1 习题 5.5 第 4 题

证明: 若 n 级实矩阵 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数, 则 A 一定正交相似于上三角矩阵.

证明:

注意题目条件比"矩阵 A 为实对称矩阵"弱, 不能说明 A 正交相似于对角矩阵!

用数学归纳法证明. 首先, $n=1$ 时, 命题显然成立.

假设命题在 $n=k-1$ 时成立, 下面考虑 $n=k$ 级矩阵. 由于 A 的特征多项式的根都是实数, 我们取一个实特征值 μ, 及其相应的单位特征向量 v_1. 利用施密特正交化可以找到 $n-1$ 个单位向量 $v_2, \cdots, v_n$, 使得 $T=[v_1, v_2, \cdots, v_n]$ 为正交矩阵. 因此

$$AT = T\begin{bmatrix} \mu & b^T \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } A_1 \text{ 为 } n-1 \text{ 级矩阵.}$$

因为

$$\left|\lambda I_n - T^{-1}AT\right| = \begin{vmatrix} \lambda-\mu & -b^T \\ 0 & \lambda I_{n-1} - A_1 \end{vmatrix} = (\lambda-\mu)\left|\lambda I_{n-1} - A_1\right|,$$

因此 A_1 满足条件: 特征多项式的根都是实数. 由归纳假设, 存在正交矩阵 P 使得 $P^{-1}A_1P$ 为上三角矩阵, 从而

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} T^{-1}AT \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & b^TP \\ 0 & P^{-1}A_1P \end{bmatrix}, \text{ 为上三角矩阵.}$$

而 $\left(T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^T \end{bmatrix} T^T = \left(T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}\right)^{-1}$, 即 $T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$ 为正交矩阵.

由数学归纳法即证结论.