1 补充题 1

对于 n 元实二次型 $X'AX$, 如果向量 α 满足 $\alpha' A\alpha = 0$, 则称 α 为一个迷向向量. 证明: 如果 $X'AX$ 的正惯性指数和负惯性指数均大于 0, 则存在 R^n 的一组基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$, 使得其中每个 η_i 均为迷向向量.

证明:

由题意知, 存在可逆矩阵 P 使得 $P'AP = \mathrm{diag}\{I_p, -I_q, 0\}$, 其中 $p > 0, q > 0$. 记

$$P = [\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n],$$

令

$$\alpha_{ij} = \gamma_i + \gamma_{p+j},\ i = 1, 2, \cdots, p,\ j = 1, 2, \cdots, q.$$
$$\beta_{ij} = \gamma_i - \gamma_{p+j},\ i = 1, 2, \cdots, p,\ j = 1, 2, \cdots, q.$$

则

$$\mathcal{A} = \{\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_t :\ i = 1, 2, \cdots, p,\ j = 1, 2, \cdots, q,\ t = p+q+1, \cdots, n\}$$

是迷向向量组. 其中元素数目 $2pq + n - (p+q) \geq n$.

显然 $\{\alpha_{ij}, \beta_{ij} : i = 1, 2, \cdots, p,\ j = 1, 2, \cdots, q\}$ 和 $\{\gamma_i : i = 1, 2, \cdots, p+q\}$ 等价. 因而可以从 $\mathcal{A}$ 中选出一个 n 元的极大无关组, 即为所求基.

2 补充题 2

1. 如果 A 为 n 阶正定矩阵, 证明:

   $$|A| \leq a_{nn} \cdot A\begin{pmatrix}1, 2, \cdots, n-1\\ 1, 2, \cdots, n-1\end{pmatrix}.$$

   证明:

   我们首先证明引理:

   - 正定矩阵 A 一定可逆, 且其逆矩阵 A^{-1} 也正定.

     假设方阵 A 不可逆, 则 $Ax = 0$ 有非零解 u, 从而 $u'Au = 0$, 与正定矛盾.

     对任意 $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$, 则 $Ax = y$ 有唯一非零解 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. 注意到 A 是对称的, 因此

     $$y'A^{-1}y = x'AA^{-1}Ax = x'Ax > 0,$$

由 y 的任意性知 A^{-1} 正定. 引理得证.

将 A 写成分块矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则 A_{n-1} 也是正定矩阵, 否则存在 $0 \neq z \in \mathbb{R}^{n-1}$ 使得 $z'A_{n-1}z \leq 0$, 则 $\begin{bmatrix} z' & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \leq 0$, 与正定矛盾. 注意到

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\alpha' A_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1}\alpha \end{bmatrix}$$

因此

$$|A| = (a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1}\alpha) \cdot A \begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n-1 \\ 1, 2, \cdots, n-1 \end{pmatrix} \leq a_{nn} \cdot A \begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n-1 \\ 1, 2, \cdots, n-1 \end{pmatrix},$$

不等号成立是因为

$$-\alpha' A_{n-1}^{-1}\alpha \leq 0, \quad A \begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n-1 \\ 1, 2, \cdots, n-1 \end{pmatrix} > 0.$$

2. 如果 A 为 n 阶正定矩阵, 证明:

$$|A| \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证明:

由第一问知:

$$\begin{aligned} |A| &\leq a_{nn} \cdot A \begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n-1 \\ 1, 2, \cdots, n-1 \end{pmatrix} \\ &\leq a_{n-1,n-1} a_{nn} A \begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n-2 \\ 1, 2, \cdots, n-2 \end{pmatrix} \\ &\leq \cdots \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

3. 如果 $T = (t_{ij})$ 为 n 阶实可逆矩阵, 证明:

$$|T|^2 \leq \prod_{i=1}^{n} (t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + \cdots + t_{ni}^2).$$

证明:

显然 $A := T'T$ 是对称矩阵. 又 $Tx = 0$ 只有零解, 从而任意 $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$, $x'T'Tx > 0$, 从而 $A = T'T$ 是正定矩阵.

应用第二小问的结论, 有

$$|A| = |T|^2 \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

而 $a_{ii} = t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + \cdots + t_{ni}^2$, 即证结论.