 但最终格式仍只依赖于原始变量 u . 近些年, 将通量 σ 与原始变量 u 同时作为求解变量的 DG 方法逐渐流行起来. 尽管问题的整体自由度变多, Cockburn 等人提出了可杂交化的混合间断有限元方法 (Hybridizable Discontinuous Galerkin, HDG) [41, 44, 109, 115], 可以降低整体问题规模; 通过提高通量空间的多项式次数, 文献 [64] 得到了特殊网格下 HDG 方法数值通量的最优收敛阶.

2.4 分析结果

本小节将简要介绍以上格式的分析结果, 其核心是构建离散层面的稳定性. 我们首先讨论从连续层面的稳定性. 对于标量对流扩散方程 (1.1), 一维的情形的典型解包含形如 $z(x) = e^{-Cx/\varepsilon}$ 的指数型边界层. 注意到 $|z|_1 = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$. 为了平衡范数中各项的贡献, 在连续层面上定义如下带权范数:

$$\|v\|_{1,\varepsilon}^2 := \varepsilon |v|_1^2 + \|v\|_0^2.$$

在该范数下, 双线性型 (1.2) 的强制性 (即稳定性的一个充分条件) 在如下假设下可以得到.

假设 2.1 存在常数 γ_0 使得

$$\gamma - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \geq \gamma_0 > 0. \quad (2.19)$$

该假设产生的原因是将 (1.2) 中的对流项分部积分一半, 即 $(\beta \cdot \nabla u, v) = \frac{1}{2}(\beta \cdot \nabla u, v) - \frac{1}{2}(u, \nabla \cdot (\beta v))$. 取 $v = u$ 时, 便得到不含变量导数的 L^2 项 $(\beta \cdot \nabla u, u) = -\frac{1}{2}(\nabla \cdot \beta, u^2)$. 由强制性和 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得到稳定性结果 $\|u\|_{1,\varepsilon} \leq C\|f\|_0$.

离散稳定性. 注意到上述格式的离散空间为拟均匀网格下的分片多项式空间, 即 $|u_h|_1 = \mathcal{O}(h^{-1/2})$. 此时, 连续层面的范数中 $\varepsilon^{1/2}|u_h|_1 = \mathcal{O}(\varepsilon/h)^{1/2}$, 其量级在对流占优情形 (即 $\varepsilon \ll h$ 时), 无法与低阶项匹配. 因此, 需要更强的离散范数 $\|\cdot\|_{h,\varepsilon}$, 以获得稳定性.

有了离散稳定性, 并结合有限元方法中经典的技术 (如插值估计、逆估计等), 便可得到在适当的参数选取下数值格式的拟最优误差估计. 对于 2.1–2.3 节的数值格式, 其分析结果有如下统一形式:

$$a_h(v_h, v_h) \geq C\|v_h\|_{h,\varepsilon} \quad \forall v_h \in V_h, \quad (2.20)$$

$$\|u - u_h\|_{h,\varepsilon} \leq C(\varepsilon^{1/2} + h^{1/2})h^k |u|_{k+1}. \quad (2.21)$$

下面列出不同方法的范数定义和参数选取准则:

1. 流线扩散型方法 (SDFEM 或 SUPG). 范数定义为

$$\|v\|_{h,\varepsilon} := \|v\|_{\text{SUPG}} := \left(\varepsilon|v|_1^2 + \|v\|_0^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \|\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v\|_{0,T}^2 \right)^{1/2}.$$

可以看出, 相较于连续问题的范数, $\|\cdot\|_{\text{SUPG}}$ 包含了额外的流线方向导数控制, 因而防止了数值解在 Ω 大部分区域的震荡. 当 δ_T 按照 (2.2) 选取时 (其中人工参数 δ_0 和 δ_1 适当选取, 依赖于 γ_0 、网格正则性常数、逆不等式常数等), 便得到 (2.20) 和 (2.21).

需要注意, 误差估计 (2.21) 依赖于 $|u|_{k+1}$, 其在解存在边界层或内层时很大. 因此, 需考虑局部误差估计 (local error estimate), 其中首个局部逐点误差估计在 [88] 中给出, 后续的结果参见 [110, 157]; 此外, [157] 中讨论了结构网格下的最优 L^2 收敛阶, 类似的结果也体现在其他稳定化方法中 [124]. 流线扩散型方法的 hp 版本及误差分析参见 [73].

2. 最小二乘有限元 (GLSFEM). 给出两种范数定义

$$\|v\|_{h,\varepsilon} := \|v\|_{\text{GLS}} := \left(\varepsilon|v|_1^2 + \|v\|_0^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \|\mathcal{L}v\|_{0,T}^2 \right)^{1/2},$$

$$\|v\|_{h,\varepsilon} := \|v\|_{\text{SDGLS}} := \left(\|v\|_{\text{SUPG}}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \|\gamma v - \varepsilon \Delta v\|_{0,T}^2 \right)^{1/2}.$$

只需要 δ_T 为正常数, 便可得到在 $\|\cdot\|_{\text{GLS}}$ 下的稳定性 (2.20). 另一方面, 当 δ_T 满足与流线扩散方法同样的条件时, 可得到在 $\|\cdot\|_{\text{SDGLS}}$ 下的稳定性; 进一步地, 当 $\delta_T = \delta_0 \frac{h_T}{\sqrt{1+(\varepsilon/h_T)^2}}$ 时 (其中 δ_0 为正常数), 可得到 $\|\cdot\|_{\text{SDGLS}}$ 下的拟最优误差估计 (2.21).

3. 残量自由泡函数稳定化 (RBF). 由于泡函数空间 B_h (见公式 (2.4)) 包含非多项式函数, 因此上面关于离散稳定性的讨论并不适用. 事实上, RBF 方法的稳定性 (2.20) 和误差估计 (2.21) 在连续层面的范数 $\|\cdot\|_{1,\varepsilon}$ 下就成立. 在 V_h 为线性元空间时, 相关分析参见 [22], 其揭示了范数中 $\varepsilon^{1/2}|\cdot|_1$ 项在 $V_h \oplus B_h$ 中可以控制对流项, 这个结果是非平凡的. 对于 V_h 为高阶元空间的分析参见 [24], 其证明采用了 Besov 空间的插值用来平衡扩散和对流项的正则性, 与 [22] 的技术本质不同.

4. 局部投影法 (LPS). 定义范数

$$\|v\|_{h,\varepsilon} := \|v\|_{\text{LPS}} := \left(\varepsilon|v|_1^2 + \|v\|_0^2 + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_M \|\kappa_h(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v)\|_{0,M}^2 \right)^{1/2}.$$

当 τ_M 非负时, 稳定性 (2.20) 成立; 假设离散空间满足逼近性和 (2.12), 当 $\tau_M \simeq h_M$ 时, 便可得到 (2.21). 其分析的核心步骤是构造一个与投影空间 D_h 正交且满足逼近性的插值算子 [106].

5. 连续内罚法 (CIP). 对于格式 (2.13), 定义范数

$$\|v\|_{h,\varepsilon} := \|v\|_{\text{CIP}} := \left(\varepsilon|v|_1^2 + \|v\|_0^2 + J_h(v, v) + \|\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}\|^{1/2} v|_{0,\Gamma}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}} \varepsilon h_F^{-1} \|v\|_{0,F}^2 \right)^{1/2}.$$

当 $\eta_F \geq \eta_0 > 0$ 且 η_0 充分大时, 可以获得稳定性 (2.20); 并且当 $\tau_F \simeq h_F^2$ 时, 可得到 $\|\cdot\|_{\text{CIP}}$ 下的拟最优误差估计 (2.21). 对于更一般情况的 CIP 估计参见 [30].

6. 间断 Galerkin (DG). 对于格式 (2.17), 定义范数

$$\|v\|_{h,\varepsilon} := \|v\|_{\text{DG}} := \left(\varepsilon \|v\|_1^2 + \|v\|_0^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \|\beta \cdot \mathbf{n}\|^{1/2} \llbracket v \rrbracket \|_{0,F}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \varepsilon h_F^{-1} \|\llbracket v \rrbracket\|_{0,F}^2 \right)^{1/2}.$$

当格式中权重满足迎风条件, 并且 $\eta_F \geq \eta_0 > 0$ 且 η_0 充分大时, 可以获得 $\|\cdot\|_{\text{DG}}$ 下的稳定性 (2.20) 及拟最优误差估计 (2.21). 进一步地, 可以通过在测试函数中乘以特殊指数型函数的方式, 获得离散格式的极小 - 极大条件 (该条件是稳定性的充要条件). 利用这种技巧, 假设 2.1 可以放松到 $\gamma - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \geq 0$, 具体分析参见 [7]. DG 方法相关的逐点误差估计和局部误差估计参见 [69, 90].

2.5 间断 Galerkin 方法在向量对流扩散问题中的进展

需要注意, 上述方法的研究对象为标量对流扩散方程 (1.1). 其稳定化方法的设计与分析, 很大程度上依赖于对方程中对流形式的理解. 近年来, 对流扩散模型在电磁场等向量场问题中也有着愈发重要的应用 [70]. 由于向量场下对流项的数学形式和结构更加复杂, 相关研究工作亟需展开. Heumann 与 Hiptmair 将一类特殊的迎风方法成功应用于向量场纯对流方程 [71]. 本小节将基于作者最近的工作 [147], 介绍 (向量型) 磁对流扩散问题中的 DG 方法.

为了简单起见, 考虑如下磁对流问题:

$$\begin{cases} \nabla \times (\varepsilon \nabla \times \mathbf{u}) - \underbrace{\beta \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \nabla(\beta \cdot \mathbf{u})}_{:= L_\beta \mathbf{u}, \text{称为李导数}} + \gamma \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{u} + \chi_{\Gamma^-} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{在 } \Gamma \text{ 上.} \end{cases} \quad (2.22)$$

该模型可以模拟导电流体在稳态流场下的电磁场 [66, 71], 其中 \mathbf{u} 代表磁矢势 (magnetic potential). 类比于假设 2.1, 问题的适定性可以在如下假设下成立, 该假设可以看作是 Friedrichs 对称算子理论 [57, 63, 71] 的一个特例和推广.

