中国科学: 数学 2019 年 第 49 卷 第 3 期: 485 ~ 504
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

上临界超过程的一类强极限的性质

献给王梓坤教授 90 华诞

任艳霞[1], 宋仁明[2,3], 张蕊[4*]

1. 北京大学数学科学学院, 北京 100871;
2. Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, IL 61801, USA;
3. 南开大学数学科学学院, 天津 300071;
4. 首都师范大学数学科学学院, 北京 100048

E-mail: yxren@math.pku.edu.cn, rsong@illinois.edu, zhangrui27@cnu.edu.cn

收稿日期: 2018-03-02; 接受日期: 2018-06-20; 网络出版日期: 2019-02-22; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11671017, 11731009 和 11601354)、Simons Foundation (批准号: 429343) 和首都师范大学青年科研创新团队资助项目

摘要 假设 $X = \{X_t, t \geqslant 0; \mathbb{P}_\mu\}$ 是局部紧可分距离空间 E 上的上临界超过程, ϕ_0 是 X 的均值半群的生成元的与第一特征值 λ_0 对应的正特征函数, 则 $M_t := \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\langle \phi_0, X_t\rangle$ 是非负鞅. 令 M_∞ 是 M_t 的极限, 则 M_∞ 是非退化的当且仅当 $L\log L$ 条件成立. 当 $L\log L$ 条件不一定成立时, 最近, Ren 等 (2017) 证明了存在定义在 $[0,\infty)$ 上的非负函数 γ_t 及非退化随机变量 W 使得对任意 E 上非零 Borel 有限测度 μ, 有 $\lim_{t\to\infty}\gamma_t\langle\phi_0, X_t\rangle = W$, a.s.-$\mathbb{P}_\mu$. 本文主要研究 W 的性质, 证明 W 在 $(0,\infty)$ 上存在严格正的密度函数, 并研究 W 的小值概率问题和尾概率问题.

关键词 超过程 上临界 非退化强极限 绝对连续 小值概率 尾概率

MSC (2010) 主题分类 60J68

1 引言

考虑后代分布为 $\{p_n : n \geqslant 0\}$ 的上临界 Galton-Watson 过程 $\{Z_n, n \geqslant 0\}$. Seneta [1] 在 1968 年证明了存在一组正常数 $\{c_n, n \geqslant 1\}$ 使得 $c_n Z_n$ 依分布收敛到一个非退化的随机变量 W; 接着, Heyde [2] 证明了这个极限是几乎必然成立的. 之后, 寻找 $\{c_n, n \geqslant 1\}$ 使得 $c_n Z_n$ 收敛到一个非退化的极限问题, 称为 Seneta-Heyde 问题, $\{c_n\}$ 称为规范常数. Harris [3] 证明了当 $\{p_n : n \geqslant 0\}$ 的二阶矩存在时, 随机变量 W 的分布函数在 $(0,\infty)$ 上是绝对连续的; Stigum [4] 证明了当 $\{p_n : n \geqslant 0\}$ 满足 $L\log L$ 条件时, W 的分布函数在 $(0,\infty)$ 上是绝对连续的; Athreya [5] 最终证明了这一结论对任意上临界 Galton-Watson 过程都是成立的. 关于 W 的性质, 文献 [6] 讨论了 W 的小值概率问题, 即当 $r \to 0$ 时, 概率

英文引用格式: Ren Y-X, Song R M, Zhang R. On properties of a class of strong limits for supercritical superprocesses (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 485–504, doi: 10.1360/N012018-00046

$P(0<W\leqslant r)$ 趋于 0 的速率; 文献 [7] 给出了当存在 N 使得对所有 $n\geqslant N$ 和 $p_n=0$ 时 W 的尾概率问题, 即当 $r\to\infty$ 时, $P(W>r)$ 趋于 0 的速率.

对于上临界多物种 Galton-Watson 过程, Jones[8] 给出了对应的小值概率和尾概率的结论. Hering[9] 证明了上临界分枝 Markov 过程相应的结论. 最近, 我们在文献 [10] 中讨论了上临界超过程的 Seneta-Heyde 类型的极限问题: 假设 $\{X_t,t\geqslant 0;\mathbb{P}_\mu\}$ 是上临界超过程, 在一定条件下证明了存在定义在 $[0,\infty)$ 上的非负函数 γ_t 和非退化随机变量 W, 使得对任意 E 上非零 Borel 有限测度 μ, 有

$$\lim_{t\to\infty}\gamma_t\langle\phi_0,X_t\rangle=W,\quad \text{a.s.-}\mathbb{P}_\mu,$$

其中 ϕ_0 是 X 的均值半群的生成元的与第一特征值 λ_0 对应的正特征函数. 本文主要目的是研究 W 在 $(0,\infty)$ 上的绝对连续性, 并研究 W 的小值概率问题和尾概率问题.

1.1 超过程

我们首先介绍本文的框架. 假设 E 是一个局部紧的可分度量空间, ∂ 是一个不包含在 E 内的点. 我们用 E_∂ 表示 $E\cup\{\partial\}$. 设 m 是 E 上的一个 σ- 有限的、支撑为全空间的测度. 我们用 $\mathcal{B}(E)$ ($\mathcal{B}^+(E)$) 表示 E 上的 (非负) Borel 可测函数空间, $\mathcal{B}_b(E)$ ($\mathcal{B}_b^+(E)$) 表示 E 上的 (非负) 有界 Borel 可测函数空间, $C(E)$ 表示 E 上的连续函数空间. 假设 $\xi=\{\Omega^0,\mathcal{H},\mathcal{H}_t,\xi_t,\Pi_x,\zeta\}$ 是 E 上的 Hunt 过程, 其中 $\{\mathcal{H}_t,t\geqslant 0\}$ 是过程 ξ 的满足通常条件的最小 σ 域流, $\zeta:=\inf\{t\geqslant 0:\xi_t=\partial\}$ 是其寿命. 我们用 $\{P_t:t\geqslant 0\}$ 表示 ξ 的半群.

我们要研究的超过程 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$ 由两个要素确定: 底过程 $\{\xi_t,t\geqslant 0\}$ 和分枝机制 φ, 其中 $\{\xi_t,t\geqslant 0\}$ 是 E 上的 Hunt 过程, 分枝机制 φ 由下式给出:

$$\varphi(x,\lambda)=-\alpha(x)\lambda+\beta(x)\lambda^2+\int_{(0,+\infty)}(\mathrm{e}^{-\lambda r}-1+\lambda r)n(x,dr),\quad x\in E,\quad \lambda\geqslant 0,\tag{1.1}$$

其中 $\alpha\in\mathcal{B}_b(E)$, $\beta\in\mathcal{B}_b^+(E)$ 且 n 是一个从 E 到 $(0,\infty)$ 的核并且满足条件

$$\sup_{x\in E}\int_{(0,+\infty)}(r\wedge r^2)n(x,dr)<\infty.\tag{1.2}$$

由上面假设易知, 存在 $M>0$ 使得

$$|\alpha(x)|+\beta(x)+\int_{(0,+\infty)}(r\wedge r^2)n(x,dr)\leqslant M.\tag{1.3}$$

令 $\mathcal{M}_F(E)$ 为 E 上的有限 Borel 测度全体组成的集合, 并赋予弱收敛拓扑. 以 ξ 为底过程、φ 为分枝机制的超过程 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$ 是一个 $\mathcal{M}_F(E)$- 值的 Markov 过程. 这类超过程的存在性是众所周知的, 参见文献 [11,12]. 对于 $\mu\in\mathcal{M}_F(E)$, 我们用 $\mathbb{P}_\mu$ 表示初始状态为 μ 的超过程 X 的分布. 对 E 上的函数 f 和测度 μ, 我们采用通常的记号 $\langle f,\mu\rangle:=\int_E f(x)\mu(dx)$ 和 $\|\mu\|:=\langle 1,\mu\rangle$. 称一个 $[0,\infty)\times E_\partial$ 上定义的实值函数 $u(t,x)$ 为局部有界的, 如果对所有的 $t>0$, 有 $\sup_{s\in[0,t],x\in E_\partial}|u(s,x)|<\infty$. 对 E 上函数 f, 自然延拓定义: $f(\partial)=0$. 根据文献 [11, 定理 5.12] 可知, 存在一个 $\mathcal{M}_F(E)$- 值的 Hunt 过程 $X=\{\Omega,\mathcal{G},\mathcal{G}_t,X_t,\mathbb{P}_\mu\}$ 使得对于任意 $f\in\mathcal{B}_b^+(E)$ 和 $\mu\in\mathcal{M}_F(E)$, 有

$$-\log\mathbb{P}_\mu(\mathrm{e}^{-\langle f,X_t\rangle})=\langle V_tf,\mu\rangle,\tag{1.4}$$

其中 $V_tf(x)$ 是下面方程的唯一的非负局部有界解:

$$V_tf(x)+\Pi_x\int_0^t\varphi(\xi_s,V_{t-s}f(\xi_s))ds=\Pi_xf(\xi_t),\quad x\in E_\partial,\tag{1.5}$$

其中我们用了以下的约定: 对任意的 $\lambda\geqslant 0$, $\varphi(\partial,\lambda)=0$. 由于 $f(\partial)=0$, 对任意的 $t\geqslant 0$, 有 $V_tf(\partial)=0$. 本文中处理的超过程都是这个 Hunt 版本.

对任给的 $f\in\mathcal{B}_b(E)$ 和 $(t,x)\in[0,\infty)\times E$, 定义

$$T_tf(x):=\Pi_x[\mathrm{e}^{\int_0^t\alpha(\xi_s)ds}f(\xi_t)].\tag{1.6}$$

熟知, 对任意 $x\in E$, 有 $\mathbb{P}_{\delta_x}\langle f,X_t\rangle=T_tf(x)$.

假设存在一族定义在 $E\times E$ 上连续的严格正的函数 $\{p(t,x,y):t>0\}$ 满足

$$P_tf(x)=\int_Ep(t,x,y)f(y)m(dy).$$

定义

$$a_t(x):=\int_Ep(t,x,y)^2m(dy),\quad \hat{a}_t(x):=\int_Ep(t,y,x)^2m(dy).$$

我们的第一个假设如下:

假设 1.1 (1) 对于任意的 $t>0$, 有 $\int_Ep(t,x,y)m(dx)\leqslant 1$;

(2) 对任意的 $t>0$, 有

$$\int_E\int_Ep(t,x,y)^2m(dy)m(dx)<\infty.\tag{1.7}$$

而且函数 $x\to a_t(x)$ 和 $x\to\hat{a}_t(x)$ 都是 E 上的连续函数.

