

第一章 椭圆型偏微分方程的差分方法

乔灵霞1401110026

§1 第一组右端项和边界条件

定义如下的二维椭圆微分方程

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = (x^2 + y^2)\sin(xy) & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, y) = 0 & x = 0, 0 \leq y \leq 1, \text{ 或 } y = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = y\cos(y) & x = 1, 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = x\cos(x) & y = 1, 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

其中, 求解区域 $(0, 1) \times (0, 1)$ 记为 Ω 。集合 $\{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq 1 \text{ 或 } y = 0, 0 \leq x \leq 1\}$ 为Dirichlet边界, 记为 $\partial\Omega_D$ 。集合 $\{(x, y) : x = 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ 或 } y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$ 为Neumann边界, 记为 $\partial\Omega_N$ 。 ν 为单位外法向量, 记 $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin(xy)$, $g^{(1)}(x, y) = y\cos(y)$, $g^{(2)}(x, y) = x\cos(x)$ 。该问题的精确解为 $\sin(xy)$ 。

相应的在步长 h 的网格上(其中 J 为节点指标集)的差分逼近方程记为

$$-L_h U_{i,j} = f_{i,j} \quad (i, j) \in J \quad (2)$$

并记 $\bar{L}u = \Delta u$, 当 $(x, y) \in \Omega$; $\bar{L}u = 0$, 当 $(x, y) \in \partial\Omega_D$; $\bar{L}u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, 当 $(x, y) \in \partial\Omega_N$ 。 U 为差分方程的数值真解, \tilde{U}_h 为差分方程取步长为 h 的计算解, 其中, 会有计算机计算时舍入误差的影响, 并不等于数值真解。并记 $e_h = \tilde{U}_h - u, \forall (i, j) \in J$; $T_h = L_h u - \bar{L}u, \forall (i, j) \in J$ 。若需要表示在 (i, j) 节点处的值, 在这些量下加下角标 i, j 表示在 (i, j) 节点处值。

§1.1 构造差分格式

先将区域划为网格。为方便计, 取在 x, y 方向步长均为 h , 记 $N = \frac{1}{h}$ 。全体指标集为 $J = \{(i, j) : (ih, jh) \in \Omega\} = \{(i, j) : 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N\}$ 。 U 在 (ih, jh) 的值记为 $U_{i,j}$, 各量在 (ih, jh) 处的值用加下角标 i, j 表示。由于采用二阶中心差分算子近似二阶偏导, 故对于正则内点 J_Ω° 、非正则内

点 \tilde{J}_Ω 、Dirichlet边界点集 J_D 有：

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{J}_\Omega &= \{(i, j) : 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N-1\} \\ \tilde{J}_\Omega &= \{(i, j) : i = N, 1 \leq j \leq N \text{ 或 } j = N, 1 \leq i \leq N\} \\ J_D &= \{(i, j) : i = 0, 0 \leq j \leq N \text{ 或 } j = 0, 0 \leq i \leq N\}\end{aligned}$$

(1) 当 $(i, j) \in \overset{\circ}{J}_\Omega$ ，用二阶中心差分算子近似算子 Δ ，得到如下差分格式：

$$4U_{i,j} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1} = h^2 f_{i,j} \quad (3)$$

(2) 当 $(i, j) \in \tilde{J}_\Omega$ ，分为下面三种情况：

- 若 $i = N, 1 \leq j \leq N-1$ 时，将x方向网格线延长h，记得到的点指标为 $(N+1, j)$ ，并在 (N, j) 处作一阶中心差分逼近法向导数，得到下式：

$$\frac{U_{N+1,j} - U_{N-1,j}}{2h} = g_{N,j}^{(1)} \quad (4)$$

同时列出 $-\Delta u = f$ 在 (N, j) 节点的差分格式，有：

$$4U_{N,j} - U_{N+1,j} - U_{N-1,j} - U_{N,j+1} - U_{N,j-1} = h^2 f_{N,j} \quad (5)$$

两式(5),(6)联立，消去 $U_{N+1,j}$ ，得到在 (N, j) 点的格式：

$$4U_{N,j} - 2U_{N-1,j} - U_{N,j+1} - U_{N,j-1} = h^2 f_{N,j} + 2hg_{N,j}^{(1)} \quad (6)$$

- 若 $j = N, 1 \leq i \leq N-1$ 时，类似于第一种情形，得到在 (i, N) 点的格式：

$$4U_{i,N} - 2U_{i,N-1} - U_{i+1,N} - U_{i-1,N} = h^2 f_{i,N} + 2hg_{i,N}^{(2)} \quad (7)$$