假设 2.2 (Friedrichs 条件) 存在常数 ρ_0 满足

$$\rho(\mathbf{x}) := \lambda_{\min} \left[\left(\gamma - \frac{\nabla \cdot \beta}{2} \right) I + \frac{\nabla \beta + (\nabla \beta)^T}{2} \right] \geq \rho_0 > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.23)$$

需要注意的是, 与标量情形 DG 方法类似, 可以通过在测试函数中取特殊的指数函数, 将假设 2.2 中的条件放松到 $\rho_0 \geq 0$, 具体分析参见 [147]. 对于向量型问题的 DG 方法, 其函数值跳跃可分为切向与法向部分, 这两部分在格式设计中将起到不同的作用. 具体的说, 对于 $F \in \mathcal{F}_h^0$, 定义

$$\llbracket \mathbf{v} \rrbracket_t := \mathbf{n}^+ \times \mathbf{v}^+ + \mathbf{n}^- \times \mathbf{v}^-, \quad \llbracket \mathbf{v} \rrbracket_n := \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n}^-.$$

引入通量 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) := \varepsilon \nabla \times \mathbf{u} - \beta \times \mathbf{u}$, 我们将 (2.22) 写成

$$\nabla \times \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \beta (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \left[(\gamma - \nabla \cdot \beta) I + \nabla \beta + (\nabla \beta)^T \right] \mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

形式上看, 连续问题需要保持通量 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ 的切向连续, 并且由于 $\nabla \times \mathbf{u}$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ 的出现, 应保持 \mathbf{u} 的法向和切向连续, 即在每个区域内部面 $F \in \mathcal{F}_h^0$ 上

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_t = \mathbf{0}, \quad \llbracket \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \rrbracket_t = \mathbf{0}, \quad \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n = 0.$$

同时, 单元内部应满足方程, 区域边界应满足边界条件. 遵循着 2.3 节介绍的加权残量方法思路, 引入权重算子 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1^D$, 可得到如下变分形式: 寻找 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$, 使得对于任意 $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ 满足

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\nabla_h \times (\varepsilon \nabla_h \times \mathbf{u}_h) + L_{\beta, h} \mathbf{u}_h + \gamma \mathbf{u}_h - \mathbf{f}] \cdot \mathbf{v}_h \\ & + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^0} \int_F [[\mathbf{u}_h]]_t \cdot \mathcal{B}_1 \mathbf{v}_h + [[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)]]_t \cdot \mathcal{B}_2 \mathbf{v}_h + [\mathbf{u}_h]_n \mathcal{B}_3 \mathbf{v}_h \\ & + \sum_{F \in \mathcal{F}_{h, D}^{\partial}} \int_F [\mathbf{n} \times \mathbf{u}_h + \chi_{\Gamma^-} (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] \cdot \mathcal{B}_1^D \mathbf{v}_h = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

其中 $\nabla_h \times$ 与 $L_{\beta, h}$ 分别代表逐个单元计算旋度和李导数, \mathbf{V}_h 一般取为向量值分片 k 次多项式 DG 空间. 与标量格式相同的是, (2.24) 同样有天然的相容性. 不同形式的 \mathcal{B} 对应与不同形式的 DG 格式. 我们在 [147] 中给出了如下一般选取方式:

$$\mathcal{B}_1 \mathbf{v} = \underbrace{\varepsilon \eta_F h_F^{-1} [[\mathbf{v}]]_t}_{\mathcal{B}_{11} \mathbf{v}} - \theta \underbrace{\{ \{ \varepsilon \nabla_h \times \mathbf{v} \}_{\alpha_d} - \{ \{ \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{v} \}_{\alpha_d} + \{ \{ \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{v} \}_{\alpha} \}}_{\mathcal{B}_{12} \mathbf{v}}, \quad (2.25a)$$

$$\mathcal{B}_2 \mathbf{v} = -\{ \{ \mathbf{v} \}_{1-\alpha_d}, \quad (2.25b)$$

$$\mathcal{B}_3 \mathbf{v} = -\{ \{ \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v} \}_{1-\alpha} + \tau_F |[\alpha - \alpha_d]| [\mathbf{v}]_n, \quad (2.25c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1^D \mathbf{v} &= \underbrace{\varepsilon \eta_F h_F^{-1} \mathbf{n} \times \mathbf{v} - \theta [\mathbf{n} \times (\varepsilon \nabla_h \times \mathbf{v})] \times \mathbf{n}}_{\mathcal{B}_{11}^D \mathbf{v}} \\ &\quad - \underbrace{(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) [\mathbf{n} \times \mathbf{v} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n}] \chi_{\Gamma^-}}_{\mathcal{B}_{12}^D \mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (2.25d)$$

这里, 参数 $\theta \in [-1, 1]$ 为内罚型 DG 控制扩散项处理方式的参数: $\theta = 1$ 为对称型; $\theta = -1$ 为非对称型; $\theta = 0$ 为中性型. 正常数 τ_F 和 η_F 在格式中的作用有本质不同: 前者对解的切向连续性进行内罚, 因而需要假设充分大; 后者对解的法向连续性进行稳定化, 因而只需为 $\mathcal{O}(1)$ 的正常数.

α 和 α_d 为加权平均的广义权重, 并且 α 满足迎风条件, 即 $\boldsymbol{\beta} \cdot [\alpha] > 0$. 然而, 广义权重 α_d 不需要满足迎风条件, 这是因为在分析中当取 $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ 时, 包含 α_d 的跳跃项会相互抵消, 这种机制是向量值问题所特有的.

对于格式 (2.24), 其稳定性可以在如下范数下成立:

$$\|\mathbf{v}\|^2 := \|\mathbf{v}\|_d^2 + \|\mathbf{v}\|_{rc}^2, \quad (2.26)$$

其中

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_d^2 &:= \varepsilon \|\nabla_h \times \mathbf{v}\|_{0, \Omega}^2 + \varepsilon \|\mathbf{v}\|_t^2 := \varepsilon \|\nabla_h \times \mathbf{v}\|_{0, \Omega}^2 + \varepsilon \sum_{F \in \Gamma} h_F^{-1} \|[[\mathbf{v}]]_t\|_{0, F}^2, \\ \|\mathbf{v}\|_{rc}^2 &:= \|\bar{\rho}^{1/2} \mathbf{v}\|_{0, \Omega}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \| |\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}|^{1/2} [[\mathbf{v}]]_F \|_{0, F}^2 + \|\mathbf{v}\|_n^2, \\ \|\mathbf{v}\|_n^2 &:= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^0} |[\alpha - \alpha_d]| \|[\mathbf{v}]_n\|_{0, F}^2, \end{aligned}$$

这里 $\bar{\rho}(x)$ 为如下定义的分片常数函数 $\bar{\rho}(x)|_T := \bar{\rho}|_T := \min_{x \in T} \rho(x)$. 我们仍然可以得到类似于 (2.21) 的误差估计结果 [147], 即存在不依赖于 ε 和网格尺度 h 的常数 $C > 0$ 和网格尺度 h_0 , 满足当 $h < h_0$

时,

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \| \leq Ch^k (\varepsilon^{1/2} + h^{1/2}) |\mathbf{u}|_{k+1, \Omega}. \quad (2.27)$$

最近, 我们在 [148] 中给出了 (2.22) 的一种可杂交化 DG 方法, 并获得了类似的误差估计结果.

3 指数拟合方法

上一节介绍的迎风型方法, 其估计中的右端项往往依赖于真解的高阶导数, 当边界层存在时, 真解的高阶导数随着扩散系数 $\varepsilon \rightarrow 0$ 而趋于无穷. 为此, 对于数值格式引入 ε -一致性的概念: 称格式关于范数 $\| \cdot \|$ 是 k 阶一致收敛的, 如果存在一个不依赖于 ε 和网格尺度 h 的常数 C 和网格尺度 h_0 , 使得当 $h < h_0$ 时,

$$\| u - u_h \| \leq Ch^k. \quad (3.1)$$

这里, $\| \cdot \|$ 在差分格式中往往取为离散无穷模 $\| \cdot \|_{\infty, d}$, 即节点处最大绝对值; 在有限元格式中也可取为 $\| \cdot \|_{\infty}$ 或能量模 $\| \cdot \|_{\varepsilon}$. 由于对流扩散方程的解析解可能会出现指数型边界层, 因此传统的有限元多项式逼近空间无法获得 ε -一致收敛.

即使是考虑离散无穷模 $\| \cdot \|_{\infty, d}$ 下的 ε -一致收敛性, 也需要将指数函数的信息加入到格式设计中. 例如, 一维情形下的 I'in-Allen-Southwell 格式 [49, 82], 将差分离散格式中二阶差分添加一些与对流项相关的特殊指数权重,

$$\rho_i \coth(\rho_i) \varepsilon \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} + \beta_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \gamma_i u_i = f_i, \quad (3.2)$$

其中 $\rho_i = \frac{\beta_i h}{2\varepsilon}$, $\beta_i := \beta(x_i)$, h 为均匀网格尺度. 该格式在对流项为常数时, 得到的差分解在网格节点处与真解完全相同. 进一步, Kellog 和 Tsan 基于离散极大值原理, 给出了一般的非零对流项下此类差分方法在离散无穷模 $\| \cdot \|_{\infty, d}$ 下的估计 [91], 并指出其是一阶 ε -一致收敛的. 文献 [59] 指出系数接近于 (3.2) 的数值格式也可以保持 ε -一致收敛, 并给出了 ε -一致收敛的一个充分条件. 在差分的意义下, 也可以通过近似离散 Green 函数得到格式 (3.2), 更多的 ε -一致收敛差分格式参见 [118] 的 I.2.1.3-I.2.1.4 节. 许多指数拟合格式的设计方法在一维情形都对应于 I'in-Allen-Southwell 格式 (3.2), 参见 [119].

在有限元框架下, 关于如何设计离散格式使其能够捕捉并还原出边界层的指数型函数, 或者在某种程度上对指数类函数能够达到较好的拟合效果, 有着大量丰富的文献研究. 拟均匀网格下的指数拟合方法可以分为两类: 一类是构造特殊的有限元空间, 使其包含指数型基函数, 从而可以在函数空间的层面捕捉和近似边界层; 另一类方法则是从离散格式 (变形式) 入手, 仍使用传统有限元空间, 基于对流扩散算子的一个内蕴恒等式和指数拟合思想设计出一类特殊的离散格式.

3.1 指数拟合样条基: 一维情形

本小节先考虑 (1.1) 在一维时的情况, 即 $-\varepsilon u'' + \beta(x)u' + \gamma(x)u = f(x)$. 这里假设对流速度不变号, 并且双线性型满足能量范数下的强制性, 即

$$\beta(x) \geq \beta_0 > 0, \quad \text{且} \quad \gamma(x) - \frac{1}{2}\beta'(x) \geq \gamma_0 > 0.$$

其中, 正常数 β_0 和 γ_0 与 ε 无关. 注意到这里速度不变号是本质假设, 后者可以在速度不变号假设下对 u 乘以适当的指数函数得到.