注意, 在假设 1.1 中, 积分是关于第一个空间变量的. 这意味着 $\{P_t:t\geqslant 0\}$ 关于 m 的对偶半群 $\{\widehat{P}_t:t\geqslant 0\}$ 是次 Markov 的. 根据 Hölder 不等式可得

$$p(t+s,x,y)=\int_Ep(t,x,z)p(s,z,y)m(dz)\leqslant(a_t(x))^{1/2}(\hat{a}_s(y))^{1/2}.\tag{1.8}$$

$\{P_t:t\geqslant 0\}$ 和 $\{\widehat{P}_t:t\geqslant 0\}$ 都是 $L^2(E,m)$ 上的强连续的压缩半群, 证明参见文献 [13]. 我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_m$ 表示 $L^2(E,m)$ 中的内积. 由于 $p(t,x,y)$ 关于 (x,y) 连续, 根据 (1.8) 和假设 1.1(2), 利用控制收敛定理, 很容易证明对于任意的 $f\in L^2(E,m)$, P_tf 和 $\widehat{P}_tf$ 都是连续的.

根据假设 1.1(2), 对任意的 $t>0$, P_t 和 $\widehat{P}_t$ 都是 $L^2(E,m)$ 上的紧算子. 令 $\widetilde{L}$ 和 $\widehat{\widetilde{L}}$ 分别表示半群 $\{P_t\}$ 和 $\{\widehat{P}_t\}$ 在 $L^2(E,m)$ 中的无穷小生成元. 定义 $\widetilde{\lambda}_0:=\sup\Re(\sigma(\widetilde{L}))=\sup\Re(\sigma(\widehat{\widetilde{L}}))$, 其中 $\Re$ 表示复数的实部. 根据 Jentzsch 定理 (参见文献 [14, 定理 V.6.6]) 可知, $\widetilde{\lambda}_0$ 是 $\widetilde{L}$ 和 $\widehat{\widetilde{L}}$ 的单重特征根, 令 $\widetilde{\phi}_0$ 和 $\widetilde{\psi}_0$ 分别是与 $\widetilde{\lambda}_0$ 对应的 $\widetilde{L}$ 和 $\widehat{\widetilde{L}}$ 的特征函数, $\widetilde{\phi}_0$ 和 $\widetilde{\psi}_0$ 可以选取为 m-a.e. 严格正的且满足 $\|\widetilde{\phi}_0\|_2=1$ 和 $\langle\widetilde{\phi}_0,\widetilde{\psi}_0\rangle_m=1$. 因此, 对于 m- 几乎处处的 $x\in E$, 有

$$\mathrm{e}^{\widetilde{\lambda}_0}\widetilde{\phi}_0(x)=P_1\widetilde{\phi}_0(x),\quad \mathrm{e}^{\widetilde{\lambda}_0}\widetilde{\psi}_0(x)=\widehat{P}_1\widetilde{\psi}_0(x).$$

由 $P_1\widetilde{\phi}_0$ 和 $\widehat{P}_1\widetilde{\psi}_0$ 的连续性, $\widetilde{\phi}_0$ 和 $\widetilde{\psi}_0$ 可以选取为连续的且对所有的 $x\in E$ 都是严格正的.

我们的第二个假设是 $\{P_t:t\geqslant 0\}$ 和 $\{\widehat{P}_t:t\geqslant 0\}$ 满足内在 U- 超压缩性.

假设 1.2 (1) 函数 $\widetilde{\phi}_0$ 是有界的;

(2) 半群 $\{P_t, t\geqslant 0\}$ 和 $\{\widehat{P}_t : t\geqslant 0\}$ 是内在 U- 超压缩的, 即对任意 $t>0$, 存在 $c_t>0$ 使得

$$p(t,x,y)\leqslant c_t\widetilde{\phi}_0(x)\widetilde{\psi}_0(y). \tag{1.9}$$

在文献 [15] 中, 我们已给出了很多满足假设 1.1 和 1.2 的 Hunt 过程的例子. 例如, 令 E 是一个有界 Lipschitz 的连通开集, ξ 是一个无穷小生成元为一致椭圆散度型二阶微分算子的扩散过程在 E 上的子过程, 则 ξ 满足假设 1.1 和 1.2, 可参见文献 [16].

根据 α 的有界性和 ξ 满足的条件, 在文献 [15, 引理 2.1] 中, 我们已经证明了半群 $\{T_t\}$ 关于测度 m 也存在严格正的密度函数 $q(t,x,y)$, 即对于 $f\in\mathcal{B}_b(E)$, 有

$$T_tf(x)=\int_E q(t,x,y)f(y)m(dy).$$

同时, 对任意的 $t>0$, $q(t,x,y)$ 关于 (x,y) 是连续的, 并且

$$\mathrm{e}^{-Mt}p(t,x,y)\leqslant q(t,x,y)\leqslant \mathrm{e}^{Mt}p(t,x,y),\quad (t,x,y)\in(0,\infty)\times E\times E. \tag{1.10}$$

令 $\{\widehat{T}_t, t>0\}$ 是半群 $\{T_t, t>0\}$ 在 $L^2(E,m)$ 上的对偶半群, 即对于任意的 $f,g\in L^2(E,m)$, 有

$$\widehat{T}_tf(x)=\int_E q(t,y,x)f(y)m(dy).$$

根据假设 1.1(b) 和 (1.10), 我们有

$$\int_E\int_E q^2(t,x,y)m(x)m(dy)\leqslant \mathrm{e}^{2Mt}\int_E\int_E p^2(t,x,y)m(x)m(dy)<\infty.$$

因此, 用同样的分析可得以下结论: 对于任意的 $t>0$, T_t 和 $\widehat{T}_t$ 都是 $L^2(E,m)$ 上的紧算子. 令 L 和 $\widehat{L}$ 分别是半群 $\{T_t\}$ 和 $\{\widehat{T}_t\}$ 在 $L^2(E,m)$ 上的无穷小生成元. 定义 $\lambda_0 := \sup\Re(\sigma(L))=\sup\Re(\sigma(\widehat{L}))$. λ_0 是 L 和 $\widehat{L}$ 的单重特征根, 令 ϕ_0 和 ψ_0 分别是与 λ_0 对应的 L 和 $\widehat{L}$ 的特征函数, ϕ_0 和 ψ_0 可以选取为处处严格正的连续函数且满足 $\|\phi_0\|_2=1$, $\langle\phi_0,\psi_0\rangle_m=1$.

由假设 1.2 和 α 的有界性, 利用与文献 [16, 定理 3.4] 类似的方法, 可以证明:

(i) ϕ_0 是有界的函数.

(ii) 半群 $\{T_t, t\geqslant 0\}$ 和 $\{\widehat{T}_t, t>0\}$ 是内在 U- 超压缩的, 即对任意 $t>0$, 存在 $c_t>0$ 使得

$$q(t,x,y)\leqslant c_t\phi_0(x)\psi_0(y). \tag{1.11}$$

定义 $q_t(x) := \mathbb{P}_{\delta_x}(\|X_t\|=0)$. 令 $\mathcal{E} := \{\exists\, t>0, \|X_t\|=0\}$. 注意到 $q_t(x)$ 关于 t 是单调非减的函数. 因此, 极限 $q(x) := \lim_{t\to\infty}q_t(x)=\mathbb{P}_{\delta_x}(\mathcal{E})$ 存在. 称 $q(x)$ 为超过程的灭绝概率. 令 $v(x) := -\log q(x)$. 由 X 的分枝性可得 $\mathbb{P}_\mu(\mathcal{E})=\mathrm{e}^{-\langle v,\mu\rangle}$. 本文考虑上临界超过程, 为此有如下假设:

假设 1.3 $\lambda_0>0$.

假设 1.4 存在 $t_0>0$ 使得

$$\inf_{x\in E}q_{t_0}(x)>0. \tag{1.12}$$

假设 1.4 保证了 $\|v\|_\infty\leqslant\sup_{x\in E}(-\log q_{t_0}(x))<\infty$, 因此, v 是有界函数. 在文献 [15, 第 2.2 小节] 中, 我们给出了假设 1.4 的一个充分条件. 特别地, 如果 $\inf_{x\in E}\beta(x)>0$, 那么假设 1.4 成立. 在假设 1.1–1.4 下, 文献 [10, 引理 3.1] 已经证明了 $q(x)<1$, 这也是上临界性质的一个体现.

1.2 主要结果

定义 $M_t := \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\langle\phi_0, X_t\rangle$, $t \geqslant 0$. 对于任意的 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 根据 Markov 性可得, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, $\{M_t, t \geqslant 0\}$ 是一个非负鞅. 因此, $\{M_t, t \geqslant 0\}$ 存在有限极限, 记作 M_∞. 根据文献 [17] 可知, M_∞ 是非退化的当且仅当 $L\log L$ 条件成立. 当 M_∞ 是非退化随机变量时, X_t 是指数增长的, 增长速度为 $\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$. 然而, 当 M_∞ 为退化随机变量时, $\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$ 不再是 X_t 的增长速度. 文献 [10] 证明了, 当 $L\log L$ 条件不一定成立时, X_t 的增长速度为 $\mathrm{e}^{\lambda_0 t}L(t)$, 其中 L 经过变换后是一个缓变函数. 下面来叙述文献 [10] 中的主要结果.

在文献 [10] 中, 我们证明了存在一组非负函数 $\{\eta_t(x), t \geqslant 0\}$, 满足 $0 \leqslant \eta_t(x) \leqslant v(x)$, 使得

$$\eta_t(x) = V_s(\eta_{t+s})(x), \quad t, s \geqslant 0, \quad x \in E,$$

并且 η_0 既不恒等于 0, 也不恒等于 v. 令 $\gamma_t = \langle\eta_t, \psi_0\rangle_m$, 则

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\gamma_t}{\gamma_{t+s}} = \mathrm{e}^{\lambda_0 s}, \quad \forall s \geqslant 0,$$

并且有下面结论成立.

定理 1.1 (参见文献 [10, 定理 1.2]) 存在一个非退化随机变量 W 使得对于非零测度 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 我们有

$$\lim_{t\to\infty} \gamma_t\langle\phi_0, X_t\rangle = W, \quad \text{a.s.-}\mathbb{P}_\mu,$$
$$\mathbb{P}_\mu(W = 0) = \mathrm{e}^{-\langle v,\mu\rangle}, \quad \mathbb{P}_\mu(W < \infty) = 1.$$

定义新测度 $n^{\phi_0}(x, dr)$:

$$\int_0^\infty f(r) n^{\phi_0}(x, dr) = \int_0^\infty f(r\phi_0(x)) n(x, dr).$$

令 $l(x) := \int_1^\infty r\log r n^{\phi_0}(x, dr)$. 下面定理给出了 M_∞ 非退化的充分必要条件.