- 若 $i = N, j = N$ 时，二个边界条件在此相遇。类似的，仍将x,y方向延长h，分别得到点的指标为 $(N+1, N), (N, N+1)$ 。

在x方向上，有

$$\frac{U_{N+1,N} - U_{N-1,N}}{2h} = g_{N,N}^{(1)} \quad (8)$$

在y方向上，有

$$\frac{U_{N,N+1} - U_{N,N-1}}{2h} = g_{N,N}^{(2)} \quad (9)$$

$$\widetilde{F}_N = [\quad 0.5h^2 f_{1,N} + hg_{1,N}^{(2)}, 0.5h^2 f_{2,N} + hg_{2,N}^{(2)}, \dots, 0.5h^2 f_{N-1,N} + hg_{N-1,N}^{(2)}, \\ 0.25h^2 f_{N,N} + 0.5hg_{N,N}^{(1)} + 0.5hg_{N,N}^{(2)}]^T$$

记这个方程组为 $AU = F$ ，由于 A 为不可约对角占优的对称矩阵，故 A 正定，采用共轭梯度法求解。在此，由于先验误差估计是以无穷范数估计的，可将共轭梯度法迭代终止条件改为残量 $r = F - A\widetilde{U}$ 的无穷范数有 $\|r\|_\infty$ 足够小。

§1.3 先验误差估计确定步长 h 及相应的求解算法

现在我们一旦确定步长 h ，就可以求解在该步长下的差分逼近解，为了达到精度 10^{-5} ，我们可以从先验误差估计和后验误差估计来确定网格尺度。这部分先讨论如何用先验误差估计确定网格尺度。

先做一些记号的规定。记 $\widetilde{J}_{\Omega_1} = \{(i, j) : i = N, 1 \leq j \leq N-1\}$ ， $\widetilde{J}_{\Omega_2} = \{(i, j) : j = N, 1 \leq i \leq N-1\}$ ， $\widetilde{J}_{\Omega_3} = \{(N, N)\}$ ，则 $\widetilde{J}_{\Omega_1} \cup \widetilde{J}_{\Omega_2} \cup \widetilde{J}_{\Omega_3} = \widetilde{J}_\Omega$ ，即这三个节点集构成了非正则内点集。此时，相应的差分方程经整理如下：

$$\begin{cases} -L_h U_{i,j} = \frac{4U_{i,j} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{h^2} = f_{i,j} & (i, j) \in \overset{\circ}{J}_\Omega \\ -L_h U_{i,j} = -\frac{4U_{i,j} - 2U_{i-1,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}}{2h} = -g_{i,j}^{(1)} & (i, j) \in \widetilde{J}_{\Omega_1} \\ -L_h U_{i,j} = -\frac{4U_{i,j} - 2U_{i,j-1} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j} - h^2 f_{i,j}}{2h} = -g_{i,j}^{(2)} & (i, j) \in \widetilde{J}_{\Omega_2} \\ -L_h U_{i,j} = -\frac{4U_{i,j} - 2U_{i,j-1} - 2U_{i-1,j} - h^2 f_{i,j}}{2h} = -g_{i,j}^{(1)} - g_{i,j}^{(2)} & (i, j) \in \widetilde{J}_{\Omega_3} \\ U(i, j) = 0 & (i, j) \in J_D \end{cases} \quad (13)$$

将上述方程写成形如(3)的方程，即

$$-L_h U_{i,j} = \widetilde{f}_{i,j} \quad (i, j) \in J \quad (14)$$

采用先验误差估计的大致过程如下：

- 用比较定理确定 $\max_{(i,j) \in J_\Omega} |U_{i,j}| \leq \max_{(i,j) \in J_D} |U_{i,j}| + C \max_{(i,j) \in J_\Omega} |\widetilde{f}_{i,j}|$ 中 C 的值。由 $-L_h e = L_h u - L_h \widetilde{U}$ ，类似于 $-L_h U = \widetilde{f}$ ，当 $(i, j) \in J$ 。所以 $\max_{(i,j) \in J_\Omega} |e_{i,j}| \leq \max_{(i,j) \in J_D} |e_{i,j}| + C \max_{(i,j) \in J_\Omega} |L_h u - L_h \widetilde{U}|$ 。而在该问题中， $\max_{(i,j) \in J_D} |e_{i,j}| = 0$ ，故有

$$\max_{(i,j) \in J_\Omega} |e_{i,j}| \leq C \max_{(i,j) \in J_\Omega} |L_h u - L_h \widetilde{U}|$$