考虑 $\beta(x)$ 为常数且 $\gamma(x) = 0$ 的情况, 此时 \mathcal{L} - 样条基函数 φ_i 定义为

$$-\varepsilon\varphi_i'' + \beta\varphi_i' = 0 \quad \text{在每个网格单元上, 且} \quad \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (3.3)$$

即 φ_i 为 x_i 处的样条基函数. 记 V_h 为 φ_i 张成的样条有限元空间. 将 u 在 V_h 上的节点插值函数记为 u^I , 即 $(u - u^I)(x_i) = 0$. 在每个单元内通过比较原理和局部强制性, 容易证明如下插值估计

$$\|u - u^I\|_\infty \leq Ch, \quad \|u - u^I\|_\varepsilon \leq Ch^{1/2}. \quad (3.4)$$

能量模下 ε - 一致收敛性. 样条有限元空间 V_h 下的 Galerkin 有限元方法为: 寻找 $u_h \in V_h$, 使得对于任意 $v_h \in V_h$ 满足 $a(u_h, v_h) = (f, v_h)$. 利用双线性型的强制性和 Galerkin 正交性, 可得

$$\alpha\|u - u_h\|_\varepsilon^2 \leq a(u - u_h, u - u^I) = \varepsilon((u - u_h)', (u - u^I)') + (\beta(u - u_h)', u - u^I).$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned} \varepsilon((u - u_h)', (u - u^I)') &\leq \frac{\alpha}{4}\|u - u_h\|_\varepsilon^2 + C(\alpha)\|u - u^I\|_\varepsilon^2, \\ |(\beta(u - u_h)', u - u^I)| &= |(\beta(u^I - u_h)', u - u^I)| \leq C\|(u^I - u_h)'\|_{L^1}\|u - u^I\|_\infty \\ &\leq Ch^{-1/2}\varepsilon^{1/2}\|u^I - u_h\|_1\|u - u^I\|_\infty \\ &\leq \frac{\alpha}{4}\varepsilon\|u - u_h\|_1^2 + C\varepsilon\|u - u^I\|_1^2 + C(\alpha)h^{-1}\|u - u^I\|_\infty^2. \end{aligned}$$

这里, 对流项的估计用到了 \mathcal{L} - 样条有限元函数的 L^1 估计 $\|v_h'\|_{L^1} \leq Ch^{-1/2}\varepsilon^{1/2}\|v_h'\|_{L^2}$, 参见 [113, 138]. 将上述结果结合插值估计 (3.4), 便可得到 $\|u - u_h\|_\varepsilon \leq Ch^{1/2}$, 并且该估计是最优的.

对于变系数 $\beta(x)$ 和非零 $\gamma(x)$, 可对其做分片常数近似, 记为 $\bar{\beta}, \bar{\gamma}$, 由此得到 $\bar{\mathcal{L}}$ - 样条基函数

$$-\varepsilon\varphi_i'' + \bar{\beta}\varphi_i' + \bar{\gamma}\varphi_i = 0 \quad \text{在每个网格单元上, 且} \quad \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}. \quad (3.5)$$

由此, 可在相应的 $\bar{\mathcal{L}}$ - 样条有限元空间下进行标准的 Galerkin 有限元方法. 另一种样条基的构造中不考虑常数项, 即在每个网格单元上满足 $-\varepsilon\varphi_i'' + \bar{\beta}\varphi_i' = 0$, 称为不完全 (指数拟合) 样条基. 相应的, 离散双线性型中需要对常数项做质量集中 (mass lumping). 以上两种方法都可以得到能量模下半阶 ε - 一致收敛性 [138].

最大模下 ε - 一致收敛性. 由于最大模估计中不需要利用强制性, 因此离散问题的试探空间与测试空间可取不同 (即 Petrov-Galerkin 方法), 分别记为 V_h 与 W_h . 在给定离散双线性型 $a_h(u, v) := (\varepsilon u', v') + (\bar{\beta}u', v) + (\bar{\gamma}u, v)$ 后, 定义网格点 x_j 处的离散 Green 函数 G_j 满足

$$a_h(w, G_j) = w(x_j) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

为了让测试空间 W_h 包含离散 Green 函数, 需要其包含 $\bar{\mathcal{L}}^*$ - 样条基函数 ψ_i [137], 即

$$-\varepsilon\psi_i'' - \bar{\beta}\psi_i' + \bar{\gamma}\psi_i = 0 \quad \text{在每个网格单元上, 且} \quad \psi_i(x_j) = \delta_{ij}. \quad (3.6)$$

此时, 对于数值格式 $a_h(u_h, v_h) = (\bar{f}, v_h), \forall v_h \in W_h$, 可得

$$\begin{aligned} (u - u_h)(x_j) &= a_h(u - u_h, G_j) = (a_h - a)(u, G_j) + (f - \bar{f}, G_j) \\ &= (f - \bar{f}, G_j) + (u', (\bar{\beta} - \beta)G_j) + (u, (\bar{\gamma} - \gamma)G_j). \end{aligned}$$

由 u 的先验估计和离散 Green 函数的一致有界性, 可得 $\|u - u_h\|_{\infty, d} \leq Ch$.

事实上, 如果用 $\bar{\mathcal{L}}^*$ - 样条有限元空间作为测试空间, 离散代数系统与试探空间 V_h 选取无关. 类似的, 如果用 $\bar{\mathcal{L}}$ - 样条有限元空间作为试探空间, 离散代数系统与测试空间 W_h 选取无关. 我们用 (V_h, W_h) 表示试探与测试空间对, 用 “ \Leftrightarrow ” 表示离散系统相同, 于是有

$$(\bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{L}}) \Leftrightarrow (\bar{\mathcal{L}}, \cdot) \Leftrightarrow (\bar{\mathcal{L}}, \bar{\mathcal{L}}^*) \Leftrightarrow (\cdot, \bar{\mathcal{L}}^*) \Leftrightarrow (\bar{\mathcal{L}}^*, \bar{\mathcal{L}}^*),$$

其中 $\bar{\mathcal{L}}$ - 样条有限元空间简记为 $\bar{\mathcal{L}}$ (类似地, $\bar{\mathcal{L}}^*$ - 样条有限元空间简记为 $\bar{\mathcal{L}}^*$). 作为该等价性的一个直接推论, 在 $\bar{\mathcal{L}}$ - 样条有限元空间下, Galerkin 有限元方法也满足 $\|u - u_h\|_{\infty, d} \leq Ch$. 事实上, 由于 $\bar{\mathcal{L}}$ - 样条函数包含指数函数信息, 利用离散最大模估计和比较原理, 可以证明在连续的无穷模范数下的一阶 ε - 一致收敛性 [137], 即 $\|u - u_h\|_{\infty} \leq Ch$.

由于真解只在边界层内部有指数函数表现, 因此只在边界层内采用样条函数 ($\bar{\mathcal{L}}$ - 样条试探函数, $\bar{\mathcal{L}}^*$ - 样条测试函数), 在外部采用分片线性函数, 仍然可以得到满意的结果 [138].

3.2 指数拟合样条基: 高维情形

对于更高维度的问题, 根据上面的讨论结果, 指数型样条有限元空间的基本思想在于构造满足对流扩散算子 $\mathcal{L}u = -\varepsilon\Delta u + \beta \cdot \nabla u + \gamma u$ 作用后 (近似) 为零的函数作为基函数. 这里仍然假设速度不变号, 即 $\beta = (\beta^1(\mathbf{x}), \dots, \beta^n(\mathbf{x}))^T \geq (\beta_0^1, \dots, \beta_0^n)^T$, 其中 $\beta_0^i (i = 1, \dots, n)$ 为正常数. 同样地, 该假设在指数变换的作用下可推出强制性.

结构网格指数拟合样条. 为了简单, 这里以二维为例. 在矩形网格下, 网格单元边与坐标轴平行, 因此可以将对流扩散算子限制在每个维度, 得到一维问题. 下面以 $\gamma = 0$ 时的 (近似) \mathcal{L} - 样条有限元空间的构造来说明该思想.

记单元 $K^{i,j} := (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$, 其 (下、右、上、左) 四条边分别为 $E_{i+\frac{1}{2}, j} := (x_i, x_{i+1}) \times \{y_j\}$, $E_{i+1, j+\frac{1}{2}} := \{x_{i+1}\} \times (y_j, y_{j+1})$, $E_{i+\frac{1}{2}, j+1} := (x_i, x_{i+1}) \times \{y_{j+1}\}$, $E_{i, j+\frac{1}{2}} := \{x_i\} \times (y_j, y_{j+1})$. 此时, 可以在每条边上对速度分量进行常数近似, 即

$$\bar{\beta}_{i+\frac{1}{2}, j}^1 \approx \beta^1(\mathbf{x})|_{E_{i+\frac{1}{2}, j}}, \quad \bar{\beta}_{i, j+\frac{1}{2}}^2 \approx \beta^2(\mathbf{x})|_{E_{i, j+\frac{1}{2}}}.$$

注意到这种分片常数近似只在边上进行, 因而跨过单元是不变的. $\bar{\beta}$ 的选取不是唯一的, 可以取边中点函数值, 或者左右端点平均值. 定义 $\phi_{i,j}^1(x)$ 和 $\phi_{i,j}^2(y)$ 分别为 x 和 y 方向边上的 $\bar{\mathcal{L}}$ - 样条基函数, 即

$$\begin{aligned} -\varepsilon(\phi_{i,j}^1)'' + \bar{\beta}^1(\phi_{i,j}^1)' &= 0 \text{ 在每条横边 } E_{\ell+\frac{1}{2}, j} \text{ 上, 且 } \phi_{i,j}^1(x_k) = \delta_{ik}, \\ -\varepsilon(\phi_{i,j}^2)'' + \bar{\beta}^2(\phi_{i,j}^2)' &= 0 \text{ 在每条竖边 } E_{i, \ell+\frac{1}{2}} \text{ 上, 且 } \phi_{i,j}^2(y_\ell) = \delta_{j\ell}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

于是, 节点 (x_i, y_j) 处的样条基函数定义为 $\phi_{i,j}(x, y) := \phi_{i,j}^1(x)\phi_{i,j}^2(y)$, 其张成的有限元空间 V_h 是 H^1 协调的. 当 $K^{i,j}$ 单元对边上的速度分量的常数近似相同, 即 $\bar{\beta}_{i+\frac{1}{2}, j}^1 = \bar{\beta}_{i+\frac{1}{2}, j+1}^1$ 且 $\bar{\beta}_{i, j+\frac{1}{2}}^2 = \bar{\beta}_{i+1, j+\frac{1}{2}}^2$ 时, 可将其延拓到 $K^{i,j}$ 上, 即 $\bar{\beta}|_{K^{i,j}} = (\bar{\beta}_{i+\frac{1}{2}, j}^1, \bar{\beta}_{i, j+\frac{1}{2}}^2)^T$. 此时, 由于样条基函数有变量分离的形式, 容

易看出 $\bar{\mathcal{L}}\phi_{i,j}|_{K^{i,j}} = 0$, 即满足 $\bar{\mathcal{L}}$ -样条基函数条件. 对于任意维度的矩形网格, 仍可按照这种思路, 将每个一维边上的指数拟合样条基函数相乘得到高维样条基函数. 总结起来, 这种定义方式可以天然保持空间的 H^1 协调性, 但是在一般的速度场下无法在单元上严格满足 $\bar{\mathcal{L}}$ -样条性质.