定理 1.2 (参见文献 [10, 定理 1.3]) 以下命题是等价的:

(1) 对某个 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, M_∞ 是非退化随机变量;

(2) 对所有非零测度 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, M_∞ 是非退化随机变量;

(3) $l_0 := \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\lambda_0 t}\gamma_t < \infty$;

(4) ($L\log L$ 准则) $\int_E \psi_0(x) l(x) m(dx) < \infty$;

(5) 对某个非零测度 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 有 $\mathbb{P}_\mu W < \infty$;

(6) 对所有非零测度 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 有 $\mathbb{P}_\mu W < \infty$.

由文献 [10, 注 1.1] 知, $\int_E \psi_0(x) l(x) m(dx) < \infty$ 成立当且仅当

$$\int_E \phi_0(x)\psi_0(x) m(dx) \int_1^\infty (r\log r) n(x, dr) < \infty. \tag{1.13}$$

本文的主要目的是在上面两个定理的基础上, 进一步研究随机变量 W 的性质: 包括 W 是否存在密度函数、W 的小值概率问题和尾概率问题. 本文的主要定理如下:

定理 1.3 对于任意非零测度 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, 随机变量 W 在 $(0, \infty)$ 上存在严格正的密度函数.

在第 3.1 小节中, 我们将引入另一个半群 $\{T_t^*\}$, 它的最大特征值为 $\lambda_0^* < 0$. 定义 $\epsilon_0 := \frac{-\lambda_0^*}{\lambda_0}$. 令

$$L(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\gamma_t, \tag{1.14}$$

则

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t+s)}{L(t)} = 1.$$

定义

$$\widetilde{L}(\theta) := L\left(\frac{\log\theta}{\lambda_0}\right), \quad \theta \geqslant 1, \tag{1.15}$$

则 $\widetilde{L}$ 是在 ∞ 处的缓变函数.

定理 1.4 对任意 $\mu \in \mathcal{M}_F(E)$, 有 $\lim_{r\to 0} r^{-\epsilon_0}\mathbb{P}_\mu(0 < W \leqslant r) = \mathrm{e}^{-\langle v,\mu\rangle} A(\psi(1))\langle v\phi_0^*, \mu\rangle/\Gamma(\epsilon_0+1)$, 其中 $\Gamma(\cdot)$ 是通常的 Γ 函数, ϕ_0^* 为与 $\mathrm{e}^{\lambda_0^* t}$ 对应的 T_t^* 的特征函数, 算子 A 的定义见 (3.16). 同时,

$$\lim_{r\to\infty} r\widetilde{L}(r)^{-1}\mathbb{P}_\mu(W > r) = 0.$$

注 1.1 对于 Galton-Watson 过程, W 的小值概率问题分为两种情形: Schröder 情形和 Böttcher 情形, 参见文献 [6,8]. 假设 $\{Z_n, n \geqslant 0\}$ 是单物种 Galton-Watson 过程, 后代分布为 $\{p_n, n \geqslant 0\}$. 令 q 为灭绝概率, $f(s)$ 为 $\{p_n, n \geqslant 0\}$ 的概率母函数, $m > 1$ 为其期望. 令 $\gamma = f'(q)$.

(1) 如果 $p_0 + p_1 > 0$, 则 $F(s) := \lim_{n\to\infty} \gamma^{-n}(f_n(s) - q)$ 存在, 此时 F 满足 Schröder 方程: $F(f(s)) = \gamma f(s)$. 令 $\epsilon = -\log\gamma/\log m$, 则

$$P(W \leqslant r) \asymp r^{-\epsilon}.$$

(2) 如果 $p_0 + p_1 = 0$, 则 $\lambda = \min\{n : p_n > 0\} \geqslant 2$. 此时 $G(s) := \lim_{n\to\infty} -\lambda^{-n}\log f_n(s)$ 存在, 并且函数 $\overline{G} = \mathrm{e}^{-G}$ 满足 Böttcher 方程: $\overline{G}(f) = \overline{G}^{\lambda}$. 令 $\beta = \log\lambda/\log m$, 可以得到

$$-\log P(W \leqslant r) \asymp r^{-\beta/(1-\beta)}.$$

而对于文献 [9] 中分枝 Markov 过程和本文中的超过程, 强极限 W 的小值概率问题只有一种情形, 那就是 Schröder 情形. 事实上, 对于文献 [9] 中的分枝 Markov 过程 $\{Z_t, t \geqslant 0\}$, 当灭绝概率为 0 时, 可以证明 $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_0^* t}\overline{F}_t f$ 存在, 其中 $\overline{F}_t f := P_{\delta_x}(\mathrm{e}^{\langle \log f, Z_t\rangle})$.

假设 Galton-Watson 过程的后代分布 p_n 满足: 存在 $N > 0$ 使得 $p_n = 0$ 对任意 $n \geqslant N$ 成立, 文献 [7] 得到了 W 的尾概率趋于 0 的速度. 多物种 Galton-Watson 过程也有相应的尾概率结论, 参见文献 [8]. 对于超过程, W 的尾概率由 X 的骨架过程 (一个分枝 Markov 过程) 决定, 本文中当分枝机制 $n(x, dr)$ 不为 0 时, X 的骨架过程的后代个数分布 $p_n(x)$ (见 (2.12) 和 (2.13)) 不满足此条件, 因此, 本文中未得到尾概率 $\mathbb{P}_\mu(W > r)$ 趋于 0 的速率, 只得到一个较弱的结论.

在第 2 节中, 我们将证明 W 是一个复合 Poisson 随机变量, 具有形式 $W = \sum_{n=1}^N Y_n$, 其中 N 是一个 Poisson 随机变量, Y_j $(j \geqslant 1)$ 是一列与 N 独立的独立同分布的随机变量. 并且可以证明 Y_j 的分布正好是某个分枝 Markov 过程对应的强极限的分布. 在第 3 节中, 我们将对 Y_j 的 Laplace 变换和特征函数进行分析和估计, 得出 Y_j 存在密度函数, 故而证明定理 1.3. 进一步利用 Tauberian 定理, 可以证明定理 1.4.

2　复合 Poisson 随机变量和分枝 Markov 过程

2.1　复合 Poisson 随机变量

定义 W 的 Laplace 指数为

$$\Phi(\theta,x):=-\log\mathbb{P}_{\delta_x}\exp\{-\theta W\}. \tag{2.1}$$

利用 Markov 性和分枝性, 在文献 [10, 等式 (5.3)] 中, 我们已经证明了

$$\Phi(\theta,x)=V_t(\Phi(\theta\mathrm{e}^{-\lambda_0 t},\cdot))(x). \tag{2.2}$$

引理 2.1　对于 $x\in E$, 存在 $(0,\infty)$ 上的有限测度 $\pi(x,dr)$ 使得 $\pi(x,(0,\infty))=v(x)$, 且

$$\Phi(\theta,x)=\int_{(0,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-\theta r})\pi(x,dr).$$

证明　由于

$$\mathbb{P}_\mu[\mathrm{e}^{-\theta W}]=(\mathbb{P}_{\mu/n}(\mathrm{e}^{-\theta W}))^n,$$

因此, 在测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, 随机变量 W 的分布是无穷可分的. 又因为 W 是非负的, 因此存在非负函数 $a(x)$ 和 $(0,\infty)$ 上满足下面条件的 σ- 有限测度 $\pi(x,dr)$:

$$\int_0^\infty(1\wedge r)\pi(x,dr)<\infty,$$

使得

$$\Phi(\theta,x)=a(x)\theta+\int_{(0,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-\theta r})\pi(x,dr). \tag{2.3}$$

根据文献 [10, 定理 1.2] 知,

$$\Phi(\infty,x)=-\log\mathbb{P}_{\delta_x}(W=0)=v(x).$$

由此可得 $a(x)=0$, 并且 $\pi(x,(0,\infty))=v(x)$. 因此可得定理结论成立. □

根据引理 2.1 可得, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, W 是一个复合 Poisson 随机变量, 即 $W=\sum_{n=1}^N Y_n$, 其中 N 是参数为 $\langle v,\mu\rangle$ 的 Poisson 随机变量, $\{Y_j,j\geqslant 1\}$ 是独立同分布的随机序列, 且分布为 $\frac{\int_E\pi(x,dy)\mu(dx)}{\langle v,\mu\rangle}$, 同时, N 与 $\{Y_j,j\geqslant 1\}$ 独立. 以下假设 Y 是分布为 $\frac{\int_E\pi(x,dy)\mu(dx)}{\langle v,\mu\rangle}$ 的随机变量.

引理 2.2　对任意非零 $\mu\in\mathcal{M}_F(E)$, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, 随机变量 W 在 $(0,\infty)$ 上存在密度函数当且仅当随机变量 Y 存在密度函数. 如果 Y 的密度函数为 $g_\mu(y)$, 则对于任意的 $0<a<b$, 有

$$\mathbb{P}_\mu(W\in(a,b))=\int_a^b f_\mu(y)dy,$$

其中

$$f_\mu(y)=\sum_{k=1}^\infty g_\mu^{*k}(y)\frac{\langle v,\mu\rangle^k}{k!}\mathrm{e}^{-\langle v,\mu\rangle}. \tag{2.4}$$

注 2.1 如果对于任意的 $x\in E$, 在概率测度 $\mathbb{P}_{\delta_x}$ 下, Y 存在密度函数 $g(x,y)$, 则

$$\pi(x,dy)=v(x)g(x,y)dy.$$

从而, 对任意非零 $\mu\in\mathcal{M}_F(E)$, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, Y 存在密度函数:

$$g_\mu(y)=\frac{\int_E v(x)g(x,y)\mu(dx)}{\langle v,\mu\rangle},\quad y>0.$$

根据引理 2.2 和注 2.1, 下面只需证明随机变量 Y 存在密度函数. 因此, 我们将对 Y 的 Laplace 变换和特征函数进行分析. 定义

$$\psi(\theta,x):=\frac{v(x)-\Phi(\theta,x)}{v(x)}=v(x)^{-1}\int_{(0,\infty)}\mathrm{e}^{-\theta r}\pi(x,dr),\quad \theta\geqslant 0.$$

因此,

$$\mathbb{P}_\mu(\mathrm{e}^{-\theta Y})=\frac{\langle v\psi(\theta,\cdot),\mu\rangle}{\langle v,\mu\rangle},\quad \theta\geqslant 0.$$

注意, $\psi(\theta,x)$ 是分布 $v(x)^{-1}\pi(x,dr)$ 的 Laplace 变换. 对任意 $x\in E$, 有 $\theta\geqslant 0$, $\psi(\theta,x)\in[0,1]$.

