1 作业 6

1.1 补充题 1

设 A, B 是数域 K 上两个 $n \times n$ 矩阵且 $AB = BA$. 又设 C 是将 A, B 行向量依次排列所得的 $2n \times n$ 矩阵，即

$$C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

证明

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) \geq \mathrm{rank}(C) + \mathrm{rank}(AB).$$

证明

设齐次线性方程组 $CX = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X = 0$ 的一个基础解系是 $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_r$. 将其分别扩充为 $AX = 0$ 的一个基础解系 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_r, \alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 和 $BX = 0$ 的一个基础解系 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_r, \beta_1, \cdots, \beta_t$.

我们考虑向量组 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_r, \alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t$, 由于:

$$\begin{aligned} AB\epsilon_i &= 0, \qquad i = 1, \cdots, r, \\ AB\beta_j &= 0, \qquad j = 1, \cdots, t, \\ BA\alpha_k &= 0, \qquad k = 1, \cdots, s. \end{aligned}$$

因此 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_r, \alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t$ 是齐次方程组 $ABX = BAX = 0$ 的一组解向量. 下证该向量组线性无关: 假设存在一组系数 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r, \eta_1, \cdots, \eta_s, \tau_1, \cdots, \tau_t \in K$ 使得:

$$\sum_{i=1}^{r} \gamma_i \epsilon_i + \sum_{i=1}^{s} \eta_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{t} \tau_i \beta_i = 0$$

假设 $\sum_{i=1}^{t} \tau_i \beta_i \neq 0$, 在上式两侧左乘 A, 得到: $A\left(\sum_{i=1}^{t} \tau_i \beta_i\right) = 0$, 又由 $B\left(\sum_{i=1}^{t} \tau_i \beta_i\right) = 0$, 我们得到 $\left(\sum_{i=1}^{t} \tau_i \beta_i\right)$ 是 $CX = 0$ 的非零解, 从而由基础解系的定义, 可以由 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_r$ 线性表出. 但另一方面, $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_r, \beta_1, \cdots, \beta_t$ 线性无关, 矛盾, 从而必有 $\sum_{i=1}^{t} \tau_i \beta_i = 0$; 完全同理可证 $\sum_{i=1}^{s} \eta_i \alpha_i = 0$. 从而 $\sum_{i=1}^{r} \gamma_i \epsilon_i = 0$. 线性无关性意味着 $\gamma_1, \cdots, \gamma_r, \eta_1, \cdots, \eta_s, \tau_1, \cdots, \tau_t$ 全为 0. 从

而向量组 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_r,\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 是线性无关的. 所以 $ABX=0$ 的基础解系的秩不小于 $r+s+t$. 即:

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(AB)\le n-r-s-t&=[n-(r+s)]+[n-(r+t)]-[n-r]\\&=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-\mathrm{rank}(C).\end{aligned}$$

1.2 补充题 2

给定数域 K 上的分块矩阵

$$M=\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}$$

其中 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $k\times l$ 矩阵. 证明:

1. $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\le\mathrm{rank}(M)$.
2. 当 $\mathrm{rank}(A)=m$ 或 $\mathrm{rank}(B)=l$ 时，$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(M)$.

证明

1. 设 $\mathrm{rank}(A)=r,\mathrm{rank}(B)=t$. 则 A 有一个 r 阶子矩阵 A_1, 使得 $|A_1|\ne0$; B 有一个 t 阶子矩阵 B_1, 使得 $|B_1|\ne0$. 从而 $\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}$ 有一个 $r+t$ 阶子式
$$\begin{bmatrix}A_1 & C_1\\ 0 & B_1\end{bmatrix}=|A_1||B_1|\ne0.$$
因此 $\mathrm{rank}(M)\ge s+t=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$.

2. **若 rank**$(A)=m$, 即 A 行满秩, 那么一定有 $m\le n$. 从而存在 A 的 m 个线性无关的列向量 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$, 使得 $\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix}$ 的每列均可由 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$ 线性表出. 因此可以将矩阵 M 通过初等列变换化为:
$$\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$$
即 $\mathrm{rank}(M)=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$.
若 rank$(B)=l$, 即 B 列满秩, 那么一定有 $l\le k$. 从而存在 B 的 l 个

线性无关的行向量 $\beta_{i_1}^T, \cdots, \beta_{i_l}^T$, 使得 $\begin{bmatrix} C \\ B \end{bmatrix}$ 的每行均可由 $\beta_{i_1}^T, \cdots, \beta_{i_l}^T$ 线性表出. 因此也可以将矩阵 M 通过初等行变换化为:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

即 $\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.