- 由 $\|e\|_\infty = \max_{(i,j) \in J_\Omega} |e_{i,j}| \leq C \max_{(i,j) \in J_\Omega} |L_h u - L_h \widetilde{U}| = C \|L_h u - L_h \widetilde{U}\|_\infty \leq C(\|L_h u - \bar{L}u\|_\infty + \|\bar{L}u - L_h \widetilde{U}\|_\infty)$ ，这是因为在 J_D 上， e 和 $L_h u - L_h \widetilde{U}$ 都

为0, 故可以从 J_Ω 上过渡到 J 上的无穷范数。即

$$\|e\|_\infty \leq C(\|L_h u - \bar{L}u\|_\infty + \|\bar{L}u - L_h \tilde{U}\|_\infty)$$

第一项为截断误差 T_h 的模, 第二项为 $\|\tilde{f} - L_h \tilde{U}\|_\infty$ 是差分方程残量的模。分别估计截断误差 T_h 的模和差分方程残量的模。由估计确定步长 h 的大小, 再利用第二部分的内容求解。

下面就按这个步骤, 进行先验误差估计。

(1)利用比较定理确定 C 的值。

取比较函数为 $\phi = \frac{1}{4}((x+2)^2 + (y+2)^2)$ 相应的网格函数, 则 ϕ 非负, 下看 $L_h \phi$ 。

当 $(i, j) \in J_\Omega$ 时, 易知 $L_h \phi = 1$ 。

当 $(i, j) \in \tilde{J}_{\Omega_1}$ 时, 因为从分析在 \tilde{J}_{Ω_1} 的局部截断误差(后面具体展开)时, 截断误差是精确解的三次导数及以上构成, ϕ 只有二次, 故 $L_h \phi_{i,j} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ 。有

$$\begin{aligned} L_h \phi_{i,j} &= \frac{4\phi_{i,j} - 2\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1} + h^2 \Delta \phi_{i,j}}{2h} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &= \frac{1}{4} \times 2(jh + 2) \geq 1 \end{aligned}$$

当 $(i, j) \in \tilde{J}_{\Omega_2}$ 时, 同理可得 $L_h \phi_{i,j} \geq 1$ 。

当 $(i, j) \in \tilde{J}_{\Omega_3}$ 时, 从分析在 \tilde{J}_{Ω_3} 的局部截断误差(后面具体展开)时, 截断误差是精确解的三次导数及以上构成, ϕ 只有二次, 故 $L_h \phi_{i,j} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}$ 。有

$$\begin{aligned} L_h \phi_{i,j} &= \frac{4\phi_{i,j} - 2\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j-1} + h^2 \Delta \phi_{i,j}}{2h} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ &= \frac{1}{4} \times 2(ih + 2) + \frac{1}{4} \times 2(jh + 2) \geq 1 \end{aligned}$$

综合上述四个方面, 当 $(i, j) \in J_\Omega$ 时, $L_h \phi \geq 1$ 。由比较定理得

$$C = \max_{(i,j) \in J_D} |\phi_{i,j}| = \frac{13}{4}$$

(2)分别估计截断误差的模, 和差分残量的模。

先估计截断误差的模。在此, 大致计算一下精确解 u 的各阶偏导的值, 可发现当 k 为偶数时, $|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}| = x^k \sin(xy)$, $|\frac{\partial^k u}{\partial y^k}| = y^k \sin(xy)$; 当 k 为奇数时, $|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}| = x^k \cos(xy)$, $|\frac{\partial^k u}{\partial y^k}| = y^k \cos(xy)$, 则在 Ω 上 u 各阶偏导始终小于1。

当 $(i, j) \in \overset{\circ}{J}_\Omega$ 时, 由数值函数的Taylor展开式知, 存在 $\xi_1, \xi_2 \in \Omega$, 使得:

$$\begin{aligned}
& |L_h u - \bar{L}u|_{i,j} \\
&= \left| \frac{1}{12} h^2 \left(\frac{\partial^4 u(\xi_1)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(\xi_2)}{\partial y^4} \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{12} h^2 \max_{(x,y) \in \Omega} \left(\left| \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} \right| + \left| \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} \right| \right) \\
&\leq \frac{1}{6} h^2
\end{aligned}$$