类似地, 定义

$$\psi(\mathrm{i}\theta,x):=\mathbb{P}_{\delta_x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta Y})=v(x)^{-1}\int_{(0,\infty)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta r}\pi(x,dr),\quad \theta\in\mathbb{R}.$$

对任给 $a>0$, 令 $\mathcal{D}_a:=\{f\in\mathcal{B}(E):0\leqslant f(x)\leqslant a,x\in E\}$. 定义算子 $\overline{V}_t:\mathcal{D}_1\to\mathcal{D}_1$:

$$\overline{V}_tf(x):=\frac{v(x)-V_t(v(1-f))(x)}{v(x)},\quad f\in\mathcal{D}_1.\tag{2.5}$$

根据 (2.2) 可得, 对于 $\theta\geqslant 0$, 有

$$\psi(\theta,x)=\overline{V}_t(\psi(\theta\mathrm{e}^{-\lambda_0 t},\cdot))(x).\tag{2.6}$$

显然, $\overline{V}_t$ 的定义可以推广到 E 上的无穷范数小于等于 1 的复值可测函数空间上.

下一小节中, 我们将说明 $\overline{V}_t$ 正好是某个分枝 Markov 过程的 Laplace 泛函. 文献 [18, 19] 中, 在一定条件下给出了超过程的骨架分解. 在文献 [18, 19] 的条件满足时, 我们下面介绍的分枝 Markov 过程正好是 (ξ,φ)- 超过程的骨架过程. 文献 [19] 主要研究了超扩散的骨架分解, 而文献 [18] 主要研究了底过程 $\{\xi_t,t\geqslant 0\}$ 为对称的超过程的骨架分解. 文献 [18, 19] 并不能完全涵盖本文中的超过程. 本文未直接使用超过程的骨架分解, 而是从 W 是复合 Poisson 随机变量出发进行讨论, 同样引出了对应的分枝 Markov 过程.

2.2 分枝 Markov 过程

定义

$$N_t:=\frac{v(\xi_t)}{v(\xi_0)}\exp\bigg\{-\int_0^t\frac{\varphi(\xi_s,v(\xi_s))}{v(\xi_s)}ds\bigg\}.$$

引理 2.3 在概率 Π_x 下, $\{N_t:t\geqslant 0\}$ 关于 σ- 域流 $\{\mathcal{H}_t,t\geqslant 0\}$ 是一个非负鞅, 并且 $\Pi_x(N_t)=1$.

证明　对于任意的 $t>0$, 利用 Markov 性和分枝性可得 $v(x)=V_tv(x)$. 因此,

$$v(x)+\Pi_x\int_0^t\varphi(\xi_s,v(\xi_s))ds=\Pi_xv(\xi_t). \tag{2.7}$$

容易验证

$$|\varphi(x,z)|\leqslant 2M(z+z^2),\quad z\geqslant 0,$$

因此,

$$\frac{|\varphi(x,v(x))|}{v(x)}\leqslant 2M(1+v(x))\leqslant 2M(1+\|v\|_\infty). \tag{2.8}$$

因此, 根据 Feynman-Kac 公式可得

$$v(x)=\Pi_x\bigg[\exp\bigg\{-\int_0^t\frac{\varphi(\xi_s,v(\xi_s))}{v(\xi_s)}ds\bigg\}v(\xi_t)\bigg]. \tag{2.9}$$

由 Markov 性和等式 (2.9) 立即可得

$$\begin{aligned}\Pi_x(N_{t+s}\mid\mathcal{H}_t)&=v(\xi_0)^{-1}\exp\bigg\{-\int_0^t\frac{\varphi(\xi_s,v(\xi_s))}{v(\xi_s)}ds\bigg\}\\&\quad\times\Pi_{\xi_t}\bigg[v(\xi_s)\exp\bigg\{-\int_0^s\frac{\varphi(\xi_s,v(\xi_s))}{v(\xi_s)}ds\bigg\}\bigg]\\&=N_t.\end{aligned}$$

因此, $\{N_t:t\geqslant 0\}$ 是一个非负鞅. □

我们利用鞅 $\{N_t\}$ 定义一个新的概率测度 $\overline{\Pi}_x$:

$$\frac{d\overline{\Pi}_x}{d\Pi_x}\bigg|_{\mathcal{H}_t}=N_t,\quad t\geqslant 0.$$

命题 2.1　对于 $f\in\mathcal{D}_1$, 有

$$\overline{V}_tf(x)=\overline{\Pi}_x\int_0^t\varphi^*(\xi_s,\overline{V}_{t-s}f(\xi_s))ds+\overline{\Pi}_xf(\xi_t), \tag{2.10}$$

其中

$$\varphi^*(x,\lambda):=\frac{\varphi(x,v(x)(1-\lambda))-\varphi(x,v(x))(1-\lambda)}{v(x)},\quad \lambda\in[0,1].$$

证明　由方程 (1.5) 可得对于 $f\in\mathcal{D}_1$, 有

$$V_t(v(1-f))(x)+\Pi_x\int_0^t\varphi(\xi_s,V_{t-s}(v(1-f))(\xi_s))ds=\Pi_xv(\xi_t)(1-f(\xi_t)).$$

因此, 根据 (2.7) 可得

$$v(x)\overline{V}_tf(x)+\Pi_x\int_0^t\varphi(\xi_s,v(\xi_s))-\varphi(\xi_s,v(\xi_s)(1-\overline{V}_{t-s}f(\xi_s)))ds=\Pi_xv(\xi_t)f(\xi_t).$$

故

$$v(x)\overline{V}_t f(x) = \Pi_x \int_0^t v(\xi_s)\varphi^*(\xi_s, \overline{V}_{t-s}f(\xi_s))ds$$
$$- \Pi_x \int_0^t \frac{\varphi(\xi_s, v(\xi_s))}{v(\xi_s)} v(\xi_s)\overline{V}_{t-s}f(\xi_s)ds + \Pi_x v(\xi_t)f(\xi_t).$$

根据 Feynman-Kac 公式可得

$$v(x)\overline{V}_t f(x) = \Pi_x \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \frac{\varphi(\xi_u, v(\xi_u))}{v(\xi_u)}du} v(\xi_s)\varphi^*(\xi_s, \overline{V}_{t-s}f(\xi_s))ds + \Pi_x[\mathrm{e}^{-\int_0^t \frac{\varphi(\xi_s, v(\xi_s))}{v(\xi_s)}ds} v(\xi_t)f(\xi_t)],$$

由此可得 (2.10). □

根据以上准备工作, 下面引入一个与 $\overline{V}_t$ 对应的分枝 Markov 过程. 根据 $\varphi^*(x,\lambda)$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned}
\varphi^*(x,\lambda) &= \frac{\varphi(x, v(x)(1-\lambda)) - \varphi(x, v(x))(1-\lambda)}{v(x)} \\
&= \beta(x)v(x)(\lambda^2 - \lambda) + v(x)^{-1}\int_0^\infty ((\mathrm{e}^{r\lambda v(x)} - 1 + \lambda)\mathrm{e}^{-rv(x)} - \lambda)n(x, dr) \\
&= \beta(x)v(x)\lambda^2 + \sum_{n=2}^\infty \int_0^\infty \frac{v(x)^{n-1}(r\lambda)^n}{n!}\mathrm{e}^{-rv(x)}n(x, dr) \\
&\quad - \lambda\bigg(\beta(x)v(x) + v(x)^{-1}\int_0^\infty (\mathrm{e}^{rv(x)} - 1 - rv(x))\mathrm{e}^{-rv(x)}n(x, dr)\bigg).
\end{aligned}$$

因此可以得到

$$\varphi^*(x,\lambda) = b(x)\bigg(\sum_{n=2}^\infty \lambda^n p_n(x) - \lambda\bigg), \tag{2.11}$$

其中

$$b(x) = \beta(x)v(x) + v(x)^{-1}\int_0^\infty (\mathrm{e}^{rv(x)} - 1 - rv(x))\mathrm{e}^{-rv(x)}n(x, dr),$$
$$p_2(x) = \frac{v(x)}{b(x)}\bigg(\beta(x) + \frac{1}{2}\int_0^\infty r^2\mathrm{e}^{-v(x)r}n(x, dr)\bigg), \tag{2.12}$$
$$p_n(x) = \frac{v^{n-1}(x)}{n!b(x)}\int_0^\infty r^n\mathrm{e}^{-v(x)r}n(x, dr), \quad n > 2. \tag{2.13}$$

容易验证 $\sum_{n=2}^\infty p_n(x) = 1$, 且 $b(x)$ 是一个非负有界函数. 事实上,

$$\begin{aligned}
b(x) &\leqslant \beta(x)v(x) + v(x)^{-1}\int_0^\infty ((rv(x)) \wedge (rv(x))^2)n(x, dr) \\
&\leqslant \beta(x)v(x) + v(x)\int_0^1 r^2 n(x, dr) + \int_1^\infty rn(x, dr) \leqslant M\|v\|_\infty + M.
\end{aligned}$$

同时易得 $b(x) > 0$.

考虑一个分枝 Markov 过程 $\{Z_t, t \geqslant 0; P_\nu\}$. 它的底过程为 $\{\xi_t, t \geqslant 0; \overline{\Pi}_x\}$, 分枝速率函数为 $b(x)$. 当粒子死亡时, 独立地产生随机个后代, 后代的个数的分布为 $\{p_n(x) : n \geqslant 2\}$. 因此, 对于任意的 $g \in \mathcal{B}_b^+(E)$, 有

$$P_{\delta_x}(\mathrm{e}^{-\langle g, Z_t\rangle}) = \overline{V}_t(\mathrm{e}^{-g})(x),$$

并且

$$Q_tg(x) := P_{\delta_x}(\langle g, Z_t\rangle) = \overline{\Pi}_x\bigg(\exp\bigg\{\int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi^*(\xi_s,1)ds\bigg\}g(\xi_t)\bigg) = v(x)^{-1}T_t(vg)(x), \tag{2.14}$$

上式中最后一个等式是根据 φ^* 和 $\overline{\Pi}_x$ 的定义. 因此, 半群 $\{Q_t\}$ 的无穷小生成元的第一特征值为 λ_0, 对应的特征函数为 $v(x)^{-1}\phi_0(x)$. 根据 v 的有界性, $\{Q_t\}$ 同样满足内在 U- 超压缩性, 故而满足文献 [9] 中的条件 (M). 因此, 根据文献 [9, 命题 3.6], 存在非负函数 $\overline{\gamma}_t$ 和非退化随机变量 W^Z, 使得

$$\overline{\gamma}_t\langle v^{-1}\phi_0, Z_t\rangle \to W^Z, \quad P_\nu\text{-a.s.},$$

并且 W^Z 的 Laplace 变换 $\psi^Z(\theta,x) := P_{\delta_x}(\mathrm{e}^{-\theta W^Z})$ $(\theta\in\mathbb{R})$ 是方程 (2.6) 的解. 我们已经知道 Y 的 Laplace 变换 $\psi(\theta,x)$ 也是 (2.6) 的解, 根据文献 [9, 命题 3.8], 存在 $a\in(0,\infty)$ 使得 $(Y,\mathbb{P}_{\delta_x})$ 与 (aW^Z, P_{δ_x}) 同分布. 由于 $p_0(x)=p_1(x)=0$, 因此, Z 的灭绝概率为 0. 根据文献 [9, 命题 5.1、5.10 和 5.11] 中关于 W^Z 的结论, 可得 $(Y,\mathbb{P}_{\delta_x})$ 的相应性质, 进而得到定理 1.3 和 1.4.

