# 1 作业 7

## 1.1 补充题 1

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 内一个向量组, 令

$$D = \begin{bmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_s) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_s, \alpha_1) & (\alpha_s, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_s, \alpha_s) \end{bmatrix}$$

证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是 $|D| \neq 0$.

**证明**

记矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$, 则 $D = A^T A$.

- 充分性: 任取齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个解 $x_0$, 那么显然

$$Dx_0 = A^T A x_0 = 0.$$

  即 $x_0$ 也是线性方程组 $Dx = 0$ 的解. 由 $|D| \neq 0$ 知 $Dx = 0$ 只有零解, 从而必有 $x_0 = 0$. 即 $Ax = 0$ 只有零解, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

- 必要性: 任取齐次线性方程组 $Dx = A^T A x = 0$ 的一个解 $x_0$, 则

$$(Ax_0)^T A x_0 = x_0^T A^T A x_0 = 0.$$

  这意味着 $Ax_0 = 0$, 即 $x_0$ 是 $Ax = 0$ 的解. 由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关知 $Ax = 0$ 只有零解, 从而 $Dx = 0$ 只有零解, 从而 $|D| \neq 0$.

## 1.2 补充题 2

设 $A$ 为一个 $n$ 阶方阵, $\xi$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中一个列向量. 如果 $A^{k-1}\xi \neq 0$, 但 $A^k\xi = 0$.

1. $\xi, A\xi, \cdots, A^{k-1}\xi$ 线性无关.
2. 如果 $k = n$, 证明: A 相似于如下矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

**证明**

1. 由 $A^{k-1}\xi \neq 0$ 知 $A^j\xi \neq 0, j = 0, 1, \cdots, k-1$.

   假设存在 $k$ 个系数 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ 使得

   $$\sum_{i=0}^{k-1} a_i A^i \xi = 0.$$

   在上式两侧分别左乘 $A^{k-1}$, 得到: $a_0 A^{k-1}\xi = 0$, 即 $a_0 = 0$. 从而

   $$\sum_{i=1}^{k-1} a_i A^i \xi = 0.$$

   在上式两侧分别左乘 $A^{k-2}$, 得到: $a_1 A^{k-1}\xi = 0$, 即 $a_1 = 0$. 依此类推, 可得 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$, 因此 $\xi, A\xi, \cdots, A^{k-1}\xi$ 线性无关.

2. 由 $A^k\xi = 0$, 可知:

$$\begin{aligned} & A \ \cdot \ [A^{k-1}\xi, A^{k-2}\xi, \cdots, A\xi, \xi] \\ = & \ [A^{k-1}\xi, A^{k-2}\xi, \cdots, A\xi, \xi] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由 1 问知方阵 $[A^{k-1}\xi, A^{k-2}\xi, \cdots, A\xi, \xi]$ 可逆, 从而 A 相似于如下矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$