1 作业 4

1.1 补充题 1

证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 2, \alpha_1 \neq 0)$ 线性相关的充分必要条件是, 至少有一个 α_i 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表出.

证明:

- **充分性**
  某个 α_i 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表出, 因此 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_i$ 线性相关, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关.

- **必要性**
  向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关, 因而存在不全为 0 的系数 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ 使得:
  $$\sum_{i=1}^{s} \gamma_i \alpha_i = 0.$$
  我们记 t 为满足 $\gamma_t \neq 0$ 但 $\gamma_i = 0, \forall i > t$ 的指标. 显然指标 t 满足 $2 \leq t \leq s$. 否则若 $t = 1$, 则 $0 \neq \gamma_1 \alpha_1 = 0$, 矛盾. 因此我们有:
  $$\alpha_t = \sum_{i=1}^{t-1} -\frac{\gamma_i}{\gamma_t} \alpha_i,$$
  即至少有一个 α_i 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表出.

1.2 补充题 2

设 A 是数域 K 上的 n 阶矩阵. 若 A 的元素至少有 $n^2 - n + 1$ 个零，证明 A 的秩 $\mathrm{rank}(A) < n$，并求出 $\mathrm{rank}(A)$ 的最大可能值.

证明:

由于 A 的元素至少有 $n^2 - n + 1$ 个零，因此 A 的元素至多有 $n^2 - (n^2 - n + 1) = n - 1$ 个非零. 因此矩阵 A 必有至少一行元素均为 0, 因此 A 不满秩, 即 $\mathrm{rank}(A) < n$. 倘若 A 的 $n-1$ 个元素 $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n-1$, 则 $\mathrm{rank}(A) = n - 1$, 这是最大可能值.

1.3 补充题 3

在 K^n 内给定向量组

$$\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \cdots, s(s \le n).$$

如果

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{s} |a_{ij}|, \quad j = 1, 2, \cdots, s,$$

证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

证明:

假设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关, 即存在不全为 0 的系数 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ 使得:

$$\sum_{i=1}^{s} \gamma_i \alpha_i = 0.$$

记 $\gamma_t = \max\limits_{1 \le i \le s} |\gamma_i| > 0$, 令 $\tilde{\gamma}_i = \dfrac{\gamma_i}{\gamma_t}, i = 1, 2, \cdots, s$, 则有

$$\sum_{i=1}^{s} \tilde{\gamma}_i \alpha_i = 0, \quad |\tilde{\gamma}_i| \le 1,\ i = 1, 2, \cdots, s.$$

从而

$$|a_{tt}| = |a_{tt}\tilde{\gamma}_t| = \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{s} a_{it}\tilde{\gamma}_i \right| \le \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne k}}^{s} |a_{it}|,$$

这与题设矛盾.