另一种思路是在单元上定义速度场的分片常数近似 $\bar{\beta}$. 例如, 二维情形可以定义 $\bar{\beta}|_{K^{i,j}} := \frac{1}{4}(\beta(x_i, y_j) + \beta(x_{i+1}, y_j) + \beta(x_{i+1}, y_{j+1}) + \beta(x_i, y_{j+1}))$. 此时, 在单元 $K^{i,j}$ 内可以定义四个基函数 $\phi_{k,\ell}|_{K^{i,j}} := \phi_k^1|_{K^{i,j}}(x)\phi_\ell^2|_{K^{i,j}}(y)$, 其中 $k = i$ 或 $i+1$, $\ell = j$ 或 $j+1$, 分别对应于四个顶点 (x_k, y_ℓ) . 这里, $\phi_k^1|_{K^{i,j}}$ 和 $\phi_\ell^2|_{K^{i,j}}$ 由单元速度 $\bar{\beta}|_{K^{i,j}}$ 的分量给出, 即

$$\begin{aligned} -\varepsilon(\phi_k^1|_{K^{i,j}})'' + \bar{\beta}^1|_{K^{i,j}}(\phi_k^1|_{K^{i,j}})' &= 0 \text{ 在单元 } x \text{ 方向, 且 } \phi_k^1|_{K^{i,j}}(x_{\tilde{i}}) = \delta_{\tilde{i}k}, \text{ 其中 } \tilde{i} = i, i+1, \\ -\varepsilon(\phi_\ell^2|_{K^{i,j}})'' + \bar{\beta}^2|_{K^{i,j}}(\phi_\ell^2|_{K^{i,j}})' &= 0 \text{ 在单元 } y \text{ 方向, 且 } \phi_\ell^2|_{K^{i,j}}(y_{\tilde{j}}) = \delta_{\tilde{j}\ell}, \text{ 其中 } \tilde{j} = j, j+1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

因此, $\phi_{i,j}$ 的支集为其相邻的四个矩形单元, 其函数值在每个单元中由 (3.8) 给出. 容易看出, 该方法可以推广到任意维度的矩形网格. 相较于前一种方法, 该方法的出发点是从速度场的单元分片常数近似, 因此可以天然保持单元上 $\bar{\mathcal{L}}$ -样条性质. 但是对于一般的速度场, 由于 $\bar{\beta}$ 在不同单元时可能不同, 因此样条基函数在跨过单元时不一定连续, 导致空间非协调.

对于特殊情形, $\beta^1 = \beta^1(x)$ 和 $\beta^2 = \beta^2(y)$, 上述两种构造是等价的. 此时, 样条有限元空间 V_h 是协调的, 并且满足单元上 $\bar{\mathcal{L}}$ -样条性质. 类似于一维情形, 仍可以到能量模下 ε -一致收敛性 $\|u - u_h\|_\varepsilon \leq Ch^{1/2}$, 并且该估计是最优的 [113].

对于一般情形的对流速度, 文献 [120] 设计了非协调 $\bar{\mathcal{L}}$ -样条有限元空间 (3.8) 下的数值格式, 通过估计相容性误差, 同样得到了在一定条件下, 能量误差的半阶 ε -一致收敛结果. Dörfler 基于一些基本假设建立了一个分析框架, 给出了协调和非协调的张量样条有限元空间下, L^p 范数和 L^p 能量范数 ($p \in [2, \infty)$) 的先验分析和 ε -一致收敛结果 [52, 53].

非结构网格: 通量线性近似. 上述基函数的构造方式仅限于结构网格, 其方法无法直接推广到非结构网格上. 一般来说, 在非结构网格上解析获得 \mathcal{L} -样条函数往往是不现实的, 需要对问题进行一些近似. 仍然以二维三角形 T 为例, 如果假设速度场 β 在单元 T 内是常数且 $\gamma = 0$, 算子有如下形式:

$$\mathcal{L}u = -\nabla \cdot \mathbf{J}(u), \text{ 其中 } \mathbf{J}(u) := \varepsilon \nabla u - \beta u := \varepsilon(\nabla u - \nabla \psi u) = \varepsilon e^\psi \nabla(e^{-\psi} u), \quad (3.9)$$

其中 $\psi = \beta \cdot \mathbf{x} / \varepsilon$. 注意到, 通量 $\mathbf{J}(u)$ 仅仅是散度自由的, 无法直接推导出 u 满足的性质. 在 [127, 128] 中, 额外假设通量 $\mathbf{J}(u)$ 为线性函数, 可以推导出 u 属于如下空间:

$$\text{span}\{1, e^{\beta \cdot \mathbf{x} / \varepsilon}, \beta \times \mathbf{x}\}, \text{ 其中二维情况下 } \beta \times \mathbf{x} := \beta_1 x_2 - \beta_2 x_1.$$

给定单元自由度为三个顶点值, 便可以在上述空间内解出唯一的基函数, 但是整体的有限元空间是非协调的. 该方法比较直接地引入指数函数, 在数值上同样表现良好.

非结构网格: 逐点低维限制近似. 注意到对流扩散方程的解析解在一维时容易得到, Wang 在 [149] 中基于低维限制的思想, 构造了一类单纯形网格下的近似指数拟合的协调基函数. 该方法旨在给出基函数在每个内部点处的函数值. 仍然以二维三角形为例, 并假设 $\gamma = 0$, 将未知量设为基函数在单元内任意点 \mathbf{x}_0 的值和通量值 (3.9), 即 (ϕ_0, \mathbf{J}_0) .

记顶点 \mathbf{x}_m ($m = 1, 2, 3$) 到 \mathbf{x}_0 的向量为 \mathbf{l}_m , 其单位方向为 $\mathbf{e}_m = \frac{\mathbf{l}_m}{|\mathbf{l}_m|}$ (见图 1). 于是, 对流扩散算子限制在 \mathbf{l}_m 上将得到限制后的一维问题, 由 (3.9) 便可以按照如下步骤推导出 (ϕ_0, \mathbf{J}_0) 应满足的三个方程.

步骤一: 将算子 \mathcal{L} 限制在低维线 l_m ($m = 1, 2, 3$) 上, 得到:

$$\mathbf{e}_m \cdot \varepsilon e^\psi \nabla(e^{-\psi} \phi_0)|_{l_m} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{J}_0.$$

步骤二: 在一维线 l_m 上积分, 得到 $m = 1, 2, 3$ 时的三个方程:

$$e^{-\psi_m} \phi_m - e^{-\psi_0} \phi_0 = \varepsilon^{-1} \int_{l_m} e^{-\psi} ds (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{J}_0). \quad (3.10)$$

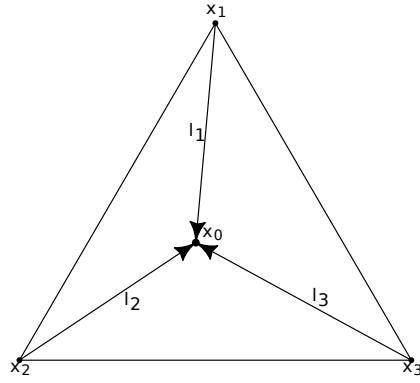


图 1 逐点低维逼近示意图.

如果将自由度定义为顶点函数值, 则基函数值 ϕ_m 已知, $\psi_m = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}_m / \varepsilon$, 联立 (3.10) 的三个方程便可求解出 (ϕ_0, \mathbf{J}_0) . 当 x_0 遍历过单元内所有点时, 便可以获得基函数全部的函数值信息. 在 [150] 中通过一维 Bernoulli 函数给出基函数在每个点处的显式表达式, 分析了该基函数的一些基本性质, 并给出相应的数值格式的收敛分析. 这种逐点低维限制近似的想法适用于任意维度的单纯形网格 [5].

对偶网格: 盒子指数函数空间. 在原始网格和对偶网格上分别设计离散空间, 是有限体积法常用的技术. 有限体积方法与有限元方法的离散系统有紧密联系, 特别是在最低价格格式时. 对于对流扩散问题, 一种常见的处理方法是扩散部分应用有限元方法, 对流部分应用 (基于对偶网格的) 有限体积方法. 另一种常用的方法是盒子方法, 也被称为 Scharfetter-Gummel 方法 [11, 129], 其在半导体器件模拟中有着非常广泛的应用 [25, 36]. 该思想可以应用于对偶网格上指数拟合空间的构造. 事实上, 基于 Delaunary 对偶网格, 文献 [107] 给出了一种分片指数基的构造. 其核心仍然是将 \mathcal{L} 限制在原始网格一维边上得到边上的指数函数, 随后将该指数函数沿着边的法向延拓到某个二维“盒子”上 (盒子的构造用到对偶网格信息). 由此看出, 该方法是一种指数拟合的盒子方法, 其分析同样可以应用于其他该类型的数值格式. 通过一种特殊的依赖网格的范数, 该方法的稳定性是 ε -一致的, 然而 ε -一致的误差估计仍然是开放问题, 尽管其有很好的数值表现.

3.3 算子指数拟合

与构造指数型基函数不同, 算子指数拟合方法仍使用标准 (多项式) 有限元离散空间, 而将指数拟合思想应用于离散变分形式的设计. 在半导体器件模拟中, 速度场由电子势的梯度给出, 即 $\boldsymbol{\beta} = \nabla \tilde{\psi}$. 此时, 通量仍可写成 (3.9) 的形式, 即

$$\mathbf{J}(u) = \varepsilon \nabla u - \boldsymbol{\beta} u = \varepsilon e^{\tilde{\psi}/\varepsilon} \nabla (e^{-\tilde{\psi}/\varepsilon} u). \quad (3.11)$$

利用该形式, Brezzi 等在 [26] 中提出了一种指数拟合方法, 其主要想法分为如下三步: (i) 变量替换 $u = \rho e^{\tilde{\psi}/\varepsilon}$; (ii) 对于 ρ 满足的方程进行离散, 并且在格式设计引入指数函数平均; (iii) 将关于 ρ 的离散系统变换回关于原始变量 u 的离散系统. 在第二步中, 可以采用传统的混合有限元方法或杂化有限元方法等, 该算法框架可以在没有添加任何稳定化项的情况下实现自然的迎风效应.

