

概率统计 B

第三章 随机变量的数字特征

原著：陈家鼎、刘婉如、汪仁官
制作：李东风，邓明华

2025 春季学期

本章目录

- 1 离散型随机变量的期望
- 2 连续型随机变量的期望
- 3 期望的简单性质及随机变量函数的期望公式
- 4 方差及其简单性质
- 5 其它

本节目录

- 1 离散型随机变量的期望
 - 期望
 - 几个常用分布的期望
- 2 连续型随机变量的期望
- 3 期望的简单性质及随机变量函数的期望公式
- 4 方差及其简单性质
- 5 其它

随机变量的数字特征

- 随机变量的概率函数 (PMF)、密度函数 (PDF)、分布函数是对随机变量分布的最完整刻画。
- 但实际中分布难以描述和确定。
- 容易计算分布的一些数字特征：
 - ▶ 中心位置特征；
 - ▶ 分散程度特征。
- 期望是重要的概率论研究工具。

期望

- 例 设某种彩票发行了 10 万张，每张售 1 元，其中 10 张有奖，各奖励 5000 元，其它无奖。
- 问：买一张彩票，平均盈利多少？
- 设 X 为盈利的随机变量。则 $X = 10000 - 1$ 或 -1 。

X	4999	-1
p	$\frac{10}{100000}$	$1 - \frac{10}{100000}$

- 平均盈利为

$$EX = 4999 \cdot \frac{10}{100000} - 1 \cdot \left(1 - \frac{10}{100000}\right) = -0.5(\text{元})$$

期望

- 期望是一种加权平均，加权为每个值的取值概率。这与大量重复试验时的结果是一致的。
- 比如，彩票例子中，如果用 4999 与 -1 直接算术平均得 2499 元，显然是荒谬的。原因是取 4999 的概率远比取 -1 的概率小得多。

放射性粒子求平均粒子数

X	频数	频率	p_k
0	57	0.022	0.021
1	203	0.078	0.081
2	383	0.147	0.156
3	525	0.201	0.202
4	532	0.204	0.195
5	408	0.156	0.151
6	273	0.105	0.097
7	139	0.053	0.054
8	45	0.017	0.026
9	27	0.010	0.011
≥ 10	16	0.006	0.007
总计	2608	1.000	1.000

● 平均粒子数的合理公式：

$$\frac{1}{2608}(0 \times 57 + 1 \times 203 + 2 \times 383 + \cdots + 10 \times 16)$$
$$= \sum k\hat{p}_k \quad (\hat{p}_k \text{ 为取 } k \text{ 的百分比})$$

期望定义

- **定义 1.1** 设离散型随机变量 X 的概率分布为

$$P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots$$

则称

$$\sum_k x_k p_k$$

为随机变量 X 的**期望**（或**数学期望**），记作 EX 或 $E(X)$ 。

- EX 是随机变量取值的加权平均，按照概率的频率定义，这更符合多次重复观测后随机变量的平均表现。也叫做 X 的**均值**，或 X 的分布的均值。

二点分布的期望

- X 分布

X	1	0
概率	p	$1-p$

-

$$EX = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$$

二项分布的期望

- $X \sim B(n, p)$,

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

- 则

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^n kP(X = k) = \sum_{k=1}^n kC_n^k p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{np \cdot (n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} \\ &= np \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k'![(n-1)-k']!} p^{k'} q^{(n-1)-k'} \\ &= np \sum_{k'=0}^{n-1} C_{n-1}^{k'} p^{k'} q^{(n-1)-k'} = np \end{aligned}$$

泊松分布的期望

- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (\lambda > 0)$$

- 则

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

超几何分布的期望

- 设 X 服从参数为 N, M, n 的超几何分布 ($n \leq N - M$):

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \quad m = 0, 1, 2, \min(M, n)$$

- 超几何分布期望

$$\begin{aligned}
 EX &= \sum_{m=0}^{\min(M,n)} m \cdot P(X=m) \\
 &= \sum_{m=1}^{\min(M,n)} m \frac{M!}{m!(M-m)!} \\
 &\quad \cdot \frac{(N-M)!}{(n-m)!(N-M-(n-m))!} \cdot \frac{n!(N-n)!}{N!} \\
 &= \sum_{m=1}^{\min(M,n)} \frac{M \cdot (M-1)!}{(m-1)![(M-1)-(m-1)]!} \\
 &\quad \cdot \frac{[(N-1)-(M-1)]!}{[(n-1)-(m-1)]![(N-1)-(M-1)-((n-1)-(m-1))]} \\
 &\quad \cdot \frac{n \cdot (n-1)![(N-1)-(n-1)]!}{N \cdot (N-1)!} \\
 &= \frac{nM}{N} \sum_{m'=0}^{\min(M-1,n-1)} \frac{C_{M-1}^{m'} C_{(N-1)-(M-1)}^{(n-1)-m'}}{C_{N-1}^{n-1}} \\
 &= \frac{nM}{N}
 \end{aligned}$$

