1 习题二

1.1 补充题 1

求

$$\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数.

解: 将上述行列式按第一行展开, 有:

$$\text{原式} = 2x\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 3 & 2 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

上式中，有且仅有红色部分是 x^4 项, 有且仅有蓝色部分是 x^3 项. 从而 x^4 系数为 2, x^3 系数为 -1.

1.2 补充题 2

给定一个 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$, 将其每个元素 a_{ij} 乘以 $b^{i-j}(b \neq 0)$ 后得到的 n 阶方阵记为 B. 证明: $|A| = |B|$.

证明: 根据行列式的定义:

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} b^{1-j_1} b^{2-j_2} \cdots b^{n-j_n} \end{aligned}$$

由于 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的任意一个排列, 从而 $\sum\limits_{i=1}^{n} j_i = \sum\limits_{i=1}^{n} i$, 即

$$b^{1-j_1} b^{2-j_2} \cdots b^{n-j_n} = 1.$$

因而

$$|B| = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = |A|.$$