1 补充题 1

设 A 是 n 维线性空间 V 上的一个幂零线性变换, 令 $\lambda_0=0$. A 的特征子空间 V_{λ_0} 的维数为 k, 证明: $A^{n-k+1}=0$.

证明

由于 A 是 n 维线性空间 V 上的一个幂零线性变换, 因此 A 只有 0 特征值. A 的特征子空间 V_{λ_0} 的维数为 k 意味着 $\operatorname{rank}(A)=n-k$. 因此 A 的 Jordan 标准型 J 的主对角元均为 0, 次对角元中有 $n-k$ 个 1. J 写成分块对角形式为:

$$J=\operatorname{diag}\{J_1,J_2,\cdots,J_m,0\},$$

其中每个 J_i 为 Jordan 块:

$$J_i=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n_i\times n_i},\quad i=1,2,\cdots,m.$$

由于 $\operatorname{rank}(A)=n-k$, 因而有 $n_i\le n-k+1$, $i=1,2,\cdots,m$. 因为 $J_i^{n_i}=0$, 从而必有 $J^{n-k+1}=0$, 即得到 $A^{n-k+1}=0$.

Q.E.D.

2 补充题 2

设 $A\in M_n(K)$, 且 A 是一个幂零矩阵. 在 $M_n(K)$ 内定义线性变换:

$$BX=AX-XA,\quad \forall X\in M_n(K).$$

证明: B 是一个幂零线性变换.

证明

首先验证 B 是一个线性变换: $M_n(K)$ 是一个线性空间, 且

- $\forall X,Y\in M_n(K)$, $B(X+Y)=A(X+Y)-(X+Y)A=BX+BY$.
- $\forall X\in M_n(K)$, $B(kX)=A(kX)-(kX)A=kBX$, $\forall k\in K$.

接着使用数学归纳法证明: $B^kX=\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^iC_k^iA^{k-i}XA^i$.

- $k=1$ 时, $BX=(-1)^0A^1XA^0+(-1)^1A^0XA^1=AX-XA$, 成立;
- 假设 $k=m-1$ 时断言成立;
- 在 $k=m$ 时,
$$\begin{aligned}B^mX&=B^{m-1}(BX)=B^{m-1}(AX-XA)\\&=\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^iC_{m-1}^iA^{m-1-i}(AX-XA)A^i\\&=\sum_{j=0}^{m}(-1)^jC_m^jA^{m-j}XA^j.\end{aligned}$$
  断言得证.

由于 A 是幂零矩阵, $A^l=0$. 由 $\max\{2l-i,i\}\geq l,\forall i=0,1,\cdots,2l$, 因此对任意 $X\in M_n(K)$, $B^{2l}X=0$. 因此 B 是一个幂零线性变换.

Q.E.D.

3 补充题 3

在实数域上线性空间 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 内定义内积:
$$(f(x),g(x)):=\int_{-1}^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$
证明: 下面的 Legendre 多项式
$$\begin{aligned}&P_0(x)=1,\\&P_k(x)=\frac{1}{2^kk!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[(x^2-1)^k],\quad (k=1,2,\cdots,n).\end{aligned}$$
是 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 的一组正交基.

证明

只需证明
$$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]\cdot\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}[(x^2-1)^m]\mathrm{d}x=0,\quad m>n.$$
利用分部积分公式, 得到:
$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]\cdot\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}[(x^2-1)^m]\mathrm{d}x\\=&\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]\cdot\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}[(x^2-1)^m]\bigg|_{-1}^1+(-1)\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[(x^2-1)^n]\cdot\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}[(x^2-1)^m]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于 1 和 -1 都是 $(x^2-1)^m=0$ 的 m 重根, 因而 1 和 -1 都是

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}[(x^2-1)^m]=0$$

的根, 从而

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]\cdot\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}[(x^2-1)^m]\bigg|_{-1}^{1}=0.$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]\cdot\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}[(x^2-1)^m]\mathrm{d}x\\=&(-1)\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[(x^2-1)^n]\cdot\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}}[(x^2-1)^m]\mathrm{d}x\\=&\cdots\\=&(-1)^m\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}[(x^2-1)^n]\cdot[(x^2-1)^m]\mathrm{d}x\\=&0.\end{aligned}$$

最后一个等式是因为 $n<m\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}[(x^2-1)^n]=0.$