第四次作业

第四章作业
习题十一 3, 5; 习题十二 1, 4; 习题十三 4, 6, 9;
习题十四 3, 6, 8; 习题十五 1, 3, 4.

第 4.1 节 习题十一 3, 5.

3. 随机向量(X,Y)的联合密度为

$$p(x,y)=\ c(R-\sqrt{x^2+y^2}),\ \text{当}x^2+y^2<R^2;$$

$$p(x,y)=\ 0,\ \text{当}x^2+y^2\geq R^2.$$

求: (1) 系数c, (2) 随机向量落在圆$x^2+y^2\leq r^2$内的概率, $(r<R)$.

5. 设(X,Y)的联合密度为

$$p(x,y)=\ A\sin(x+y),\ \text{当}0<x<\frac{\pi}{2}\ ,\ 0<y<\frac{\pi}{2};$$

$$p(x,y)=\ 0,\ \text{其他}.$$

求: (1) 系数A, (2) 边缘密度.

第 4.2 节 习题十二 1, 4.
1. 假设X,Y相互独立, 密度分别为 $p_X(x)=\ 1$, $0\leq x\leq 1$; $p_X(x)=\ 0$, 其他. $p_Y(y)=\ e^{-y}$, $y>0$; $p_Y(y)=\ 0$, $y\leq 0$. 求 $X+Y$的密度.

4. 设X,Y独立同分别, 密度为$p(\cdot)$, 分布函数为$F(\cdot)$. 求 $\min\{X,Y\}$的密度.

第 4.3 节 习题十三 4, 6, 9.
4. 设 (X,Y)服从区域$D=\{(x,y):0<y<x<1\}$上的均匀分布, 求相关系数ρ.

6. 已知$D(X)=25$, $D(Y)=36$, $\rho=0.4$. 求$D(X+Y)$及$D(X-Y)$.

9. 设$X\sim\mathrm{N}(0,1)$, 而$Y=X^n$(n是正整数). 求ρ_{XY}.

第 4.4 节 习题十四 3, 6, 8.

3. 设X, Y, Z独立同分布，服从N(0,1)，求$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$的概率密度.

6. 将n只球放入M只盒子中去，设每只球落入每个盒子是等可能性的. 求有球的盒子数 X 的均值. (提示：引入随机变量 $X_i=1$，当第i只盒子中有球; $X_i=0$，当第i只盒子中无球. 显然有$X=X_1+\cdots+X_M$.)

8. 对于随机变量X, Y, Z，已知$EX=EY=1$，$EZ=-1$，$D(X)=D(Y)=D(Z)=1$，$\rho_{XY}=0$，$\rho_{XZ}=\frac{1}{2}$，$\rho_{YZ}=-\frac{1}{2}$.

第 4.5 节 习题十五 1, 3, 4.

1. 设X与Y相互独立. X服从泊松分布，$EX=\lambda_1$，Y也服从泊松分布，$EY=\lambda_2$. 试在$X+Y=n$的条件下求出X的条件分布.

3. 设X和Y都是离散型随机变量，$E(Y^2)$存在. $\varphi(x)=E(Y|X=x)$，当$P(X=x)>0$; $\varphi(x)=0$，否则. 试证明：对任何非负函数$\psi(x)$，只要$E(\psi(x))^2$存在，必成立:

$$E(\varphi(x)-Y)^2 \le E(\psi(x)-Y)^2.$$

4. 设一天走进某百货商店的顾客数是均值为 1200 的随机变量，又设这些顾客所花的钱数是相互独立的，均值为 50 元的随机变量. 又设任一顾客所花的钱数和进入该商店的总人数相互独立. 试问该商店一天的平均营业额是多少？