本节目录

- 1 离散型随机变量的期望
- 2 连续型随机变量的期望**
- 3 期望的简单性质及随机变量函数的期望公式
- 4 方差及其简单性质
- 5 其它

连续型随机变量的期望

- **定义 2.1** 设连续型随机变量的密度为 $p(x)$ ，称

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \quad (2.1)$$

为 X 的期望（或均值），记作 EX (或 $E(X)$)。

- 要求 (2.1) 的积分收敛才有期望。
- 解释：连续型随机变量的 $p(x)$ 是一个比例系数，不是概率。

- 把 X 的取值范围划分为区间 $(x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots$, 当 $p(x)$ 连续, 每个区间都很短时近似计算 X 的平均为

$$\begin{aligned} EX &\approx \sum_i x_i P(x_i < X \leq x_{i+1}) \\ &\approx \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} xp(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \end{aligned}$$

均匀分布的期望

- $X \sim U(a, b)$:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

•

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{b-a} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

- EX 是区间 $[a, b]$ 的中点。与“均匀”分布意义相符。

指数分布的期望

- $X \sim E(\lambda)$:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} (\lambda > 0)$$

- 期望

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} te^{-t} dt \quad (\text{令 } t = \lambda x) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[(-te^{-t}) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} dt \right] \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

- 所以 $\frac{1}{\lambda}$ 是指数分布的期望。

正态分布

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

- 期望

$$\begin{aligned} EX &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dx \\ &= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} d\frac{x - \mu}{\sigma} \\ &= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \sigma \cdot \frac{\mu}{\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \sigma \cdot 0 + \mu = \mu \end{aligned}$$

- 正态分布密度以 $x = \mu$ 为对称轴, 且 μ 为均值。
- 其它分布如果也有对称轴 $x = c$ 且期望存在则其期望也等于 c 。

伽玛分布

- $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

- 期望

$$\begin{aligned} EX &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt \quad (\text{令 } t = \beta x) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

本节目录

- 1 离散型随机变量的期望
- 2 连续型随机变量的期望
- 3 期望的简单性质及随机变量函数的期望公式
 - 期望的简单性质
 - 随机变量函数的期望公式
- 4 方差及其简单性质
- 5 其它

期望的简单性质

- 对常数 c, k, b 和随机变量 X , 有

$$\begin{aligned}(1) \quad & E(c) = c; \\(2) \quad & E(kX) = kE(X); \\(3) \quad & E(X + b) = E(X) + b; \\(4) \quad & E(kX + b) = kE(X) + b.\end{aligned}\tag{3.1}$$

证明 (1)

- $E(c) = c$?
- 常数 c 可以看成离散随机变量, 取 c 的概率为 1, 按期望公式有

$$E(X) = c \times 1 = c$$

证明 (2)

- $E(kX) = kE(X)$?
- 当 $k = 0$ 时显然成立。
- 当 $k \neq 0$ 时, 若 X 为离散分布:

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

- 则 $Y = kX$ 的分布为

$$P(Y = kx_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

- 按定义

$$E(Y) = \sum_i (kx_i)p_i = k \sum_i x_i p_i = kE(X)$$

- 若 $k \neq 0$, X 为连续型, 密度 $p(x)$, 则 $Y = kX$ 有密度

$$p_Y(y) = \frac{1}{|k|} p\left(\frac{y}{k}\right)$$

- 事实上, $k > 0$ 时 $\forall c < d$,

$$\begin{aligned} \int_c^d \frac{1}{k} p\left(\frac{y}{k}\right) dy &= \int_{\frac{c}{k}}^{\frac{d}{k}} p(t) dt \quad (\text{令 } t = \frac{y}{k}) \\ &= P\left(\frac{c}{k} < X < \frac{d}{k}\right) = P(c < kX < d) \\ &= P(c < Y < d) \end{aligned}$$