当 $(i, j) \in \tilde{J}_{\Omega_1}$ 时, 存在 $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \Omega$, 使得:

$$\begin{aligned}
& |L_h u - \bar{L}u|_{i,j} \\
&= \left| \frac{4u_{i,j} - 2u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}}{2h} - \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \right| \\
&= \left| \frac{(4u - 2[u - \frac{\partial u}{\partial x} h + 0.5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2])_{i,j}}{2h} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(\eta_1)}{\partial x^3} h^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial y} h + 0.5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} h^3)_{i,j}}{2h} - \frac{1}{48} \frac{\partial^4 u(\eta_2)}{\partial y^3} h^3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(u - \frac{\partial u}{\partial y} h + 0.5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} h^3)_{i,j}}{2h} - \frac{1}{48} \frac{\partial^4 u(\eta_3)}{\partial y^3} h^3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \right| \\
&= \left| \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(\eta_1)}{\partial x^3} h^2 - \frac{1}{48} \frac{\partial^4 u(\eta_2)}{\partial y^3} h^3 - \frac{1}{48} \frac{\partial^4 u(\eta_3)}{\partial y^3} h^3 \right| \\
&\leq \frac{1}{6} h^2 \max_{(x,y) \in \Omega} \left(\left| \frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3} \right| + \frac{1}{8} h \left| \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} \right| + \frac{1}{8} h \left| \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} \right| \right) \\
&\leq \frac{1}{6} h^2 \left(1 + \frac{1}{4} h \right)
\end{aligned}$$

当 $(i, j) \in \tilde{J}_{\Omega_2}$ 时, 同理可得:

$$\begin{aligned}
& |L_h u - \bar{L}u|_{i,j} \\
&= \left| \frac{4u_{i,j} - 2u_{i,j-1} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - h^2 f_{i,j}}{2h} - \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \right| \\
&\leq \frac{1}{6} h^2 \max_{(x,y) \in \Omega} \left(\left| \frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial y^3} \right| + \frac{1}{8} h \left| \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} \right| + \frac{1}{8} h \left| \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} \right| \right) \\
&\leq \frac{1}{6} h^2 \left(1 + \frac{1}{4} h \right)
\end{aligned}$$

当 $(i, j) \in \tilde{J}_{\Omega_3}$ 时, 同样利用Taylor展开, 由数值函数的Taylor展开式知, 存

在 $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega$, 使得:

$$\begin{aligned}
& |L_h u - \bar{L}u|_{i,j} \\
= & \left| \frac{4u_{i,j} - 2u_{i-1,j} - 2u_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}}{2h} - \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} - \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \right| \\
= & \left| \frac{(4u - 2[u - \frac{\partial u}{\partial x} h + 0.5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} h^2])_{i,j}}{2h} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(\zeta_1)}{\partial x^3} h^2 \right. \\
& \left. - \frac{2(u - \frac{\partial u}{\partial y} h + 0.5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} h^2)_{i,j}}{2h} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(\zeta_2)}{\partial y^3} h^2 \right. \\
& \left. - \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} - \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \right| \\
= & \left| \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(\eta_1)}{\partial x^3} h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u(\eta_2)}{\partial y^3} h^2 \right| \\
\leq & \frac{1}{6} h^2 \max_{(x,y) \in \Omega} (|\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3}| + |\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial y^3}|) \\
\leq & \frac{1}{3} h^2
\end{aligned}$$

综合上面的四个分析, 结合在Dirichlet边界上没有误差, 可以得到在全空间 Ω 上, 当 $h < 4$ (而这是显然满足的), 有如下的截断误差估计:

$$\|L_h u - \bar{L}u\|_\infty \leq \frac{1}{3} h^2$$

再估计差分残量的模。

由于采用共轭梯度法时, 是用残量是否达到预定值及是否到达最大迭代次数做为迭代终止条件, 则我们可以选择迭代终止条件为残量 $\|r\|_\infty < 5 \times 10^{-7}$ 。此时, 通过选取合适的 h , 使得误差小于 10^{-5} 。即

$$\|e_h\|_\infty \leq \frac{14}{3} (\frac{1}{3} h^2 + 5 \times 10^{-7}) \leq 10^{-5}$$

解得 $h \leq 0.0022$ 。则取步长 $h = 0.002$, 可满足精度达到 10^{-5} 。

§1.4 后验误差估计确定步长 h 及相应的求解算法

从第三部分先验误差估计关于局部截断误差的推导, 我们可以看到误差主项确实为 $O(h^2)$, 即有如下展开式:

$$U_{h,(i,j)} = u_{i,j} + C_{i,j} h^2 + o(h^2) \quad \forall (i,j) \in J_h$$

则有如下的后验误差估计:

$$U_{h,(i,j)} - u_{i,j} = \frac{4}{3} (U_{h,(i,j)} - U_{\frac{h}{2},(i,j)}) + o(h^4)$$