在很多情况下, 通量 $\mathbf{J}(u)$ 的变化是很温和的. 基于该发现, 文献 [105] 设计了一种基于通量分片常数的近似的数值方法, 应用于数值求解二阶自伴椭圆问题. Xu 和 Zikatanov 结合了通量形式 (3.9)

和通量分片常数近似的思想, 提出了一种新型有限元方法求解标量对流扩散方程, 该方法被称为边平均有限元方法 (*Edge-Averaged Finite Element, EAFE*)^[153]. 该格式采用传统的分片线性 Lagrange 元空间, 在较弱的网格条件下可保证其单调性 (即离散矩阵为 M- 矩阵). 将对流扩散算子整体处理, 利用通量的形式 (3.9) 将指数信息用于离散格式的设计中, 这种思想在 Angermann 的一系列文章 [2–4] 以及 Bank 等的文章 [12] 中得到了体现. EAFE 格式在各项异性扩散系数中的推广参见 [96], 时空离散的推广参见 [13].

广义对流扩散问题的单纯形平均有限元方法. 上述算子指数拟合方法的研究对象为标量对流扩散问题 (1.1), 即 $H(\text{grad})$ 对流扩散问题. 本节将基于作者最近的工作 [151], 介绍 (向量型) 磁对流扩散问题的算子指数拟合方法. 为了简单起见且前后符号相容, 这里考虑的模式问题为如下 $\mathbf{H}(\text{curl})$ 对流扩散问题

$$\begin{cases} \nabla \times (\varepsilon \nabla \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{u}) + \gamma \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \end{cases} \quad (3.12)$$

以及如下的 $\mathbf{H}(\text{div})$ 对流扩散问题

$$\begin{cases} -\nabla(\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}) + \gamma \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (3.13)$$

在 $\mathbf{H}(\text{curl})$ 对流扩散方程中, \mathbf{u} 代表电场, 其与 (2.22) 中的变量含义不同, 因而方程形式不同.

算子拟合的核心想法之一就是将对流算子与扩散算子统一处理. 类比于 (3.9), 对于速度场进行常数假设后, 有如下恒等式:

$$\text{对于 } H(\text{grad}) \text{ 问题: } \mathbf{J}(\mathbf{u}) := \varepsilon \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\beta} \mathbf{u} = \varepsilon e^\psi \nabla (e^{-\psi} \mathbf{u}), \quad (3.14a)$$

$$\text{对于 } H(\text{curl}) \text{ 问题: } \mathbf{J}(\mathbf{u}) := \varepsilon \nabla \times \mathbf{u} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{u} = \varepsilon e^\psi \nabla \times (e^{-\psi} \mathbf{u}), \quad (3.14b)$$

$$\text{对于 } H(\text{div}) \text{ 问题: } \mathbf{J}(\mathbf{u}) := \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u} = \varepsilon e^\psi \nabla \cdot (e^{-\psi} \mathbf{u}), \quad (3.14c)$$

其中 $\psi = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x} / \varepsilon$. 也就是说, 这三类数学形式不同的对流扩散算子存在一个内蕴恒等式:

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \varepsilon e^\psi \mathbf{D}(e^{-\psi} \mathbf{u}), \quad \mathbf{D} = \text{梯度}(\nabla), \text{旋度}(\nabla \times), \text{或散度}(\nabla \cdot). \quad (3.15)$$

基于最低阶传统有限元 (即 Lagrange 元, 第一类 Nédélec 元^[112], Raviart-Thomas 元^[116]), 我们在 [151] 给出了内蕴恒等式 (3.15) 的离散版本. 具体的说, 对于离散空间的函数 $u_h \in V_h$, 经过指数变换后 $e^{-\psi} u_h$ 不再存在于离散空间. 因此, 离散指数变换定义为 $\Pi_h e^{-\psi} : V_h \rightarrow V_h$, 其中 Π_h 为基于自由度的规范插值. 可以证明离散指数变换的算子逆存在, 因此得到如下 (离散) 公式:

$$(\text{数值}) \text{ 通量} = \varepsilon \cdot (\text{离散}) \text{ 指数逆变换} \cdot \text{标准微分算子} \cdot (\text{离散}) \text{ 指数变换}.$$

事实上, 数值通量的计算等价于在子单纯形上进行某种指数平均, 因此该方法称为单纯形平均有限元方法 (*Simplex-Averaged Finite Element, SAFE*).

SAFE 格式结合一些特殊的局部投影算子, 可以在标量情形下推导出 EAFE 格式. 从这个角度看, SAFE 格式是 EAFE 格式在向量对流扩散问题的自然推广. 基于指数平均的特性, 可以说明 SAFE 格

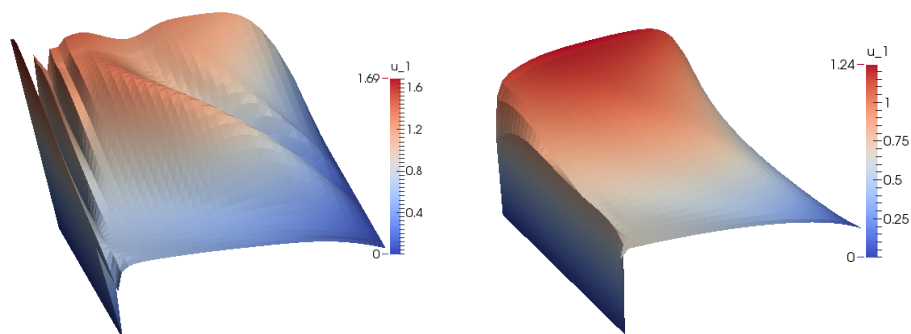


图 2 二维 $H(\text{div})$ 对流扩散问题: 传统有限元 (左) 与算子指数拟合有限元 (右) 的 u_1 分量比较.

式同样具有自然的迎风效应, 因而可以鲁棒地处理扩散系数接近零时问题带来的边界层效应. 该方法在数值上有着优异的表现 (见图 2), 并在 L^2 范数下具有与扩散系数一致的最优收敛阶. SAFE 格式的设计思路可用于其他离散类型 [4].

SAFE 格式中, 算子指数拟合的离散空间为最低阶有限元空间. 在随后的工作 [152] 中, 将其推广到高阶多项式空间. 根据离散通量的设计思路, 其核心是给出了离散指数变化在高阶空间下的可逆性. 对于算子指数拟合方法, 其 ε -一致的误差估计仍然是个开放问题. 由于极值原理等概念在向量场下不再适用, 因而向量场下格式的分析更加困难.

4 结语

对流扩散方程是描述多物理场耦合的基本模型之一, 其在各个工程领域中有着广泛的应用. 对于标量问题的稳定和高效数值方法, 一直是偏微分方程数值解领域的经典问题, 而电磁场等向量型对流扩散问题的数值方法近年来越来越受到重视. 本文以标量对流扩散问题为主要对象, 回顾了两大类稳定化方法, 着重于其在拟均匀网格下的稳定化机制, 并给出了相应的分析结果. 同时, 本文介绍了一些稳定化机制在向量型对流扩散问题中的拓展, 包括 DG 和算子指数拟合. 对于其他的稳定化机制是否能够推广到向量型问题中, 是一个值得思考和研究的课题方向.

现有的算法是复杂多物理场耦合模拟中的一个重要模块, 限于篇幅, 本文没有详细探讨如何将其融入到整体的格式设计中; 此外, 本文也没有涉及对流扩散问题的一些其他重要课题 (如自适应边界层网格、求解器、时间发展问题离散格式等), 有兴趣的读者可以阅读相关的参考文献. 相较于扩散问题, 由于对流与扩散的共同作用, 相应问题的稳定化离散格式和分析更加困难, 其在格式设计和稳定性、收敛性分析中还存在着许多开放问题, 需要深入地进一步研究.

致谢 感谢许进超教授长期以来的支持和帮助. 感谢在读博士王锦东、韩如冰在本文撰写过程中的帮助.

参考文献

- 1 Adler JH, Cavanaugh C, Hu X, Huang A, Trask N. A stable mimetic finite-difference method for convection-dominated diffusion equations. arXiv:2208.04169, 2022, doi: 10.48550/arXiv.2208.04169
- 2 Angermann L. Numerical solution of second-order elliptic equations on plane domains. ESAIM Math Model Numer Anal, 1991, 25(2): 169-191, doi: 10.1051/m2an/1991250201691
- 3 Angermann L. Addendum to the paper "Numerical solution of second-order equations on plane domains". ESAIM Math Model Numer Anal, 1993, 27(1): 1-7, doi: 10.1051/m2an/1993270100011
- 4 Angermann L. Error estimates for the finite-element solution of an elliptic singularly perturbed problem. IMA J Numer Anal, 1995, 15(2): 161-196, doi: 10.1093/imanum/15.2.161