即 Y 的密度为 $\frac{1}{k} p\left(\frac{y}{k}\right)$ 。

- $k < 0$ 类似可证。

- 按期望定义

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y)dy \\ &= \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{\infty} yp\left(\frac{y}{k}\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ktp(t)dt \quad (\text{令 } t = \frac{y}{k}) \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} tp(t)dt \\ &= kE(X) \end{aligned}$$

证明 (3)

- $E(X + b) = E(X) + b$?
- 只对 $X \sim p(x)$ 证明。
- $Y = X + b \sim p(y - b)$ 。事实上, $\forall c < d$,

$$\begin{aligned}\int_c^d p(y - b) dy &= \int_{c-b}^{d-b} p(t) dt \quad (\text{令 } t = y - b) \\ &= P(c - b < X < d - b) = P(c < X + b < d) \\ &= P(c < Y < d).\end{aligned}$$

- 期望

$$\begin{aligned} E(X + b) &= E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y - b)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (t + b)p(t)dt \quad (\text{令 } t = y - b) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} tp(t)dt + b \int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt \\ &= E(X) + b \end{aligned}$$

证明 (4)

- 由 (2)、(3) 得:

$$\begin{aligned} E(kX + b) &= E(kX) + b \quad (\text{性质 3}) \\ &= kE(X) + b \quad (\text{性质 2}) \end{aligned}$$

- 性质 (4) 包含了 (2) 和 (3)，叫做期望的线性性质。

随机变量函数的期望公式

- 对 $X \sim p(x)$, $Y = f(X)$,

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx \quad (3.2)$$

(要求右边绝对收敛)

- 若 $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots$,

$$E[f(X)] = \sum_i f(x_i)p_i \quad (3.3)$$

(要求右边的级数绝对收敛)

- 这样的公式免去了求 $Y = f(X)$ 的分布的过程。

例 3.1

- 例 3.1 $X \sim N(0, 1)$, 求 $E(X^2)$ 。
- 用两种办法。
- 解法 1 用公式 (3.2)。

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x d \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \\ &= - \left[x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

- (注意 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$)

- **解法 2** 用分布函数法先求 $Y=f(X)$ 的分布密度再用期望定义。
- 显然

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) \\&= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\&= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \quad (y \geq 0)\end{aligned}$$

($Y < 0$ 是不可能事件)

- $Y = X^2$ 的密度

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) = \phi(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \phi(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} \quad (y > 0) \end{aligned}$$

(这是一个 $\text{Gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 分布密度)

- $Y = X^2$ 的密度

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) = \phi(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \phi(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} \quad (y > 0) \end{aligned}$$

(这是一个 $\text{Gamma}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 分布密度)

• 于是

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E(Y) = \int_0^{\infty} y p_Y(y) dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} 2t dt \quad (t = \sqrt{y}, y = t^2) \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2t d(e^{-\frac{t^2}{2}}) \\ &= 0 + 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 \end{aligned}$$

• 利用了公式 (3.2) 的解法更简便。

例 3.2

- 例 3.2 $X \sim U[0, 2\pi]$, 求 $E(\sin X)$ 。
- 解

$$\begin{aligned} E(\sin X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) p_X(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(x) \frac{1}{2\pi} dx = 0 \end{aligned}$$

期望线性性质证明

- 期望的线性性质

$$E(kX + b) = kE(X) + b$$

是 $f(x) = kx + b$ 时公式 (3.2),(3.3) 的特例:

$$\begin{aligned} E(kX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (kx + b)p(x)dx \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx \\ &= kE(X) + b \end{aligned}$$

本节目录

- 1 离散型随机变量的期望
- 2 连续型随机变量的期望
- 3 期望的简单性质及随机变量函数的期望公式
- 4 方差及其简单性质
 - 方差的概念
 - 常用分布的方差
 - 方差的简单性质
- 5 其它

方差

- 随机变量的数字特征可以用数字刻画最重要的分布特征。
- 分布特征中最重要的特征是位置特征和分散程度（分布宽窄）特征。
- 方差（标准差）用来刻画分散程度。
- 例：甲乙两个女生小合唱队的身高：
- 甲队：1.60, 1.62, 1.59, 1.60, 1.59;
- 乙队：1.80, 1.60, 1.50, 1.50, 1.60.
- 平均都是 1.60，但是甲队很整齐，乙队站在一起很杂乱。

