1 作业 5

1.1 补充题 1

给定数域 K 上一个非齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta, \tag{1}$$

其中 $\beta \neq 0$. 如果它的系数矩阵和增广矩阵的秩都是 r, 证明此线性方程组存在 $n-r+1$ 个线性无关解向量

$$\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-r},$$

使得方程组的任一解向量可被上面向量组线性表示.

证明:

已知 $\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} = \operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta\} = r \leq n$, 因此 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出, 即: 存在不全为零的 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in K$, 满足:

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i.$$

令 $\gamma_0 = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$.

- 若 $r = n$: 我们已经找到了非齐次线性方程组 (1) 的 1 个线性无关解向量 γ_0.

- 若 $r < n$: 考虑非齐次线性方程组 (1) 的导出组:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0, \tag{2}$$

  由于齐次线性方程组 (2) 的系数矩阵的秩为 $r < n$, 它一定有基础解系, 且基础解系的秩等于 $n - r$. 取一个基础解系:

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r},$$

  我们断言 $\gamma_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性无关, 否则存在不全为零的系数 $d_0, d_1, \cdots, d_{n-r} \in K$ 使得:

$$d_0\gamma_0 + \sum_{i=1}^{n-r} d_i\eta_i = 0,$$

$d_0 \neq 0$, 否则与基础解系中向量线性无关矛盾, 因此有

$$\gamma_0 = \sum_{i=1}^{n-r} (-\frac{d_i}{d_0})\eta_i \neq 0,$$

则令 $x = \gamma_0$, 从上述等式两侧分别得到:

$$0 \neq \beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0,$$

矛盾. 从而 $\gamma_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性无关. 令

$$\gamma_i = \gamma_0 + \eta_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-r,$$

则 $\gamma, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-r}$ 线性无关. 对任意非齐次线性方程组 (1) 的解 ν, $\mu = \nu - \gamma_0$ 是齐次线性方程组 (2) 的解, 因此可以被基础解系线性表出:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n-r} l_i\eta_i,$$

这意味着

$$\nu = \mu + \gamma_0 = (1 - \sum_{i=1}^{n-r} l_i)\gamma_0 + \sum_{i=1}^{n-r} l_i\gamma_i.$$

证毕.