- 5 Angermann L, Wang S. Multidimensional exponentially fitted simplicial finite elements for convection-diffusion equations with tensor-valued diffusion. *Calcolo*, 2005, 42: 71-91, doi: 10.1007/s10092-005-0098-9
- 6 Arnold D, Boffi D, Falk R. Approximation by quadrilateral finite elements. *Math Comp*, 2002, 71: 909-922, doi: 10.1090/S0025-5718-02-01439-4
- 7 Ayuso B, Marini LD. Discontinuous Galerkin methods for advection-diffusion-reaction problems. *SIAM J Numer Anal*, 2009, 47(2): 1391-420, doi: 10.1137/080719583
- 8 Baiocchi C, Brezzi F, Franca L. Virtual bubbles and Galerkin-least-squares type methods (Ga.L.S.). *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1993, 105: 125-141, doi: 10.1016/0045-7825(93)90119-I
- 9 Bakhvalov NS. Towards optimization of methods for solving boundary value problems in the presence of boundary layers. *Zh Vychisl Mat i Mat Fiz*, 1969, 9: 841-859.
- 10 Bank RE. A comparison of two multilevel iterative methods for nonsymmetric and indefinite elliptic finite element equations. *SIAM J Numer Anal*, 1981, 18(4): 724-743, doi: 10.1137/0718048
- 11 Bank RE, B ü rgler JF, Fichtner W, Smith RK. Some upwinding techniques for finite element approximations of convection-diffusion equations. *Numer Math*. 1990, 58(1): 185-202, doi: 10.1007/BF01385618
- 12 Bank RE, Coughran, Jr WM, Cowsar LC. The finite volume Scharfetter-Gummel method for steady convection diffusion equations. *Comput Vis Sci*, 1998, 1(3): 123-136, doi: 10.1007/s007910050012
- 13 Bank RE, Vassilevski PS, Zikatanov LT. Arbitrary dimension convection-diffusion schemes for space-time discretizations. *J Comput Appl Math*, 2017, 310: 19-31, doi: 10.1016/j.cam.2016.04.029
- 14 Becker R, Braack M. A finite element pressure gradient stabilization for the Stokes equations based on local projections. *Calcolo*, 2001, 38(4): 173-199, doi: 10.1007/S10092-001-8180-4
- 15 Becker R, Braack M. A two-level stabilization scheme for the Navier-Stokes equations. In M. Feistauer et al., editor, *Numerical mathematics and advanced applications*, Berlin, Springer- Verlag, 2004, 123-130, doi: 10.1007/978-3-642-18775-9_9
- 16 Becker R, Vexler B. Optimal control of the convection-diffusion equation using stabilized finite element methods. *Numer Math*, 2007, 106: 349-367, doi: 10.1007/s00211-007-0067-0
- 17 Bey J, Wittum G. Downwind numbering: A robust multigrid method for convection-diffusion problems on unstructured grids. *Fast Solvers for Flow Problems: Proceedings of the Tenth GAMM-Seminar Kiel*, January 14-16, 1994 1995 (pp. 63-73). Vieweg+ Teubner Verlag.
- 18 Braack M, Burman E. Local projection stabilization for the Oseen problem and its interpretation as a variational multiscale method. *SIAM J Numer Anal*, 2006, 43: 2544-2566, doi: 10.1137/050631227
- 19 Bramble JH, Kwak DY, Pasciak JE. Uniform convergence of multigrid V-cycle iterations for indefinite and nonsymmetric problems. *SIAM J Numer Anal*, 1994, 31(6): 1746-1763, doi: 10.1137/0731089
- 20 Bramble JH, Pasciak JE, Xu J. The analysis of multigrid algorithms for nonsymmetric and indefinite elliptic problems. *Math Comp*, 1988, 51(184): 389-414, doi: 10.1090/S0025-5718-1988-0930228-6
- 21 Brezzi F, Franca LP, Russo A. Further considerations on residual-free bubbles for advective-diffusive equations. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1998, 166(1-2): 25-33, doi: 10.1016/S0045-7825(98)00080-2
- 22 Brezzi F, Hughes TJ, Marini LD, Russo A, Süli E. A priori error analysis of residual-free bubbles for advection-diffusion problems. *SIAM J Numer Anal*, 1999, 36(6): 1933-1948, doi: 10.1137/S0036142998342367
- 23 Brezzi F, Marini D, Russo A. Applications of the pseudo residual-free bubbles to the stabilization of convection-diffusion problems. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1998, 166(1-2): 51-63, doi: 10.1016/S0045-7825(98)00082-6
- 24 Brezzi F, Marini D, Süli E. Residual-free bubbles for advection-diffusion problems: the general error analysis. *Numer Math*, 2000, 85(1): 31-47, doi: 10.1007/s002110050476
- 25 Brezzi F, Marini LD, Micheletti S, Pietra P, Sacco R, Wang S. Discretization of semiconductor device problems (I). *Handbook of Numerical Analysis*. 2005, 13: 317-441, doi: 10.1016/S1570-8659(04)13004-4
- 26 Brezzi F, Marini LD, Pietra P. Two-dimensional exponential fitting and applications to drift-diffusion models. *SIAM J Numer Anal*, 1989, 26(6): 1342-1355, doi: 10.1137/0726078
- 27 Brezzi F, Marini LD, Russo A. On the choice of stabilizing sub- grid for convection-diffusion problems. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2005, 194: 127-148, doi: 10.1016/j.cma.2004.02.022
- 28 Brezzi F, Russo A. Choosing bubbles for advection-diffusion problems. *Math Models Methods Appl Sci*, 1994, 4: 571-587, doi: 10.1142/S0218202594000327.
- 29 Brooks A, Hughes T. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1982, 32: 199-259, doi: 10.1016/0045-7825(82)90071-8.
- 30 Burman E. A unified analysis for conforming and nonconforming stabilized finite element methods using interior penalty. *SIAM J Numer Anal*, 2005, 43(5): 2012-2033, doi: 10.1137/S0036142903437374

- 31 Burman E, Ern A. Nonlinear diffusion and discrete maximum principle for stabilized Galerkin approximations of the convection-diffusion- reaction equation. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2002, 191(35):3833-3855, doi: 10.1016/S0045-7825(02)00318-3
- 32 Burman E, Ern A. Stabilized Galerkin approximation of convection-diffusion-reaction equations: Discrete maximum principle and convergence. *Math Comp*, 2005, 74(252): 1637-1652, doi: 10.1090/S0025-5718-05-01761-8
- 33 Burman E, Ern A. Continuous interior penalty hp-finite element methods for advection and advection-diffusion equations. *Math Comp*, 2007, 76: 1119-1140, doi: 10.1090/S0025-5718-07-01951-5
- 34 Burman E, Fernández M, Hansbo P. Continuous interior penalty finite element method for Oseen's equations. *SIAM J Numer Anal*, 2006, 44: 1248-1274, doi: 10.1137/040617686
- 35 Burman E, Hansbo P. Edge stabilization for Galerkin approximations of convection-diffusion-reaction problems. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2004, 193: 1437-1453, doi: 10.1016/J.CMA.2003.12.032
- 36 Buturla EM, Cottrell PE, Grossman BM, Salsburg KA. Finite-element analysis of semiconductor devices: The FIEL-DAY program. *IBM J Res Dev*, 1981, 25(4): 218-231, doi: 10.1147/rd.254.0218
- 37 Cai XC, Widlund OB. Domain decomposition algorithms for indefinite elliptic problems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1992, 13(1): 243-258, doi: 10.1137/0913013
- 38 Cai XC, Widlund OB. Multiplicative Schwarz algorithms for some nonsymmetric and indefinite problems. *SIAM J Numer Anal*, 1993, 30(4): 936-952, doi: 10.1137/0730049
- 39 Celia MA, Russell TF, Herrera I, Ewing RE. An Eulerian-Lagrangian localized adjoint method for the advection-diffusion equation. *Adv Water Resour*, 1990, 13(4): 187-206, doi: 10.1016/0309-1708(90)90041-2
- 40 Chen L, Xu J. Stability and accuracy of adapted finite element methods for singularly perturbed problems. *Numer Math*. 2008, 109(2): 167-191, doi: 10.1007/s00211-007-0118-6
- 41 Chen Y, Cockburn B. Analysis of variable-degree HDG methods for convection-diffusion equations. Part I: general nonconforming meshes. *IMA J Numer Anal*, 2012, 32(4): 1267-1293, doi: 10.1093/imanum/drr058
- 42 Cockburn B. Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems. High-order methods for computational physics. 1999, Springer, Berlin, Heidelberg, 69-224, doi: 10.1007/978-3-662-03882-6_2
- 43 Cockburn B, Dong B. An analysis of the minimal dissipation local discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems. *J Sci Comput*, 2007, 32: 233-262, doi: /10.1007/s10915-007-9130-3
- 44 Cockburn B, Dong B, Guzmán J, Restelli M, Sacco R. A hybridizable discontinuous Galerkin method for steady-state convection-diffusion-reaction problems. *SIAM J Sci Comput*, 2009, 31(5): 3827-3846, doi: 10.1137/080728810
- 45 Cockburn B, Shu CW. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM J Numer Anal*, 1998, 35(6): 2440-2463, doi: 10.1137/S0036142997316712
- 46 Cockburn B, Shu CW. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems. *J Sci Comput*, 2001, 16: 173-261, doi: 10.1023/A:1012873910884
- 47 Codina R. A discontinuity-capturing crosswind-dissipation for the finite element solution of the convection-diffusion equation. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1993, 110(3-4): 325-342, doi: 10.1016/0045-7825(93)90213-H
- 48 Corsini A, Rispoli F, Santoriello A, Tezduyar T. Improved discontinuity-capturing finite element techniques for reaction effects in turbulence computation. *Comput Mech*, 2006, 38: 356-364, doi: 10.1007/s00466-006-0045-x
- 49 De G. Allen DN, Southwell RV. Relaxation methods applied to determine the motion, in two dimensions, of a viscous fluid past a fixed cylinder. *Q J Mech Appl Math*, 1955, 8(2): 129-145, doi: 10.1093/qjmam/8.2.129
- 50 Douglas, Jr J, Russell TF. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures. *SIAM J Numer Anal*, 1982, 19(5): 871-885, doi: 10.1137/0719063
- 51 Durán RG, Lombardi AL, Prieto MI. Superconvergence for finite element approximation of a convection-diffusion equation using graded meshes. *IMA J Numer Anal*, 2012, 32(2): 511-533, doi: 10.1093/imanum/drr005
- 52 Dörfler W. Uniform a priori estimates for singularly perturbed elliptic equations in multidimensions. *SIAM J Numer Anal*, 1999, 36(6): 1878-1900, doi: 10.1137/S0036142998341325
- 53 Dörfler W. Uniform error estimates for an exponentially fitted finite element method for singularly perturbed elliptic equations. *SIAM J Numer Anal*, 1999, 36(6): 1709-1738, doi: 10.1137/S0036142998341313
- 54 Egger H, Schöberl J. A hybrid mixed discontinuous Galerkin finite-element method for convection-diffusion problems. *IMA J Numer Anal*, 2010, 30(4): 1206-1234, doi: 10.1093/imanum/drn083
- 55 Elman HC, Chernesky MP. Ordering effects on relaxation methods applied to the discrete one-dimensional convection-diffusion equation. *SIAM J Numer Anal*, 1993, 30(5): 1268-1290, doi: 10.1137/0730066
- 56 Ern A, Guermond J. *Theory and practice of finite elements*, 2004, Springer-Verlag, New York, doi: 10.1007/978-1-4757-4355-5
- 57 Ern A, Guermond JL. Discontinuous Galerkin methods for Friedrichs' systems. I. General theory. *SIAM J Numer*