在定理 1.4 中, 半群 $\{T_t^*\}$ (定义见第 3.1 小节) 起到了非常重要的作用, 尤其是它的无穷小生成元的第一特征值 λ_0^* 和与第一特征值对应的特征函数. 定理 1.4 还包含一个重要的算子 A, 这里 A 是由 $\mathrm{e}^{-\lambda_0^*t}\overline{V}_tf(x)$ 的极限决定的, 具体定义见 (3.16). 文献 [9] 中半群 $\{\delta\bar{F}_t(0), t\geqslant 0\}$ 与本文的 $\{T_t^*\}$ 是一致的, 算子 $\overline{Q}$ 与算子 A 是一致的, 但是, 文献 [9] 中并未给出这两个量的具体形式. 为了文章结果的完善, 我们没有在证明中直接引用文献 [9] 中的结论. 在第 3.1 小节中, 我们将给出半群 $\{T_t^*\}$ 和算子 A 的定义. 在第 3.2 和 3.3 小节中, 我们将给出定理 1.3 和 1.4 的证明, 这部分的证明思路与文献 [9] 基本一致.

3 主要定理的证明

3.1 算子 $\overline{V}_t$ 的相关估计

本小节将给出算子 $\overline{V}_t$ 的一些估计. 根据这些估计, 利用 (2.6), 进而可以得到 Y 的 Laplace 变换 $\psi(\theta,x)$ 的相关估计. 在以下证明中, C 将代表常数, 并且在不同的位置可能代表不同的常数.

这里首先把在文献 [10] 中得到的在本文中要用到的估计列举出来.

(1) (半群 T_t 的估计) 根据文献 [20, 定理 2.7], 在假设 1.1 和 1.2 下, 对任意 $\delta>0$, 存在常数 $\gamma=\gamma(\delta)>0$ 和 $c=c(\delta)>0$, 使得对任意 $(t,x,y)\in[\delta,\infty)\times E\times E$, 有

$$|\mathrm{e}^{-\lambda_0t}q(t,x,y)-\phi_0(x)\psi_0(y)| \leqslant c\mathrm{e}^{-\gamma t}\phi_0(x)\psi_0(y). \tag{3.1}$$

取充分大的 t 使得 $c\mathrm{e}^{-\gamma t}<\frac{1}{2}$, 则有

$$\mathrm{e}^{-\lambda_0t}q(t,x,y) \geqslant \frac{1}{2}\phi_0(x)\psi_0(y).$$

由于 $q(t,x,\cdot)\in L^1(E,m)$, 我们有 $\psi_0\in L^1(E,m)$. 因此, 如果 $f\in\mathcal{B}_b^+(E)$, 则 $\langle f,\psi_0\rangle_m<\infty$. 从而, 对任意 $f\in\mathcal{B}_b^+(E)$ 和 $(t,x)\in[\delta,\infty)\times E$, 有

$$|\mathrm{e}^{-\lambda_0t}T_tf(x)-\langle f,\psi_0\rangle_m\phi_0(x)| \leqslant c\mathrm{e}^{-\gamma t}\langle|f|,\psi_0\rangle_m\phi_0(x), \tag{3.2}$$

$$(1-c\mathrm{e}^{-\gamma t})\langle|f|,\psi_0\rangle_m\phi_0(x) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_0t}T_t|f|(x) \leqslant (1+c)\langle|f|,\psi_0\rangle_m\phi_0(x). \tag{3.3}$$

(2) (函数 v 与 ϕ_0 是可比的) 根据文献 [10, 引理 4.4], 有

$$v(x)=V_1(v)(x)\geqslant CT_1(v)(x)\geqslant C\phi_0(x). \tag{3.4}$$

同时,

$$v(x)=V_1v(x)\leqslant T_1v(x)\leqslant C\phi_0(x). \tag{3.5}$$

(3) 根据文献 [10, 命题 5.3 和引理 4.6], 我们有

$$\begin{aligned}&\gamma_t=\langle\Phi(\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}),\psi_0\rangle_m,\\&\Phi(\mathrm{e}^{-\lambda_0 t},x)=(1+h_t(x))\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}L(t)\phi_0(x),\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中 $\lim_{t\to\infty}\|h_t\|_\infty=0$.

定义半群 $P_t^{\varphi'}$:

$$P_t^{\varphi'}f(x):=\Pi_x(f(\xi_t)\mathrm{e}^{-\int_0^t\partial_\lambda\varphi(\xi_s,v(\xi_s))ds}). \tag{3.7}$$

根据 (1.3) 和 v 的有界性可知, $\partial_\lambda\varphi(x,v(x))$ 是有界的, 因此, 采用与等式 (1.11) 上面段落中相同的讨论, 半群 $(P_t^{\varphi'})$ 满足内在 U- 超压缩性. 令 λ_0^* 是 $(P_t^{\varphi'})$ 的无穷小生成元的最大 (单重) 特征根, 令 $\overline{\phi}_0$ 和 $\overline{\psi}_0$ 分别是与 λ_0^* 对应的 $P_t^{\varphi'}$ 的无穷小生成元和它的对偶半群的无穷小生成元的特征函数. $\overline{\phi}_0$ 和 $\overline{\psi}_0$ 可以选取为处处严格正的连续函数且满足 $\|\overline{\phi}_0\|_2=1$ 和 $\langle\overline{\phi}_0,\overline{\psi}_0\rangle_m=1$. 同时 $\overline{\phi}_0$ 是有界函数, 且 $\overline{\psi}_0\in L^1(E,m)$.

由文献 [20, 定理 2.7] 可知, 在假设 1.1 和 1.2 成立时, 对任意的 $\delta>0$, 存在常数 $\gamma=\gamma(\delta)>0$ 和 $c=c(\delta)>0$ 使得对任意 $f\in\mathcal{B}_b^+(E)$ 和 $(t,x)\in[\delta,\infty)\times E$, 有

$$|\mathrm{e}^{-\lambda_0^* t}T_t^{\varphi'}f(x)-\langle f,\overline{\psi}_0\rangle_m\overline{\phi}_0(x)|\leqslant c\mathrm{e}^{-\gamma t}\langle|f|,\overline{\psi}_0\rangle_m\overline{\phi}_0(x). \tag{3.8}$$

在此基础上, 再定义新半群

$$T_t^*f(x):=v(x)^{-1}P_t^{\varphi'}(vf)(x)=v(x)^{-1}\Pi_x((vf)(\xi_t)\mathrm{e}^{-\int_0^t\partial_\lambda\varphi(\xi_s,v(\xi_s))ds})=\overline{\Pi}_x(f(\xi_t)\mathrm{e}^{-\int_0^t b(\xi_s)ds}).$$

令 $\phi_0^*(x):=v(x)^{-1}\overline{\phi}_0(x)$ 和 $\psi_0^*(x):=v(x)\overline{\psi}_0(x)$. 因此, 根据 (3.8) 可得

$$|\mathrm{e}^{-\lambda_0^* t}T_t^*f(x)-\langle f,\psi_0^*\rangle_m\phi_0^*(x)|\leqslant c\mathrm{e}^{-\gamma t}\langle|f|,\psi_0^*\rangle_m\phi_0^*(x). \tag{3.9}$$

注意到, $\partial_\lambda\varphi(x,\lambda)\geqslant-\alpha(x)$, 因此,

$$\overline{\phi}_0(x)=\mathrm{e}^{\lambda_0^*}P_1^{\varphi'}(\overline{\phi}_0)(x)\leqslant CT_1(\overline{\phi}_0)(x)\leqslant C\phi_0(x).$$

由 (3.4) 得 $\|\phi_0^*\|_\infty<\infty$. 同时易得 $\psi_0^*\in L^1(E,m)$.

可以验证, 本文中定义的半群 $\{T_t^*,t\geqslant 0\}$ 与文献 [9] 中定义的半群 $\{\delta\bar{F}_t(0),t\geqslant 0\}$ 是一致的, 其中 $\{\delta\bar{F}_t(0),t\geqslant 0\}$ 是通过 Fréchet 导数定义的, 文献 [9] 并未给出 $\delta\bar{F}_t(0)$ 的表达式.

引理 3.1 半群 T_t^* 的无穷小生成元的最大特征根是负的, 即

$$\lambda_0^*<0.$$

证明 根据 $V_t v(x) = v(x)$ 和文献 [21, 引理 4.1], 可得

$$\mathbb{P}_{\delta_x}(\langle f, X_t\rangle \mathrm{e}^{-\langle v, X_t\rangle}) = \Pi_x(f(\xi_t)\mathrm{e}^{-\int_0^t \partial_z \varphi(\xi_s, v(\xi_s))ds})\mathrm{e}^{-v(x)}.$$

因此,

$$T_t^* f(x) = v(x)^{-1}\mathrm{e}^{v(x)}\mathbb{P}_{\delta_x}(\langle vf, X_t\rangle \mathrm{e}^{-\langle v, X_t\rangle}). \tag{3.10}$$

根据文献 [10, 引理 3.2] 可知,

$$\mathbb{P}_{\delta_x}\Big(\lim_{t\to\infty}\langle v, X_t\rangle = 0\Big) = 1 - \mathbb{P}_{\delta_x}\Big(\lim_{t\to\infty}\langle v, X_t\rangle = \infty\Big) = \mathrm{e}^{-v(x)}.$$

因此, 根据控制收敛定理可得

$$\lim_{t\to\infty} T_t^* 1(x) = 0.$$

再结合 (3.9), 立即可得 $\lambda_0^* < 0$. □

引理 3.2 对任意的 $a \in [0,1)$, 存在常数 $c(a) > 0$, 使得对于 $t \geqslant 1$, 有

$$\overline{V}_t f(x) \leqslant c(a)\mathrm{e}^{\lambda_0^*(1-a)t}\phi_0^*(x)^{1-a}, \quad \forall f \in \mathcal{D}_a.$$

证明 注意到

$$\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a}\frac{\varphi^*(x,\lambda)}{\lambda} = \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant a} b(x)\Bigg(\sum_{n=2}^{\infty} p_n(x)\lambda^{n-1} - 1\Bigg) \leqslant b(x)(a-1).$$