- 数据波动程度也是反映客观现象的一种指标。
- 如：产品的某种特性（如强度）波动大，说明生产不稳定。
- 如：生物的某种特性（如血压）波动大，表示病态。
- 所以对于数据，除了关心均值，还要研究其波动程度（分散程度）。

数据的方差

- 对于给定的一批数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 用

$$\frac{1}{n-1}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2] \quad (4.1)$$

来刻画这批数据的分散程度（波动），其中 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 。

- 当所有 x_i 为常数时，(4.1) 等于零。
- 各 x_i 差别越大，则与平均值差别越大，(4.1) 越大。

随机变量的方差

- 仿照数据的方差提出:
- **定义 4.1** 设离散型随机变量的概率分布为

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

则称

$$\sum_k [x_k - E(X)]^2 p_k \quad (4.2)$$

为 X 的方差, 记作 $D(X)$ 或 $\text{Var}(X)$ 。

- **定义 4.2** 设连续型随机变量 X 的密度是 $p(x)$, 则称

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 p(x) dx \quad (4.2')$$

为 X 的方差, 记作 $D(X)$ 或 $\text{Var}(X)$ 。

- 为了方差存在, 期望 $E(X)$ 必须先存在;
- 对离散型, (4.2) 的级数若非有限项, 则级数收敛时方差才存在;
- 对连续型, (4.2') 的积分收敛时方差才存在;
- 方差总是非负的:

$$D(X) \geq 0$$

方差等价定义

- 方差等价定义

$$D(X) = E[X - E(X)]^2 \quad (4.3)$$

按随机变量函数的期望公式, (4.3) 与 (4.2) 和 (4.2') 一致。

- 随机变量的方差, 也称为其分布的方差:
- 注意: 期望、方差只由分布决定, 两个随机变量服从相同的分布 (参数也要相同), 则其期望、方差必定相同。

方差的恒等式

- 方差有如下恒等式

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (4.4)$$

- 证明

$$\begin{aligned} D(X) &= E[X - E(X)]^2 \\ &= E\{X^2 - 2E(X) \cdot X + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - E[2E(X) \cdot X] + E[E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

- 这个证明用到了第四章定理：

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- 方差恒等式 (4.4) 的另一证明：以 $X \sim p(x)$ 为例，

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 p(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{x^2 - 2E(X) \cdot x + [E(X)]^2\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - 2E(X) \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \\ &\quad + [E(X)]^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + [E(X)]^2 \cdot 1 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

二点分布的方差

- 对二点分布

$$E(X) = p$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

二项分布的方差

- 对二项分布

$$E(X) = np$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n [k(k-1) + k] \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k q^{n-k} + E(X) \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!} \\ &\quad \cdot p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)} + E(X) \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k'=0}^{n-2} C_{n-2}^{k'} p^{k'} q^{(n-2)-k'} + E(X) \\ &= n(n-1)p^2 + np = n^2 p^2 + np(1-p) \\ D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = np(1-p) \end{aligned}$$

泊松分布的方差

- 对泊松分布

$$E(X) = \lambda$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1) + 1] \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} e^{-\lambda} + \lambda \sum_{k''=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k''}}{k''!} e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda$$

均匀分布的方差

- 若 $X \sim U(a, b)$, 则

$$\begin{aligned}E(X) &= \frac{a+b}{2} \\E(X^2) &= \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx \\&= \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b \\&= \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) \\D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\&= \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) - \frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2) \\&= \frac{1}{12}(b-a)^2\end{aligned}$$

指数分布的方差

- 设 $X \sim E(\lambda)$, 则

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\lambda} \\ E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \Gamma(3) = \frac{1}{\lambda^2} 2! = \frac{2}{\lambda^2} \\ D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

正态分布的方差

- 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X - \mu)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} t^2\right\} dt \quad (\text{令 } t = \frac{x - \mu}{\sigma}) \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt \\ &= \sigma^2 \quad (\text{见例 3.1}) \end{aligned}$$

- 所以正态分布的两个参数 μ, σ^2 分别是分布的期望和方差。

伽玛分布的方差

- 设 $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$:

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad (x > 0)$$

- 则

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty \frac{(\beta x)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-(\beta x)} d(\beta x) \\ &= \frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\beta^2} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} \\ D(X) &= \frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2} \end{aligned}$$

方差的简单性质

- 当 k, b, c 为常数时

$$\begin{aligned}(1) \quad & D(c) = 0; \\(2) \quad & D(kX) = k^2 D(X); \\(3) \quad & D(X + b) = D(X); \\(4) \quad & D(kX + b) = k^2 D(X).\end{aligned}\tag{4.5}$$