- Anal, 2006, 44(2): 753-778. doi: 10.1137/050624133
- 58 Falcone M, Ferretti R. Convergence analysis for a class of high-order semi-Lagrangian advection schemes. *SIAM J Numer Anal*, 1998, 35(3): 909-940, doi: 10.1137/S0036142994273513
- 59 Farrell PA. Sufficient conditions for the uniform convergence of a difference scheme for a singularly perturbed turning point problem. *SIAM J Numer Anal*, 1988, 25(3): 618-643, doi: 10.1137/0725038
- 60 Fischer B, Ramage A, Silvester DJ, Wathen AJ. On parameter choice and iterative convergence for stabilised discretisations of advection-diffusion problems. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1999, 179: 179-195, doi: 10.1016/S0045-7825(99)00037-7
- 61 Franca LP, Frey SL. Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1992, 99(2-3): 209-233, doi: 10.1016/0045-7825(92)90041-H
- 62 Franca LP, Nesliturk A, Stynes M. On the stability of residual-free bubbles for convection-diffusion problems and their approximation by a two-level finite element method. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1998, 166:35-49, 1998, doi: 10.1016/S0045-7825(98)00081-4
- 63 Friedrichs KO. Symmetric positive linear differential equations. *Comm Pure Appl Math*, 1958, 11(3): 333-418, doi: 10.1002/cpa.3160110306
- 64 Fu G, Qiu W, Zhang W. An analysis of HDG methods for convection-dominated diffusion problems. *ESAIM Math Model Numer Anal*, 2015, 49(1): 225-256, doi: 10.1051/m2an/2014032
- 65 Ganesan S, Tobiska L. Stabilization by local projection for convection-diffusion and incompressible flow problems. *J Sci Comput*, 2010, 43: 326-342, doi: <https://doi.org/10.1007/s10915-008-9259-8>
- 66 Gerbeau JF, Le Bris C, Lelièvre T. *Mathematical methods for the magnetohydrodynamics of liquid metals*. Clarendon Press, 2006, doi: 10.1093/acprof:oso/9780198566656.001.0001
- 67 Gravemeier V, Wall WA, Ramm E. A three-level finite element method for the instationary incompressible Navier-Stokes equations. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2004, 193: 1323-1366, doi: 10.1016/j.cma.2003.12.027
- 68 Guermond J. Stabilization of Galerkin approximations of transport equations by subgrid modeling. *ESAIM Math Model Numer Anal*, 1999, 33(6): 1293-1316, doi: <https://doi.org/10.1051/m2an:1999145>
- 69 Guzmán J. Local analysis of discontinuous Galerkin methods applied to singularly perturbed problems. *J Numer Math*, 2006, 14(1): 41-56, doi: 10.1515/156939506776382157
- 70 *Harnessing Energy from Nuclear Fusion*, Nuclear Science & Technology, IAEA FACTSHEET, 2019. <https://www.iaea.org/sites/default/files/19/09/harnessing-energy-from-nuclear-fusion.pdf>.
- 71 Heumann H, Hiptmair R. Stabilized Galerkin methods for magnetic advection. *ESAIM Math Model Numer Anal*, 2013, 47(6): 1713-1732, doi: 10.1051/m2an/2013085
- 72 Houston P, Schwab C, Süli E. Discontinuous hp -finite element methods for advection-diffusion-reaction problems. *SIAM J Numer Anal*, 2002, 39(6): 2133-2163, doi: 10.1137/S0036142900374111
- 73 Houston P, Süli E. Stabilised hp -finite element approximation of partial differential equations with nonnegative characteristic form. *Computing*, 2001, 66: 99-119, doi: 10.1007/s006070170030
- 74 Hu X, Lee YJ, Xu J, Zhang CS. On adaptive Eulerian-Lagrangian method for linear convection-diffusion problems. *J Sci Comput*, 2014, 58: 90-114, doi: 10.1007/s10915-013-9731-y
- 75 Hughes T, Brooks A. *A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion*. Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, AMD, ASME, New York, 1979, 34: 19-35.
- 76 Hughes TJ. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet- to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1995, 127: 387-401, doi: 10.1016/0045-7825(95)00844-9
- 77 Hughes TJ, Feijóo GR, Mazzei L. The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1998, 166: 3-24, doi: 10.1016/S0045-7825(98)00079-6
- 78 Hughes TJ, Franca LP, Hulbert GM. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1989, 73(2): 173-189, doi: 10.1016/0045-7825(89)90111-4
- 79 Hughes TJ, Sangalli G. Variational multiscale analysis: the fine-scale Green's function, projection, optimization, localization, and stabilized methods. *SIAM J Numer Anal*, 2007, 45: 539-557, doi: 10.1137/050645646
- 80 Hughes TJ, Scovazzi G, Bochev PB, Buffa A. A multiscale discontinuous Galerkin method with the computational structure of a continuous Galerkin method. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2006, 195(19-22): 2761-2787, doi: 10.1016/j.cma.2005.06.006
- 81 Idelsohn S, Nigro N, Storti M, Buscaglia G. A Petrov-Galerkin formulation for advection-reaction-diffusion problems. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1996, 136(1-2): 27-46, doi: 10.1016/0045-7825(96)01008-0
- 82 Il'in AM. Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative.

- Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1969, 6(2): 596-602, doi: 10.1007/BF01093706
- 83 John V, Knobloch P. On the performance of SOLD methods for convection-diffusion problems with interior layers. *Int J Computing Science and Mathematics*, 2007, 1: 245-258, doi: 10.1504/IJCSM.2007.016534
- 84 John V, Knobloch P. Spurious oscillations at layers diminishing (SOLD) methods for convection-diffusion equations: Part I - a review. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2007, 196: 2197-2215, doi: 10.1016/j.cma.2006.11.013
- 85 John V, Knobloch P. Spurious oscillations at layers diminishing (SOLD) methods for convection-diffusion equations: Part II - analysis for P_1 and Q_1 finite elements. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2008, 197(21-24): 1997-2014, doi: 10.1016/j.cma.2007.12.019
- 86 John V, Knobloch P, Savescu SB. A posteriori optimization of parameters in stabilized methods for convection-diffusion problems-Part I. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2011, 200(41-44): 2916-2929, doi: 10.1016/j.cma.2011.04.016
- 87 John V, Novo J. A robust SUPG norm a posteriori error estimator for stationary convection-diffusion equations. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2013, 255:289-305, doi: 10.1016/j.cma.2012.11.019
- 88 Johnson C, Schatz A, Wahlbin L. Crosswind smear and pointwise errors in streamline diffusion finite element methods. *Math Comp*, 1987, 49(179): 25-38, doi: 10.1090/S0025-5718-1987-0890252-8
- 89 Kacur J. Solution of degenerate convection-diffusion problems by the method of characteristics. *SIAM J Numer Anal*, 2001, 39(3): 858-879, doi: 10.1137/S0036142998336643
- 90 Kanschat G, Rannacher R. Local error analysis of the interior penalty discontinuous Galerkin method for second order elliptic problems. *J Numer Math*, 2002, 10(4): 249-274, doi: 10.1515/JNMA.2002.249
- 91 Kellogg RB, Tsan A. Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points. *Math Comp*, 1978, 32(144): 1025-1039, doi: 10.1090/S0025-5718-1978-0483484-9
- 92 Kim HH, Xu J, Zikatanov L. A multigrid method based on graph matching for convection-diffusion equations. *Numerical linear algebra with applications*. 2003, 10(1 - 2): 181-195, doi: 10.1002/nla.317
- 93 Kim HH, Xu J, Zikatanov L. Uniformly convergent multigrid methods for convection-diffusion problems without any constraint on coarse grids. *Adv Comput Math*, 2004, 20: 385-399, doi: 10.1023/A:1027378015262
- 94 Knopp T, Lube G, Rapin G. Stabilized finite element methods with shock capturing for advection-diffusion problems. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2002, 191(27-28):2997-3013, doi: 10.1016/S0045-7825(02)00222-0
- 95 L. P. Franca and L. Tobiska. Stability of the residual free bubble method for bilinear finite elements on rectangular grids. *IMA J Numer Anal*, 2002, 22(1):73-87, doi: 10.1093/imanum/22.1.73
- 96 Lazarov RD, Zikatanov LT. An exponential fitting scheme for general convection-diffusion equations on tetrahedral meshes. arXiv:1211.0869, 2012, doi: 10.48550/arXiv.1211.0869
- 97 Linß T. Layer-adapted meshes for reaction-convection-diffusion problems. Springer, 2009, doi: 10.1007/978-3-642-05134-0.
- 98 Linß T. Layer-adapted meshes for convection-diffusion problems. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2003, 192(9-10): 1061-1105, doi: 10.1016/S0045-7825(02)00630-8
- 99 Linß T. Analysis of a Galerkin finite element method on a Bakhvalov-Shishkin mesh for a linear convection-diffusion problem. *IMA J Numer Anal*, 2000, 20(4): 621-632, doi: 10.1093/imanum/20.4.621
- 100 Linß T. Uniform superconvergence of a Galerkin finite element method on Shishkin - type meshes. *Numer Methods Partial Differential Eq*, 2000, 16(5): 426-440, doi: 10.1002/1098-2426(200009)16:5<426::AID-NUM2>3.0.CO;2-r
- 101 Linß T, Stynes M. The SDFEM on Shishkin meshes for linear convection-diffusion problems. *Numer Math*, 2001, 87(3): 457-484, doi: 10.1007/PL00005420
- 102 Lube G, Rapin G. Residual-based stabilized higher-order FEM for a generalized Oseen problem. *Math Models Methods Appl Sci*, 2006, 16(7): 949- 966, doi: 10.1142/S0218202506001418
- 103 Madden N, Stynes M, Linear enhancements of the streamline diffusion method for convection-diffusion problems. *Comput Math Appl*, 1996, 32: 29-42, doi: 10.1016/S0898-1221(96)00184-8
- 104 Manteuffel TA, Ruge J, Southworth BS. Nonsymmetric algebraic multigrid based on local approximate ideal restriction (ℓ AIR). *SIAM J Sci Comput*, 2018, 40(6): A4105-A4130, doi: 10.1137/17M1144350
- 105 Markowich PA, Zl ́mal MA. Inverse-average-type finite element discretizations of selfadjoint second-order elliptic problems. *Math Comput*, 1988, 51(184): 431-449, doi: 10.1090/S0025-5718-1988-0930223-7
- 106 Matthies G, Skrzypacz P, Tobiska T. A unified convergence analysis for local projection stabilisations applied to the Oseen problem. *ESAIM-Math Model Numer Anal*, 2007, 41(4): 713-742, doi: 10.1051/M2AN:2007038
- 107 Miller JJ, Wang S. A new non-conforming Petrov-Galerkin finite-element method with triangular elements for a singularly perturbed advection-diffusion problem. *IMA J Numer Anal*, 1994, 14(2): 257-276, doi: 10.1093/imanum/14.2.257
- 108 Mizukami A, Hughes TJ. A Petrov-Galerkin finite element method for convection-dominated flows: an accurate upwinding technique for satisfying the maximum principle. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1985, 50(2): 181-193, doi: 10.1016/0045-7825(85)90089-1

