1　习题一

1.1　补充题 1

1.1.1　解法 1(仅会用到本章节知识)

解: 其系数矩阵为:

$$\begin{pmatrix} a & b & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & b & \cdots & b \\ b & b & a & b & \cdots & b \\ . & . & . & . & & . \\ b & b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

从第二行开始, 每一行减去第一行得:

$$\begin{pmatrix} a & b & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & b & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & & . \\ b-a & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}$$

- 情形一. 若 $a=b, a\neq 0$(若 a, b 全为 0 则本题无意义), 则令 $x_2, \cdots, x_n$ 为自由未知量, 得:

$$x_1 = -\frac{b}{a}(\sum_{i=2}^{n} x_i)$$

- 若 $a \neq b$ 则把第一行减去其他每一行的 $\frac{b}{a-b}$ 倍, 得:

$$\begin{pmatrix} a+(n-1)b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & b & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & & . \\ b-a & 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}$$

- 情形二: 若 $a \neq b$ 且 $a \neq (n-1)b$, 则方程组只有零解.

- 情形三: 若 $a=(n-1)b, n>2$, 取 x_1 为自由未知量, 对第 i 个方程 $(i=2, \cdots, n)$, 得

$$(b-a)x_1 + (a-b)x_i = 0$$

解得:$x_i = x_1, i = 2, \cdots, n$

1.1.2 解法二 (该方法需要学完大半本书)

解: 该方程是否仅有零解，等价于其行列式是否为 0.(你也可以用第二章计算该行列式的方法算)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & b & \cdots & b \\ b & b & a & b & \cdots & b \\ . & . & . & . & & . \\ b & b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+b & b & b & b & \cdots & b \\ b & a-b+b & b & b & \cdots & b \\ b & b & a-b+b & b & \cdots & b \\ . & . & . & . & & . \\ b & b & b & b & \cdots & a-b+b \end{pmatrix}$$

$$= (a-b)I + \begin{pmatrix} b & b & b & b & \cdots & b \\ b & b & b & b & \cdots & b \\ b & b & b & b & \cdots & b \\ . & . & . & . & & . \\ b & b & b & b & \cdots & b \end{pmatrix}$$

$$= (a-b)I + \mathbf{1}B'$$

其中 $B' = (b, b, b, b, \cdots, b)$, $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 利用 $det(\lambda I + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) = \lambda^{n-1}(\lambda + \mathbf{b}^T\mathbf{a})$

可得:$detA = (a-b)^{n-1}(a-b+nb) = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$ 剩下的讨论同解法 1. 评注: 此解法其实不是很适用于此题, 因为最后对于有非零解的情形还是需求所有非零解. 不过以后我们还会经常碰到类似的技巧. 所以就在此处给出来了.

1.2 第二题

解: 本题本质上只要验证对乘法封闭. 假设 $\alpha, \beta \in Q(\pi)$ 设:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=0}^{n_1} a_i^{(\alpha)}\pi^i}{\sum_{i=0}^{m_1} b_i^{(\alpha)}\pi^i}, \qquad \beta = \frac{\sum_{i=0}^{n_2} a_i^{(\beta)}\pi^i}{\sum_{i=0}^{m_2} b_i^{(\beta)}\pi^i}$$

则:

$$\alpha\beta = \frac{(\sum_{i=0}^{n_1} a_i^{(\alpha)}\pi^i)(\sum_{i=0}^{n_2} a_i^{(\beta)}\pi^i)}{(\sum_{i=0}^{m_1} b_i^{(\alpha)}\pi^i)(\sum_{i=0}^{m_2} b_i^{(\beta)}\pi^i)}$$

$$= \frac{(\sum_{k=0}^{n_1+n2}(\sum_{i+j=k} a_i^{(\alpha)}a_j^{(\beta)})\pi^k)}{(\sum_{k=0}^{m_1+m_2}(\sum_{i+j=k} b_i^{(\alpha)}b_j^{(\beta)})\pi^k)}$$

因为 $a_i^{(\alpha)}, a_i^{(\beta)}, b_i^{(\alpha)}, b_i^{(\beta)} \in Q$ 所以他们对加乘封闭. 所以 $\alpha\beta \in Q(\pi)$ 对于加减除证明类似.