- 证明 (1)

$$E(c) = c$$

$$E(c^2) = c^2$$

$$D(X) = c^2 - c^2 = 0$$

• (2)

$$E(kX) = kE(X)$$

$$E[(kX)^2] = E(k^2X^2) = k^2E(X^2)$$

$$\begin{aligned} D(kX) &= k^2E(X^2) - [kE(X)]^2 \\ &= k^2\{E(X^2) - [E(X)]^2\} = k^2D(X) \end{aligned}$$

- (3)

$$E(X + b) = E(X) + b$$

$$E(X + b)^2 = E(X^2 + 2bX + b^2) = E(X^2) + 2bE(X) + b^2$$

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X^2) + 2bE(X) + b^2 \\ &\quad - \{[E(X)]^2 + 2bE(X) + b^2\} \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 = D(X) \end{aligned}$$

- (4) 是 (2)、(3) 的推论:

$$D(kX + b) = D(kX) = k^2 D(X)$$

本节目录

- 1 离散型随机变量的期望
- 2 连续型随机变量的期望
- 3 期望的简单性质及随机变量函数的期望公式
- 4 方差及其简单性质
- 5 其它
 - 切比雪夫不等式
 - 原点矩与中心矩
 - 分位数与中位数

切比雪夫不等式

- **定理 5.1** 设随机变量 X 存在均值 $E(X)$ 与方差 $D(X)$, 则有

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0) \quad (5.1)$$

• 证明 (仅对连续型情形)

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 p(x) dx \\ &\geq \int_{-\infty}^{E(X) - \varepsilon} [x - E(X)]^2 p(x) dx \\ &\quad + \int_{E(X) + \varepsilon}^{\infty} [x - E(X)]^2 p(x) dx \\ &\geq \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{E(X) - \varepsilon} p(x) dx + \varepsilon^2 \int_{E(X) + \varepsilon}^{\infty} p(x) dx \\ &= \varepsilon^2 P(X \leq E(X) - \varepsilon) + \varepsilon^2 P(X \geq E(X) + \varepsilon) \\ &= \varepsilon^2 P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

• 得证。

- 在切比雪夫不等式中取 $\varepsilon = k\sqrt{D(X)}$, 则

$$P(|X - E(X)| \geq k\sqrt{D(X)}) \leq \frac{1}{k^2}$$

其中 $\sqrt{D(X)}$ 叫做 X 的标准差。

- 特别地, $k = 3$ 时

$$P(|X - E(X)| \geq 3\sqrt{D(X)}) \leq \frac{1}{9}$$

- 对比正态分布, 这个比例是小于千分之三。
- 从切比雪夫不等式可知 $D(X)$ 越小则 X 取值远离其均值的概率越小, 所以反映了分布的分散程度。

原点矩与中心矩

- 称

$$E(X^k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

为 X 的 k 阶原点矩, 记为 ν_k ;

- 称

$$E[X - E(X)]^k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

为 X 的 k 阶中心矩, 记为 μ_k 。

- 均值为 ν_1 , 方差为 μ_2 。

分位数与中位数

- 若 X 的分布函数 $F(x)$ 严格单调上升连续, 则其存在反函数 $q(p), p \in (0, 1)$, 使得

$$F(q(p)) = p, \quad \forall p \in (0, 1)$$

称 $q(p)$ 为 X 的分位数函数, $x_p = q(p)$ 叫做 X 的 p 分位数。

- 一般地, 对 $p \in (0, 1)$, 称 x_p 是随机变量 X 的 p 分位数, 若

$$P(X < x_p) \leq p \leq P(X \leq x_p) \quad (5.4)$$

- (5.4) 也写作

$$P(X \leq x_p) \geq p, \quad P(X \geq x_p) \geq 1 - p \quad (5.4')$$

- 二分之一分位数叫做中位数。
- 分位数必存在，不一定唯一。有一种唯一化的定义为

$$x_p = \inf\{x : F(X) \geq p\} \quad (\forall p \in (0, 1))$$

例：二点分布的分位数

- 二点分布 $b(1, p_0)$, 记 $q_0 = 1 - p_0$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ q_0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

- 分位数

$$x_p = \begin{cases} 0 & p \in (0, q_0) \\ [0, 1] & p = q_0 \\ 1 & p \in (q_0, 1) \end{cases}$$