1 习题三

1.1 补充题 1

给定线性方程组

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 & + & a_{n-1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n-1,n}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

以 M_i 表示其系数矩阵划去第 i 列后所剩的 $n-1$ 阶行列式. 证明:

$$(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$$

是方程组的解.

证明:

考虑行列式

$$P_i = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

由于行列式 P_i 的第一行与第 $i+1$ 行相同, 因此 $P_i = 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n-1$.
将行列式 P_i 按第一行展开, 得到:

$$P_i = a_{i1}M_1 + a_{i2}(-M_2) + \cdots + a_{in}[(-1)^{n-1}M_n] = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

即证 $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组的解.