- 109 Nguyen NC, Peraire J, Cockburn B. An implicit high-order hybridizable discontinuous Galerkin method for linear convection-diffusion equations. *J Comput Phys*, 2009, 228(9): 3232-3254, doi: 10.1016/j.jcp.2009.01.030
- 110 Nijima K. Pointwise error estimates for a streamline diffusion finite element scheme. *Numer Math*, 1990, 56: 707-719, doi: 10.1007/BF01405198
- 111 Notay Y. Aggregation-based algebraic multigrid for convection-diffusion equations. *SIAM J Sci Comput*, 2012, 34(4): A2288-A2316, doi: 10.1137/110835347
- 112 Nédélec JC. Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numer Math*, 1980, 35: 315-341, doi: 10.1007/BF01396415
- 113 O'Riordan E, Stynes M. A globally uniformly convergent finite element method for a singularly perturbed elliptic problem in two dimensions. *Math Comp*, 1991, 57(195): 47-62, doi: 10.1090/S0025-5718-1991-1079029-1
- 114 Pironneau O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *Numer Math*, 1982, 38: 309-332, doi: 10.1007/BF01396435
- 115 Qiu W, Shi K. An HDG method for convection diffusion equation. *J Sci Comput*, 2016, 66(1): 346-357, doi: 10.1007/s10915-015-0024-5
- 116 Raviart PA, Thomas JM. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. In *Mathematical Aspects of Finite Element Methods: Proceedings of the Conference Held in Rome, December 10-12, 1975* (pp. 292-315).
- 117 Roos H. Necessary convergence conditions for upwind schemes in the two-dimensional case. *Int J Numer Methods Eng*, 1985, 21: 1459-1469, doi: 10.1002/NME.1620210808.
- 118 Roos H, Stynes M, Tobiska L. *Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations: Convection-Diffusion-Reaction and Flow Problems*, 2nd ed. Springer Science & Business Media, 2008, doi: 10.1007/978-3-540-34467-4.
- 119 Roos HG. Ten ways to generate the Π 'in and related schemes. *J Comput Appl Math*, 1994, 53(1): 43-59, doi: 10.1016/0377-0427(92)00124-r
- 120 Roos HG, Adam D, Felgenhauer A. A novel nonconforming uniformly convergent finite element method in two dimensions. *J Math Anal Appl*, 1996, 201(3): 715-755, doi: 10.1006/jmaa.1996.0283
- 121 Roos HG, Linß T. Gradient recovery for singularly perturbed boundary value problems II: Two-dimensional convection-diffusion. *Math Mod Meth Appl S*. 2001, 11(7): 1169-1179, doi: 10.1142/S0218202501001288
- 122 Roos HG, Linß T. Sufficient conditions for uniform convergence on layer-adapted grids. *Computing*, 1999, 63: 27-45, doi: 10.1007/s006070050049
- 123 Roos HG, Linß T. Gradient recovery for singularly perturbed boundary value problems I: One-dimensional convection-diffusion. *Computing*. 2001, 66(2): 163-178, doi: 10.1007/s006070170033
- 124 Roos HG, Stynes M. Some open questions in the numerical analysis of singularly perturbed differential equations. *Comput Methods Appl Math*, 2015, 15(4): 531-550, doi: 10.1515/cmam-2015-0011
- 125 Rui H, Tabata M. A second order characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems. *Numer Math*, 2002, 92: 161-177, doi: 10.1007/s002110100364
- 126 Rui H, Tabata M. A mass-conservative characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems. *J Sci Comput*, 2010, 43: 416-432, doi: 10.1007/s10915-009-9283-3
- 127 Sacco R, Gatti E, Gotusso L. A nonconforming exponentially fitted finite element method for two - dimensional drift - diffusion models in semiconductors. *Numer Methods Partial Differential Equations*, 1999, 15(2):133-150, doi: 10.1002/(SICI)1098-2426(199903)15:2<133::AID-NUM1>3.0.CO;2-N
- 128 Sacco R, Stynes M. Finite element methods for convection-diffusion problems using exponential splines on triangles. *Comput Math Appl*, 1998, 35(3): 35-45, doi: 10.1016/S0898-1221(97)00277-0
- 129 Scharfetter DL, Gummel HK. Large-signal analysis of a silicon read diode oscillator. *IEEE Trans Electron Devices*, 1969, 16(1): 64-77, doi: 10.1109/T-ED.1969.16566
- 130 Shih Y, Elman H. Modified streamline diffusion schemes for convection-diffusion problems. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1999, 174(1-2): 137-151, doi: 10.1016/S0045-7825(98)00283-7
- 131 Shih YT, Elman HC. Iterative methods for stabilized discrete convection-diffusion problems. *IMA J Numer Anal*, 2000, 20(3): 333-358, doi: 10.1093/imanum/20.3.333
- 132 Shishkin GI. Discrete approximation of singularly perturbed elliptic and parabolic equations. *Russian Academy of Sciences, Ural Section, Ekaterinburg*. 1992, 269.
- 133 Shu CW. High order WENO and DG methods for time-dependent convection-dominated PDEs: A brief survey of several recent developments, *J Comput Phys*, 2016, 316: 598-613, doi: 10.1016/j.jcp.2016.04.030
- 134 Stenberg R. Analysis of mixed finite element methods for the Stokes problem: A unified approach. *Math Comp*, 1999, 42: 9-23, doi: 10.1090/S0025-5718-1984-0725982-9
- 135 Stynes M. Steady-state convection-diffusion problems. *Acta Numer*, 2005, 14: 445-508, doi: 10.1017/S0962492904000261

- 136 Stynes M, O’Riordan E. A uniformly convergent Galerkin method on a Shishkin mesh for a convection-diffusion problem. *J Math Anal Appl*, 1997, 214(1): 36-54, doi: 10.1006/jmaa.1997.5581
- 137 Stynes M, O’Riordan E. A finite element method for a singularly perturbed boundary value problem. *Numer Math*, 1986, 50: 1-15, doi: 10.1007/BF01389664
- 138 Stynes M, O’Riordan E. An analysis of a singularly perturbed two-point boundary value problem using only finite element techniques. *Math Comp*, 1991, 56(194): 663-675, doi: 10.1090/S0025-5718-1991-1068809-4
- 139 Stynes M, Stynes D. *Convection-Diffusion Problems: An Introduction to Their Analysis and Numerical Solution*. American Mathematical Society, 2018.
- 140 Stynes M, Tobiska L. The SDFEM for a convection-diffusion problem with a boundary layer: optimal error analysis and enhancement of accuracy. *SIAM J Numer Anal*, 2003, 41(5): 1620-1642. doi: 10.1137/S0036142902404728
- 141 Stynes M, Tobiska L. Necessary L^2 -uniform convergence conditions for difference schemes for two-dimensional convection-diffusion problems. *Comput Math Appl*, 1995, 29: 45-53, doi: 10.1016/0898-1221(94)00237-F
- 142 Sun G, Stynes M. Finite-element methods for singularly perturbed high-order elliptic two-point boundary value problems. II: convection-diffusion-type problems. *IMA J Numer Anal*, 1995, 15(2): 197-219, doi: 10.1093/imanum/15.2.197
- 143 Sun S, Wheeler MF. Symmetric and nonsymmetric discontinuous Galerkin methods for reactive transport in porous media. *SIAM J Numer Anal.*,2005, 43(1): 195-219, doi: 10.1137/S003614290241708X
- 144 Tarjan R. Depth-first search and linear graph algorithms. *SIAM J Comput*, 1972, 1(2):146-160, doi: 10.1137/0201010
- 145 Tobiska L, A note on the artificial viscosity of numerical schemes. *Comp Fluid Dyn*, 1995, 5: 281-290, doi: 10.1080/10618569508940747
- 146 Wang F, Xu J. A crosswind block iterative method for convection-dominated problems. *SIAM J Sci Comput*, 1999, 21(2): 620-645, doi: 10.1137/S106482759631192X
- 147 Wang J, Wu S. Discontinuous Galerkin methods for magnetic advection-diffusion problems. arXiv:2208.01267, 2022, doi: 10.48550/arXiv.2208.01267
- 148 Wang J, Wu S. A hybridizable discontinuous Galerkin method for magnetic advection-diffusion problems. arXiv:2305.19806, 2023, doi: 10.48550/arXiv.2305.19806
- 149 Wang S. A novel exponentially fitted triangular finite element method for an advection-diffusion problem with boundary layers. *J Comput Phys*, 1997, 134(2): 253-260, doi: 10.1006/jcph.1997.5691
- 150 Wang S, Li ZC. An analysis of a conforming exponentially fitted finite element method for a convection-diffusion problem. *J Comput Appl Math*, 2002, 143(2): 291-310, doi: 10.1016/S0377-0427(01)00530-1
- 151 Wu S, Xu J. Simplex-averaged finite element methods for $H(\text{grad})$, $H(\text{curl})$, and $H(\text{div})$ convection-diffusion problems. *SIAM J Numer Anal*, 2020, 58(1): 884-906, doi: 10.1137/18M1227196
- 152 Wu S, Zikatanov LT. On the unisolvence for the quasi-polynomial spaces of differential forms. arXiv:2003.14278, 2020, doi: 10.48550/arXiv.2003.14278
- 153 Xu J, Zikatanov L. A monotone finite element scheme for convection-diffusion equations. *Math Comput*, 1999, 68(228): 1429-1446, doi: 10.1090/S0025-5718-99-01148-5
- 154 Zarin H, Roos HG. Interior penalty discontinuous approximations of convection-diffusion problems with parabolic layers. *Numer Math*, 2005, 100: 735-759, doi: 10.1007/s00211-005-0598-1
- 155 Zhang J, Liu X, Yang M. Optimal Order L^2 error estimate of SDFEM on Shishkin triangular meshes for singularly perturbed convection-diffusion equations. *SIAM J Numer Anal*, 2016, 54(4): 2060-2080, doi: 10.1137/15M101035X
- 156 Zhang Z. Finite element superconvergence on Shishkin mesh for 2-D convection-diffusion problems. *Math Comp*, 2003, 72(243): 1147-1177, doi: 10.1090/S0025-5718-03-01486-8
- 157 Zhou G. How accurate is the streamline diffusion finite element method? *Math Comp*, 1997, 66(217): 31-44, doi: 10.1090/S0025-5718-97-00788-6

Stabilized finite element discretizations of general convection-diffusion problems

Shuonan Wu

Abstract This paper overviews several stabilized finite element methods for steady-state convection-diffusion problems. The main challenge lies in the occurrence of boundary layers when convection dominates, which leads to the loss of stability of traditional finite element methods within the boundary layers, resulting in severe oscillations. Under a quasi-uniform grid, stabilized finite element methods can be classified into two categories: upwind methods and exponential fitting methods. The former incorporates stabilization terms into the variational form based on the convection information, while the latter introduces exponential functions into the scheme based on the characteristics of the boundary layer solution. These two types of methods play an important guiding role in the design of the numerical schemes for new convection-diffusion problems, such as electromagnetic convection-diffusion problems.

Keywords convection-diffusion problems, finite element methods, upwind, exponential fitting, electromagnetic convection-diffusion

MSC(2020) 65N12, 65N15, 65N30

doi: 10.1360/N012017-XXXX