1 补充题 1

设 α, β 是欧氏空间中两个不同的单位向量, 证明: 存在一个镜面反射 A, 使得 $A\alpha = \beta$.

证明

因为 $\alpha \neq \beta$, 因此长度 $|\alpha - \beta| \neq 0$. 记 $\gamma = \dfrac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|}$, 并定义线性变换

$$A = I - 2P_\gamma, \quad \text{其中 } P_\gamma x = (x, \gamma)\gamma \text{ 是在 } \langle \gamma \rangle \text{ 上的正交投影.}$$

根据定义, A 是一个镜面反射. 并且:

$$A\alpha = \alpha - 2\left(\alpha, \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|}\right)\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|}.$$

注意

$$(\alpha, \alpha - \beta) = (\alpha, \alpha) - (\alpha, \beta) = (\beta, \beta) - (\alpha, \beta) = (\beta - \alpha, \beta),$$

从而

$$2\left(\alpha, \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|}\right) = \frac{(\alpha, \alpha - \beta)}{|\alpha - \beta|} - \frac{(\beta, \alpha - \beta)}{|\alpha - \beta|} = |\alpha - \beta|.$$

因此

$$A\alpha = \alpha - (\alpha - \beta) = \beta.$$

Q.E.D.

2 补充题 2

证明: n 维欧氏空间 V 中任一正交变换 A 都可以表示成一系列镜面反射的乘积.

证明

对维数 n 做数学归纳法. 显然 $n = 1$ 时, $A = 1 = (-1)^2$, 命题成立.

假设 $n - 1$ 维欧式空间 V 上的任一正交变换可以表示成有限个镜面反射的乘积, 下面考虑维数为 n 时情形. 取欧式空间 V 的一个标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$.

若 $A = I$, 考虑 V 上把标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 映为 $-\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的线性变换 B. 显然 B 是正交变换, 且是关于 $\langle \eta_1 \rangle^\perp$ 的镜面反射. $A = B^2$.

若 $A \neq I$, 此时不妨设 $A\eta_1 \neq \eta_1$. 由于 $|A\eta_1| = |\eta_1| = 1$, 存在镜面反射 B_1 使得 $B_1\eta_1 = A\eta_1$. $B_1\eta_1, B_1\eta_2, \cdots, B_1\eta_n$ 和 $A\eta_1, A\eta_2, \cdots, A\eta_n$ 分别都是 V 的一组标准正交基. 有

$$\langle B_1\eta_2, \cdots, B_1\eta_n\rangle = \langle B_1\eta_1\rangle^\perp = \langle A\eta_1\rangle^\perp = \langle A\eta_2, \cdots, A\eta_n\rangle,$$

记 $U = \langle A\eta_2, \cdots, A\eta_n\rangle$. U 是 V 上将 $A\eta_i$ 映为 $B_1\eta_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 的正交变换 C 的不变子空间. 从而 C 在 U 上的限制 $C|_U$ 是一个正交变换.

由归纳假设, 存在 U 上有限个镜面反射 $C_2, \cdots, C_s$, 使得 $C|_U = C_2C_3\cdots C_s$. 把 C_j 扩充为 V 上的线性变换 B_j, 使得 $B_j(A\eta_1) = A\eta_1$, $B_j|_U = C_j$, $j = 2, 3, \cdots, s$. 对任意 $j = 2, \cdots, s$, 设 C_j 是关于 U 中某个超平面 $\langle\delta_j\rangle^\perp$ 的镜面反射, 则显然 B_j 是关于 V 中超平面 $\langle\delta_j\rangle^\perp \oplus L_j$ 的镜面反射.

从而

$$\begin{aligned} A\eta_i &= C^{-1}(B_1\eta_i) = B_s^{-1}\cdots B_2^{-1}B_1\eta_i, \quad i = 2, 3, \cdots, n, \\ A\eta_1 &= B_s^{-1}\cdots B_2^{-1}A\eta_1 = B_s^{-1}\cdots B_2^{-1}B_1\eta_1. \end{aligned}$$

因此 $A = B_s^{-1}\cdots B_2^{-1}B_1$, 其中 B_j^{-1} 仍是镜面反射, $j = 2, 3, \cdots, n$.

由数学归纳法, 命题成立.

Q.E.D.

3 补充题 3

将一个复方阵分解为实部和虚部 $U = P + \mathrm{i}Q$. 证明: U 为酉矩阵的充分必要条件是 $P'Q$ 对称且 $P'P + Q'Q = I$.

证明

记号 U^* 表示 U 的共轭转置.

$$\begin{aligned} & U \text{ 为酉矩阵} \\ \Leftrightarrow\ & U^*U = I \\ \Leftrightarrow\ & (P' - \mathrm{i}Q')(P + \mathrm{i}Q) = (P'P + Q'Q) + \mathrm{i}(P'Q - Q'P) = I \\ \Leftrightarrow\ & P'P + Q'Q = I \text{ 且 } P'Q \text{ 对称} \end{aligned}$$

Q.E.D.

4 补充题 4

证明矩阵

$$U=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1}\\ 1 & \omega^2 & \cdots & \omega^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)^2}\end{bmatrix},\quad 其中\ \omega=e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$$

是酉矩阵.

证明

对任意正整数 $m>0$,

$$1+\omega^m+\omega^{2m}+\cdots+\omega^{(n-1)m}=\frac{1-(\omega^m)^n}{1-\omega^m}=0.$$

又注意到 $|\omega^m|=1, \overline{\omega^m}=\bar{\omega}^m$, 定义 $\alpha_i=(1^{i-1},\omega^{i-1},\omega^{2(i-1)},\cdots,\omega^{(n-1)(i-1)})'$, $i=1,2,\cdots,n$. 则 $i\le j$ 时,

$$\alpha_i^*\alpha_j=1+\omega^{j-i}+\omega^{2(j-i)}+\cdots+\omega^{(n-1)(j-i)}=\begin{cases}0, & i<j\ 时,\\ n, & i=j\ 时.\end{cases}$$

因此 U 是一个酉矩阵.

Q.E.D.