由于对任意 $\lambda \in [0,1]$, 有 $\varphi^*(x,\lambda) \leqslant 0$, 因此, 根据 (2.10) 可得, 对于 $f \in \mathcal{D}_1$, 有

$$\overline{V}_t f(x) \leqslant \overline{\Pi}_x f(x) \leqslant \|f\|_\infty. \tag{3.11}$$

因此, 对于 $f \in \mathcal{D}_a$, 有

$$\varphi^*(x, \overline{V}_{t-s}f(x)) \leqslant b(x)(a-1)\overline{V}_{t-s}f(x). \tag{3.12}$$

根据 (2.10) 和 Feynman-Kac 公式可得, 对于 $t \geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}
\overline{V}_t f(x) &= \overline{\Pi}_x \int_0^t \mathrm{e}^{-(1-a)\int_0^s b(\xi_u)du}[\varphi^*(\xi_s, \overline{V}_{t-s}f(\xi_s)) + (1-a)b(\xi_s)\overline{V}_{t-s}f(\xi_s)]ds \\
&\quad + \overline{\Pi}_x[\mathrm{e}^{-(1-a)\int_0^t b(\xi_s)ds}f(\xi_t)] \\
&\leqslant a\overline{\Pi}_x[\mathrm{e}^{-(1-a)\int_0^t b(\xi_s)ds}] \leqslant a[\overline{\Pi}_x[\mathrm{e}^{-\int_0^t b(\xi_s)ds}]]^{1-a} \\
&= a[T_t^* 1(x)]^{1-a} \leqslant a(1+c)\mathrm{e}^{\lambda_0^*(1-a)t}\langle 1, \psi_0^*\rangle_m^{1-a}\phi_0^*(x)^{1-a},
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式是由 (3.9) 得到的. □

引理 3.3 对任意 $f \in \mathcal{D}_1$, 有

$$T_t^* f(x) \leqslant \overline{V}_t f(x) \leqslant (1 + \|f\|_\infty \mathrm{e}^{\|b\|_\infty t})T_t^* f(x).$$

证明 根据 (3.11) 可得

$$\overline{V}_t f(x) \leqslant \overline{\Pi}_x f(x) \leqslant \mathrm{e}^{\|b\|_\infty t} T_t^* f(x). \tag{3.13}$$

由 (2.10), 利用 Feynman-Kac 公式可得

$$\overline{V}_t f(x) = \int_0^t T_s^*[\varphi_0^*(\cdot, \overline{V}_{t-s} f)](x) ds + T_t^*(f)(x), \tag{3.14}$$

其中 $\varphi_0^*(x,\lambda) = \varphi^*(x,\lambda) + b(x)\lambda \geqslant 0$. 因此, $\overline{V}_t f(x) \geqslant T_t^* f(x)$. 注意到

$$\varphi_0^*(x,\lambda) \leqslant b(x)\lambda^2, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \tag{3.15}$$

结合 (3.11) 和 (3.13), 可得

$$\varphi_0^*(x, \overline{V}_{t-s} f(x)) \leqslant b(x) \overline{V}_{t-s} f(x)^2 \leqslant \|f\|_\infty \|b\|_\infty \mathrm{e}^{\|b\|_\infty (t-s)} T_{t-s}^* f(x).$$

因此,

$$\int_0^t T_s^*[\varphi_0^*(\cdot, \overline{V}_{t-s} f)](x) ds \leqslant \|f\|_\infty \int_0^t \|b\|_\infty \mathrm{e}^{\|b\|_\infty (t-s)} ds T_t^* f(x) \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{e}^{\|b\|_\infty t} T_t^* f(x).$$

综上可得

$$T_t^* f(x) \leqslant \overline{V}_t f(x) \leqslant (1 + \|f\|_\infty \mathrm{e}^{\|b\|_\infty t}) T_t^* f(x).$$

证毕. □

对于任意的 $f \in \mathcal{D}_1$, 定义

$$A(f) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda_0^* s} \langle \varphi_0^*(\cdot, \overline{V}_s f), \psi_0^* \rangle_m ds + \langle f, \psi_0^* \rangle_m. \tag{3.16}$$

引理 3.4 对于任意的 $a \in [0,1)$ 和 $f \in \mathcal{D}_a$, 有

$$\sup_{t>0} \mathrm{e}^{-\lambda_0^* t} \|\overline{V}_t f\|_\infty < \infty.$$

同时,

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_0^* t} \overline{V}_t f(x) = A(f) \phi_0^*(x),$$

其中 $A(f)$ 由定义 (3.16) 给出.

证明 注意到 $\phi_0^*(x)$ 有界, 根据引理 3.2, 存在 $s_0 > 1$ 使得

$$\overline{V}_{s_0} f(x) \leqslant \frac{1}{4}, \quad \forall f \in \mathcal{D}_a.$$

由此再利用引理 3.2 可得, 对于任意的 $s > s_0 + 1$, 有

$$\overline{V}_s f(x) = \overline{V}_{s-s_0}(\overline{V}_{s_0} f)(x) \leqslant \overline{V}_{s-s_0}\left(\frac{1}{4}\right)(x) \leqslant C \mathrm{e}^{3\lambda_0^* s/4} \phi_0^*(x)^{3/4}. \tag{3.17}$$

根据 (3.14) 可得, 对于任意的 $t > s_0 + 1$, 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\lambda_0^* t}\overline{V}_t f(x) &= \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda_0^* s}\mathrm{e}^{-\lambda_0^*(t-s)}T_{t-s}^*[\varphi_0^*(\cdot,\overline{V}_s f)](x)ds + \mathrm{e}^{-\lambda_0^* t}T_t^*(f)(x) \\
&= \left(\int_0^{s_0+1} + \int_{s_0+1}^t\right)\mathrm{e}^{-\lambda_0^* s}\mathrm{e}^{-\lambda_0^*(t-s)}T_{t-s}^*[\varphi_0^*(\cdot,\overline{V}_s f)](x)ds + \mathrm{e}^{-\lambda_0^* t}T_t^*(f)(x) \\
&=: J_1(t,x) + J_2(t,x) + J_3(t,x). \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

对于 J_3, 由 (3.9) 容易得到 $J_3(t,x) \leqslant C\langle f,\psi_0^*\rangle_m \phi_0^*(x)$, 并且

$$\lim_{t\to\infty} J_3(t,x) = \langle f,\psi_0^*\rangle_m \phi_0^*(x).$$

对于 $J_2(t,x)$, 利用 (3.17) 和 (3.15), 对于 $t > s > s_0 + 1$, 有

$$\mathrm{e}^{-\lambda_0^*(t-s)}|T_{t-s}^*[\varphi_0^*(\cdot,\overline{V}_s f)](x)| \leqslant C\mathrm{e}^{3\lambda_0^* s/2}\mathrm{e}^{-\lambda_0^*(t-s)}T_{t-s}^*[(\phi_0^*)^{3/2}](x) \leqslant C\mathrm{e}^{3\lambda_0^* s/2}\phi_0^*(x).$$

因此,

$$|J_2(t,x)| \leqslant C\int_{s_0+1}^t \mathrm{e}^{\lambda_0^* s/2}ds\phi_0^*(x) \leqslant C\phi_0^*(x).$$

同时根据控制收敛定理可得

$$\lim_{t\to\infty} J_2(t,x) = \int_{s_0+1}^\infty \mathrm{e}^{-\lambda_0^* s}\langle\varphi_0^*(\cdot,\overline{V}_s f),\psi_0^*\rangle_m ds\phi_0^*(x).$$

最后我们处理 $J_1(t,x)$. 由于 $\overline{V}_s f(x) \leqslant 1$, 因此, $\varphi_0^*(x,\overline{V}_s f(x)) \leqslant \|b\|_\infty$. 因此, 对于 $t-s > t-s_0 > 1$, 我们有

$$\mathrm{e}^{-\lambda_0^*(t-s)}|T_{t-s}^*[\varphi_0^*(\cdot,\overline{V}_s f)](x)| \leqslant C\mathrm{e}^{-\lambda_0^*(t-s)}T_{t-s}^* 1(x) \leqslant C\phi_0^*(x).$$

因此,

$$J_1(t,x) < C\phi_0^*(x),$$

并且根据控制收敛定理可得

$$\lim_{t\to\infty} J_1(t,x) = \int_0^{s_0+1} \mathrm{e}^{-\lambda_0^* s}\langle\varphi_0^*(\cdot,\overline{V}_s f),\psi_0^*\rangle_m ds\phi_0^*(x).$$

综上, 结论成立. □

3.2 定理 1.3 的证明

根据引理 2.2, 要证明定理 1.3, 只需证明 Y 具有密度 $g_\mu(y)$, 并且对所有的 $y > 0$ 都成立 $g_\mu(y) > 0$. 本小节将通过讨论 Y 的特征函数的性质, 来证明 Y 的密度函数存在. 根据 (2.6), 同样有

$$\psi(\mathrm{i}\theta,x) = \overline{V}_t(\psi(\mathrm{i}\theta\mathrm{e}^{-\lambda_0 t},\cdot))(x), \quad \theta\in\mathbb{R}. \qquad (3.19)$$

为了简化, 下面对任意 $\theta\in\mathbb{R}$, 简记函数 $\psi(\mathrm{i}\theta,\cdot)$ 为 $\psi(\mathrm{i}\theta)$; 类似地, 对任意 $\theta > 0$, 简记函数 $\psi(\theta,\cdot)$ 为 $\psi(\theta)$. 下面的引理 3.5 和 3.6 的证明与文献 [9] 中的证明基本一致.

