1 习题 6.1 第 9 题

证明: 数域 K 上的斜对称矩阵一定合同于下述形式的分块对角矩阵:

$$\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, (0), \cdots, (0)\right\}.$$

证明:

利用数学归纳法证明. 符号 $\simeq$ 表示合同关系.

$n=1$ 时, $(0) \simeq (0)$.

$n=2$ 时, $a \neq 0$, $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/a\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$.

假设对于小于 n 级的斜对称, 命题均为真. 考虑 n 级斜对称矩阵 A. 将 A 写为分块矩阵 $A = \begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ -A_2^T & A_4\end{bmatrix}$, 其中 $A_1 \in K^{2\times 2}$.

1. **情形 1:** $A_1 \neq 0$, 此时 A_1 可逆.

   $$\begin{bmatrix}I_2 & 0\\ A_2^T A_1^{-1} & I_{n-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ -A_2^T & A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_2 & -A_1^{-1}A_2\\ 0 & I_{n-2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_4 + A_2^T A_1^{-1} A_2\end{bmatrix}$$

   记 $P = \begin{bmatrix}I_2 & -A_1^{-1}A_2\\ 0 & I_{n-2}\end{bmatrix}$, $B = A_4 + A_2^T A_1^{-1} A_2$, B 是 $n-2$ 阶的斜对称矩阵.

   对 A_1 和 B 分别用归纳假设, 存在可逆矩阵 C_1, C_2 使得:

   $$C_1^T A_1 C_1 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},$$

   $$C_2^T B C_2 = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, (0), \cdots, (0)\right\}.$$

   令

   $$C = \begin{bmatrix}C_1 & 0\\ 0 & C_2\end{bmatrix},$$

   则 C 是 n 级可逆矩阵, 且

   $$C^T P^T A P C = \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, (0), \cdots, (0)\right\}.$$

   由数学归纳法即证.

2. **情形 2:** $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$, 若存在某 $a_{1j} \neq 0$, 将 A 的第 j 列与第 2 列交换, 第 j 行与第 2 行交换, 得到合同矩阵 $\tilde{A}$, 划归为情形 1; 若 A 的第一行均为 0, 则一定存在某 $a_{2j} \neq 0$, 将 A 的第 j 列与第 1 列交换, 第 j 行与第 1 行交换, 得到合同矩阵 $\tilde{A}$, 仍划归为情形 1.

3. **情形 3:** $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, 此时

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}.$$

对 A_4 应用归纳假设, 得到

$$\begin{aligned} A &\simeq \operatorname{diag}\left\{(0), (0), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, (0), \cdots, (0)\right\} \\ &\simeq \operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, (0), \cdots, (0)\right\}. \end{aligned}$$