

线性代数(B), 作业13

交作业时间: 2018/12/24

书上习题:

- 习题8.3: 1(2), 1(4)
- 习题9.1: 2, 5, 8, 9

补充题:

- 设 \mathbf{A} 是 n 维线性空间 V 上的一个幂零线性变换, 令 $\lambda_0 = 0$. \mathbf{A} 的特征子空间 V_{λ_0} 的维数为 k , 证明: $\mathbf{A}^{n-k+1} = \mathbf{0}$.
- 设 $A \in M_n(K)$, 且 A 是一个幂零矩阵. 在 $M_n(K)$ 内定义线性变换:

$$\mathbf{B}X = AX - XA, \quad \forall X \in M_n(K).$$

证明: \mathbf{B} 是一个幂零线性变换.

- 在实数域上线性空间 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 内定义内积:

$$(f(x), g(x)) := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

证明: 下面的Legendre多项式

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} [(x^2 - 1)^k] \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

是 $\mathbb{R}[x]_{n+1}$ 的一组正交基.