引理 3.5 对于任意的不包含 0 的有界闭区间 I, 有

$$\sup_{\theta\in I}\|\psi(\mathrm{i}\theta)\|_\infty<1.$$

证明 容易得到

$$\begin{aligned}|\|\psi(\mathrm{i}\theta)\|_\infty-\|\psi(\mathrm{i}(\theta+\epsilon))\|_\infty|&\leqslant\|\psi(\mathrm{i}\theta)-\psi(\mathrm{i}(\theta+\epsilon))\|_\infty\\&=\|\overline{V}_1(\psi(\mathrm{i}\theta\mathrm{e}^{-\lambda_0}))-\overline{V}_1(\psi(\mathrm{i}(\theta+\epsilon)\mathrm{e}^{-\lambda_0}))\|_\infty.\end{aligned}$$

熟知, 对于任意的复数 $|x_j|\leqslant 1$ 和 $|y_j|\leqslant 1$, 有

$$\left|\prod_{j=1}^n x_j-\prod_{j=1}^n y_j\right|\leqslant\sum_{j=1}^n|x_j-y_j|.$$

对任意 E 上的无穷范数小于等于 1 的复值函数 f, 有

$$\overline{V}_tf(x)=P_{\delta_x}\prod_{u\in\mathcal{L}_t}f(\xi_t(u)),$$

其中 $\mathcal{L}_t$ 为分枝 Markov 过程 Z 在 t 时刻存活的粒子, $\xi_t(u)$ 为粒子 u 在 t 时刻的位置. 因此,

$$\begin{aligned}&|\overline{V}_1(\psi(\mathrm{i}\theta\mathrm{e}^{-\lambda_0}))(x)-\overline{V}_1(\psi(\mathrm{i}(\theta+\epsilon)\mathrm{e}^{-\lambda_0}))(x)|\\&\quad\leqslant P_{\delta_x}\langle|\psi(\mathrm{i}\theta\mathrm{e}^{-\lambda_0})-\psi(\mathrm{i}(\theta+\epsilon)\mathrm{e}^{-\lambda_0})|,Z_1\rangle\\&\quad=v(x)^{-1}T_1(v|\psi(i\theta e^{-\lambda_0})-\psi(i(\theta+\epsilon)e^{-\lambda_0})|)(x)\\&\quad\leqslant C\langle|\psi(\mathrm{i}\theta\mathrm{e}^{-\lambda_0})-\psi(\mathrm{i}(\theta+\epsilon)\mathrm{e}^{-\lambda_0})|,\psi_0\rangle_m\to 0,\quad\epsilon\to 0.\end{aligned}$$

上面倒数第二个等式是由 (2.14) 得到的, 最后一个不等号用到了 (3.13) 和 (3.4). 最后的极限是根据特征函数的连续性和控制收敛定理得到的. 因此, $\|\psi(\mathrm{i}\theta)\|_\infty$ 关于 θ 是连续的. 下面只需要证明, 对于任意的 $\theta\neq 0$, 有 $\|\psi(\mathrm{i}\theta)\|_\infty<1$.

我们用反证法. 假设对于所有的 $\theta\in\mathbb{R}$, $x\in E$, 有 $|\psi(\mathrm{i}\theta,x)|=1$, 则根据特征函数的唯一性可得, 对于 $x\in E$, 存在取值为正数的函数 $c(x)$, 使得 $P_{\delta_x}(Y=c(x))=1$, 即 $\psi(\theta,x)=\mathrm{e}^{-\theta c(x)}$. 根据 (2.6) (其中 θ 被 $\theta\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$ 代替), 有

$$\exp\{-\theta\mathrm{e}^{\lambda_0 t}c(x)\}=P_{\delta_x}(\mathrm{e}^{-\theta\langle c,Z_t\rangle}),$$

即随机变量 $\langle c,Z_t\rangle$ 的 Laplace 变换与 $\mathrm{e}^{\lambda_0 t}c(x)$ 的相同, 因此, $P_{\delta_x}(\langle c,Z_t\rangle=\mathrm{e}^{\lambda_0 t}c(x))=1$. 但是, 根据分枝 Markov 过程的定义可知, $\langle c,Z_t\rangle$ 不会集中在一点, 矛盾. 因此存在 $\theta_0\in\mathbb{R}$, $x_0\in E$ 使得 $|\psi(\mathrm{i}\theta_0,x_0)|<1$. 因此存在 $\delta=\delta(x_0)>0$, 使得 $|\psi(\mathrm{i}\theta,x_0)|<1$, $|\theta|\in(0,\delta)$. 由于 $x\to\psi(\mathrm{i}\theta,x)$ 是连续函数, 因此, 对于 $|\theta|\in(0,\delta)$, 有

$$m(y\in E:|\psi(\mathrm{i}\theta,y)|<1)>0.$$

对于任意的无穷范数小于等于 1 的复值函数 f, 有

$$|\overline{V}_tf(x)|=\left|P_{\delta_x}\prod_{u\in\mathcal{L}_t}f(\xi_t(u))\right|\leqslant P_{\delta_x}\prod_{u\in\mathcal{L}_t}|f|(\xi_t(u))=\overline{V}_t|f|(x).$$

因此, 根据 (3.13), 可得

$$1-|\psi(\mathrm{i}\theta \mathrm{e}^{\lambda_0 t},x)|\geqslant 1-\overline{V}_t(|\psi(\mathrm{i}\theta)|)(x)\geqslant \overline{\Pi}_x(1-|\psi(\mathrm{i}\theta,\xi_t)|).$$

由 (1.3) 可得

$$\frac{\varphi(x,v(x))}{v(x)}\leqslant -\alpha(x)+\beta(x)v(x)+\frac{1}{2}v(x)\int_0^1 r^2 n(x,dr)+\int_1^\infty rn(x,dr)\leqslant -\alpha(x)+M(\|v\|_\infty+1).$$

假设 c 和 γ 是 (3.3) 中的常数. 对于足够大的 t, 有 $1-c\mathrm{e}^{-\gamma t}>0$, 从而, 由 $\overline{\Pi}_x$ 的定义, 有

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}_x(1-|\psi(\mathrm{i}\theta,\xi_t)|)&\geqslant v(x)^{-1}\mathrm{e}^{-M(\|v\|_\infty+1)t}T_t(v(1-|\psi(\mathrm{i}\theta)|))(x)\\&\geqslant \mathrm{e}^{-M(\|v\|_\infty+1)t}(1-c\mathrm{e}^{-\gamma t})\mathrm{e}^{\lambda_0 t}\langle v(1-|\psi(\mathrm{i}\theta)|),\psi_0\rangle_m\frac{\phi_0(x)}{v(x)},\end{aligned}$$

上面最后一个不等号利用了 (3.3).

根据 (3.5), 对 $|\theta|\in(0,\delta)$ 和足够大的 t, 有 $\|\psi(\mathrm{i}\theta\mathrm{e}^{\lambda_0 t})\|_\infty<1$. 因此, 对任意的 $\theta\neq 0$, 有 $\|\psi(\mathrm{i}\theta)\|_\infty<1$.

综上, 结论成立. □

引理 3.6 对于任意的 $\delta\in(0,-\frac{\lambda_0^*}{\lambda_0})$, 存在常数 $C>0$, 使得对于足够大的 $|\theta|$, 有

$$\|\psi(\mathrm{i}\theta)\|_\infty\leqslant C|\theta|^{-\delta}.$$

证明 对于任意的 $\delta\in(0,-\frac{\lambda_0^*}{\lambda_0})$, 存在 $\epsilon\in(0,1)$, 使得

$$(1+\epsilon)\mathrm{e}^{\lambda_0^*}\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_0\delta}. \tag{3.20}$$

根据引理 3.2 和 3.5 可得, 存在 $j\geqslant 1$ 使得对于 $k\geqslant j$, 有

$$\sup_{\theta\in[1,\mathrm{e}^{\lambda_0}]}\|\overline{V}_k(|\psi(\mathrm{i}\theta)|)\|_\infty\leqslant \epsilon\mathrm{e}^{-\|b\|_\infty}. \tag{3.21}$$

因此, 根据引理 3.3, 对于 $\theta\in[1,\mathrm{e}^{\lambda_0}]$ 和 $n\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}|\overline{V}_{n+j}(\psi(\mathrm{i}\theta))(x)|&\leqslant \overline{V}_{n+j}(|\psi(\mathrm{i}\theta)|)(x)=\overline{V}_1\overline{V}_{n+j-1}(|\psi(\mathrm{i}\theta)|)(x)\\&\leqslant(1+\epsilon)T_1^*(\overline{V}_{n+j-1}(|\psi(\mathrm{i}\theta)|))(x).\end{aligned}$$

通过迭代和 (3.9) 可得, 对于 $\theta\in[1,\mathrm{e}^{\lambda_0}]$, 利用 (3.20) 得

$$\begin{aligned}|\overline{V}_{n+j}(\psi(\mathrm{i}\theta))(x)|&\leqslant(1+\epsilon)^nT_n^*(\overline{V}_j(|\psi(\mathrm{i}\theta)|))(x)\\&\leqslant(1+\epsilon)^nT_n^*(1)(x)\leqslant(1+c)(1+\epsilon)^n\mathrm{e}^{\lambda_0^*n}\langle 1,\psi_0^*\rangle_m\|\phi_0^*\|_\infty\\&\leqslant(1+c)\langle 1,\psi_0^*\rangle_m\|\phi_0^*\|_\infty\mathrm{e}^{\lambda_0\delta(j+1)}\mathrm{e}^{-\lambda_0\delta(n+j)}\theta^{-\delta}.\end{aligned}$$

根据 $\psi(\mathrm{i}\theta\mathrm{e}^{\lambda_0(n+j)})(x)=\overline{V}_{n+j}(\psi(\mathrm{i}\theta))(x)$, 由此可得

$$\|\psi(\mathrm{i}\theta)\|_\infty\leqslant C|\theta|^{-\delta},\quad \theta\geqslant \mathrm{e}^{\lambda_0 j}.$$

又由于 $\psi(-\mathrm{i}\theta)(x)=\overline{\psi(\mathrm{i}\theta)(x)}$, 因此,

$$\|\psi(\mathrm{i}\theta)\|_\infty\leqslant C|\theta|^{-\delta},\quad \theta\leqslant -\mathrm{e}^{\lambda_0 j}.$$

综上, 引理结论成立. □

命题 3.1 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, Y 是绝对连续型随机变量, 即存在密度函数 $g_\mu(y)$.

证明 根据注 2.1, 只需证明在 $\mu=\delta_x$ 时结论成立. 根据 $\psi(\theta,x)=\overline{V}_t(\psi(\theta\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}))(x)$ 可得

$$Y\overset{d}{=}\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\sum_{u\in\mathcal{L}_t}Y^u,$$

其中 $\mathcal{L}_t$ 为分枝 Markov 过程 Z 在 t 时刻存活的粒子. 在给定 Z_t 的条件下, $\{Y^u,u\in\mathcal{L}_t\}$ 是一族独立随机变量并且 $Y^u\overset{d}{=}(Y,\mathbb{P}_{\delta_{\xi_t(u)}})$.

取定 $\delta\in(0,-\frac{\lambda_0^*}{\lambda_0})$ 和 $K>0$ 使得 $K\delta>1$. 对于任意的 Lebesgue 零测集 $B\subset(0,\infty)$, 有

$$\mathbb{P}_{\delta_x}(Y\in B)\leqslant P_{\delta_x}(\|Z_t\|\leqslant K)+\sum_{n=K+1}^{\infty}P_{\delta_x}\left(\|Z_t\|=n,\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\sum_{u\in\mathcal{L}_t}Y^u\in B\right).$$

在给定 Z_t 并且 $\|Z_t\|=n>K$ 时, 对足够大的 $|\theta|$, 有

$$|P_{\delta_x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\sum_{u\in\mathcal{L}_t}Y^u}\mid Z_t)|\mathbf{1}_{\|Z_t\|=n}\leqslant C^n|\theta|^{-\delta n},$$

从而, $\sum_{u\in\mathcal{L}_t}Y^u$ 的特征函数 L^1 可积. 因此, $\sum_{u\in\mathcal{L}_t}Y^u$ 存在密度函数, 从而,

$$P_{\delta_x}\left(\|Z_t\|=n,\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\sum_{u\in\mathcal{L}_t}Y^u\in B\right)=0.$$

综上有

$$\mathbb{P}_{\delta_x}(Y\in B)\leqslant P_{\delta_x}(\|Z_t\|\leqslant K).$$

令 $t\to\infty$, 立即可得 $\mathbb{P}_{\delta_x}(Y\in B)=0$, 即 Y 的分布关于 Lebesgue 测度是绝对连续的, 因此存在密度函数. □

命题 3.2 对于任意的非零测度 $\mu\in\mathcal{M}_F(E)$, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, Y 的密度函数在 $(0,\infty)$ 上是恒正的.

证明 由于 $\{Y,\mathbb{P}_{\delta_x}\}$ 与 $\{aW^Z,P_{\delta_x}\}$ 同分布, 其中 $a>0$ 是常数, 再结合注 2.1, 只需证明在概率测度 P_{δ_x} 下, W^Z 的密度函数在 $(0,\infty)$ 上都是正的.

文献 [9, 命题 5.6] 中已经证明, 对于满足一定条件的分枝扩散过程, W^Z 的密度函数在 $(0,\infty)$ 上都是正的. 对于本文中的分枝 Markov 过程 $\{Z_t\}$, 利用相同的方法, 可以证明结论同样成立. 这里省略详细的证明. □

定理 1.3 的证明 结合引理 2.2、命题 3.1 和 3.2 立即可得, 在概率测度 $\mathbb{P}_\mu$ 下, W 的分布函数在 $(0,\infty)$ 上是绝对连续的, 并且密度函数 f_μ 满足, 对于任意的 $y>0$, 有

$$f_\mu(y)\geqslant g_\mu(y)\langle v,\mu\rangle\mathrm{e}^{-\langle v,\mu\rangle}>0.$$

证毕. □

3.3 定理 1.4 的证明

回顾 $\epsilon_0=\frac{-\lambda_0^*}{\lambda_0}$.

第一部分, 我们先讨论小值概率问题. 根据引理 3.4 可得

$$\mathrm{e}^{-\lambda_0^* t}\psi(\mathrm{e}^{\lambda_0 t},x)=\mathrm{e}^{-\lambda_0^* t}\overline{V}_t(\psi(1))(x)\to A(\psi(1))\phi_0^*(x),$$

即 $\lim_{\theta\to\infty}\theta^{\epsilon_0}\psi(\theta,x)=A(\psi(1))\phi_0^*(x)$. 经计算知, 当 $\theta\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\mu(\mathrm{e}^{-\theta W}\mid W>0)&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\langle v,\mu\rangle}}(\mathrm{e}^{-\langle\Phi(\theta),\mu\rangle}-\mathrm{e}^{-\langle v,\mu\rangle})\\&=\frac{1}{\mathrm{e}^{\langle v,\mu\rangle}-1}(\mathrm{e}^{\langle\psi(\theta)v,\mu\rangle}-1)\sim\frac{1}{\mathrm{e}^{\langle v,\mu\rangle}-1}\langle\psi(\theta)v,\mu\rangle.\end{aligned}$$

综上可知,

$$\lim_{\theta\to\infty}\theta^{\epsilon_0}\mathbb{P}_\mu(\mathrm{e}^{-\theta W}\mid W>0)=\frac{1}{\mathrm{e}^{\langle v,\mu\rangle}-1}\lim_{\theta\to\infty}\theta^{\epsilon_0}\langle\psi(\theta)v,\mu\rangle=\frac{1}{\mathrm{e}^{\langle v,\mu\rangle}-1}A(\psi(1))\langle v\phi_0^*,\mu\rangle.$$

因此, 根据 Tauberian 定理可得

$$\lim_{r\to0}r^{-\epsilon_0}\mathbb{P}_\mu(W\leqslant r\mid W>0)=\frac{1}{\mathrm{e}^{\langle v,\mu\rangle}-1}A(\psi(1))\frac{\langle v\phi_0^*,\mu\rangle}{\Gamma(\epsilon_0+1)}.$$

因此, $\lim_{r\to0}r^{-\epsilon_0}\mathbb{P}_\mu(0<W\leqslant r)=\mathrm{e}^{-\langle v,\mu\rangle}A(\psi(1))\langle v\phi_0^*,\mu\rangle/\Gamma(\epsilon_0+1)$.

第二部分, 我们讨论尾概率问题. 令 $G(s):=\int_0^s\mathbb{P}_\mu(W>r)dr$, 则 G 的 Laplace 变换为

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\theta r}dG(r)&=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\theta r}\mathbb{P}_\mu(W>r)dr=\theta^{-1}\left(1-\theta\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\theta r}\mathbb{P}_\mu(W\leqslant r)dr\right)\\&=\theta^{-1}(1-\mathbb{P}_\mu(\mathrm{e}^{-\theta W}))=\theta^{-1}(1-\mathrm{e}^{-\langle\Phi(\theta),\mu\rangle}).\end{aligned}$$

根据 (3.6), 可得

$$\lim_{\theta\to0}\theta^{-1}\widetilde{L}(\theta^{-1})^{-1}\Phi(\theta,x)=\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}L(t)^{-1}\Phi(\mathrm{e}^{-\lambda_0 t},x)=\phi_0(x),$$

其中 $L(t)$ 和 $\widetilde{L}$ 的定义见 (1.14) 和 (1.15). 因此,

$$\lim_{\theta\to0}\widetilde{L}(\theta^{-1})^{-1}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\theta r}dG(r)=\lim_{\theta\to0}\theta^{-1}\widetilde{L}(\theta^{-1})^{-1}\langle\Phi(\theta),\mu\rangle=\langle\phi_0,\mu\rangle.$$

根据 Tauberian 定理可得 $\lim_{r\to\infty}\widetilde{L}(r)^{-1}G(r)=\langle\phi_0,\mu\rangle$. 因此, 根据文献 [22] 可得

$$\lim_{r\to\infty}r\widetilde{L}(r)^{-1}\mathbb{P}_\mu(W>r)=0.$$

致谢 感谢两位审稿人对本文提出的宝贵建议.

参考文献

1 Seneta E. On recent theorems concerning the supercritical Galton-Watson process. Ann Math Statist, 1968, 39: 2098–2102
2 Heyde C C. Extension of a result of Seneta for the super-critical Galton-Watson process. Ann Math Statist, 1970, 41: 739–742
3 Harris T E. The Theory of Branching Processes. Berlin: Springer, 1963
4 Stigum B P. A theorem on the Galton-Watson process. Ann Math Statist, 1966, 37: 695–698

5 Athreya K B. On the absolute continuity of the limit random variable in the supercritical Galton-Watson branching process. Proc Amer Math Soc, 1971, 30: 563–565
6 Mörters P, Ortgiese M. Small value probabilities via the branching tree heuristic. Bernoulli, 2008, 14: 277–299
7 Biggins J D, Bingham N H. Large deviations in the supercritical branching process. Adv in Appl Probab, 1993, 25: 757–772
8 Jones O D. Large deviations for supercritical multitype branching processes. J Appl Probab, 2004, 41: 703–720
9 Hering H. The non-degenerate limit for supercritical branching diffusions. Duke Math J, 1978, 45: 561–600
10 Ren Y-X, Song R, Zhang R. Supercritical superprocesses: Proper normalization and non-degenerate strong limit. Sci China Math, 2019, in press
11 Li Z. Measure-Valued Branching Markov Processes. Heidelberg: Springer, 2011
12 Dynkin E B. Superprocesses and partial differential equations. Ann Probab, 1993, 21: 1185–1262
13 Ren Y-X, Song R, Zhang R. Central limit theorems for supercritical branching nonsymmetric Markov processes. Ann Probab, 2017, 45: 564–623
14 Schaefer H H. Banach Lattices and Positive Operators. New York: Springer, 1974
15 Ren Y-X, Song R, Zhang R. Limit theorems for some critical superprocesses. Illinois J Math, 2015, 59: 235–276
16 Davies E B, Simon B. Ultracontractivity and the heat kernel for Schrödinger operators and Dirichlet Laplacians. J Funct Anal, 1984, 59: 335–395
17 Liu R L, Ren Y-X, Song R. $L\log L$ criterion for a class of superdiffusions. J Appl Probab, 2009, 46: 479–496
18 Chen Z Q, Ren Y-X, Yang T. Skeleton decomposition and law of large numbers for supercritical superprocesses. Acta Appl Math, 2019, 159: 225–285
19 Eckhoff M, Kyprianou A E, Winkel M. Spines, skeletons and the strong law of large numbers for superdiffusions. Ann Probab, 2015, 43: 2594–2659
20 Kim P, Song R. Intrinsic ultracontractivity of non-symmetric diffusion semigroups in bounded domains. Tohoku Math J (2), 2008, 60: 527–547
21 Ren Y-X, Song R, Zhang R. Williams decomposition for superprocesses. Electron J Probab, 2018, 23: 1–33
22 Seneta E. A Tauberian theorem of E. Landau and W. Feller. Ann Probab, 1973, 1: 1057–1058

On properties of a class of strong limits for supercritical superprocesses

Yan-xia Ren, Renming Song & Rui Zhang

Abstract Suppose that $X = \{X_t, t \geqslant 0; \mathbb{P}_\mu\}$ is a supercritical superprocess in a locally compact separable metric space E. Let ϕ_0 be a positive eigenfunction corresponding to the first eigenvalue λ_0 of the generator of the mean semigroup of X. Then $M_t := \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\langle \phi_0, X_t\rangle$ is a positive martingale. Let M_∞ be the limit of M_t. It is known that M_∞ is non-degenerate iff the $L\log L$ condition is satisfied. When the $L\log L$ condition may not be satisfied, Ren et al. (2017) recently proved that there exist a non-negative function γ_t on $[0,\infty)$ and a non-degenerate random variable W such that for any finite nonzero Borel measure μ on E, $\lim_{t\to\infty} \gamma_t\langle \phi_0, X_t\rangle = W$, a.s.-$\mathbb{P}_\mu$. In this paper, we mainly investigate properties of W. We prove that W has strictly positive density on $(0,\infty)$. We also investigate the small value and tail probability problems of W.

Keywords superprocesses, supercritical, non-degenerate strong limit, absolute continuity, small value probability, tail probability

MSC(2010) 60J68

doi: 10.1360/N012018-00046