此时, 先计算 $\frac{\|U_{h,(i,j)} - U_{\frac{h}{2},(i,j)}\|_\infty}{\|U_{\frac{h}{2},(i,j)} - U_{\frac{h}{4},(i,j)}\|_\infty} \approx 4$, 则认为网格尺度 h 足够小, 此时, 若 $\frac{4}{3}\|U_{h,(i,j)} - U_{\frac{h}{2},(i,j)}\|_\infty \leq 10^{-5}$, 则认为已达到 10^{-5} 的精度, 否则, 将网格尺度变为原来的 $\frac{1}{2}$, 直到 $\frac{4}{3}\|U_{h,(i,j)} - U_{\frac{h}{2},(i,j)}\|_\infty \leq 10^{-5}$ 。

§1.5 数值试验结果及分析

对于利用先验误差估计来确定网格尺度, 我们取 $h = 0.002 \leq 0.0022$, 取共轭梯度法终止迭代条件为 $\|r\|_\infty \leq 5 \times 10^{-7}$ 。则有相应的数据如下:

	时间代价	误差 $\ e_h\ _\infty$
步长 $h=0.002$	45.59 s	3.3093×10^{-7}

其中, 误差计算公式为 $\|e_h\|_\infty = \|\tilde{U}_h - u\|_\infty$ 。

对于利用后验误差估计来确定网格尺度, 取 h 初值为 $h_0 = 0.5$, 逐次分半, 并计算 $U_h, U_{\frac{h}{2}}, U_{\frac{h}{4}}$, 直到 $\frac{\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty}{\|U_{\frac{h}{2}} - U_{\frac{h}{4}}\|_\infty} \in (3.99, 4.01)$, 则认为网格尺度 h 足够小, 此时, 若 $\frac{4}{3}\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty \leq 10^{-5}$, 则认为已达到 10^{-5} 的精度, 否则, 将网格尺度变为原来的 $\frac{1}{2}$, 直到 $\frac{4}{3}\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty \leq 10^{-5}$ 。列出到满足要求的 h 的相关数据。

步长	计算该网格尺度的 时间代价	$\frac{4}{3}\ U_h - U_{\frac{h}{2}}\ _\infty$	$(\ U_h - U_{\frac{h}{2}}\ _\infty) /$ $(\ U_{\frac{h}{2}} - U_{\frac{h}{4}}\ _\infty)$
$h = h_0 = 0.5$	0.0025 s	0.0243	4.5022
$h = \frac{1}{2}h_0$	0.0006 s	0.0054	4.1312
$h = \frac{1}{2^2}h_0$	0.0021 s	0.0013	4.0313
$h = \frac{1}{2^3}h_0$	0.0066 s	3.2397×10^{-4}	4.0075
$h = \frac{1}{2^4}h_0$	0.0220 s	8.0841×10^{-5}	4.0019
$h = \frac{1}{2^5}h_0$	0.0775 s	2.0201×10^{-5}	4.0005
$h = \frac{1}{2^6}h_0$	0.5091 s	5.0496×10^{-6}	-
$h = \frac{1}{2^7}h_0$	5.0951 s	-	-

在 $h = \frac{1}{2^6}h_0$ 时, $\frac{4}{3}\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty \leq 10^{-5}$, 且 $(\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty) / (\|U_{\frac{h}{2}} - U_{\frac{h}{4}}\|_\infty)$ 已在步长为 $\frac{1}{2^6}h_0$ 达到了属于 $(3.99, 4.01)$ 的要求, 说明步长已经足够小, 故停止计算。而并没有计算网格尺度为 $h = \frac{1}{2^8}h_0$ 的数值结果, 故而出现了空缺。

我们可以看出, 当网格尺度为 $h = \frac{1}{2^6}h_0 = 0.0078125$ 时, 就有它的误差主项 $\frac{4}{3}\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty \leq 10^{-5}$, 故而认为当网格尺度为 $h = \frac{1}{2^6}h_0 = 0.0078125$ 时, 计算精度达到了 10^{-5} 。

我们就计算解是否达到了 10^{-5} 精度要求、误差主项的阶是否为 2 两方面做验证。

§1.5.1 关于计算解是否达到了 10^{-5} 的精度要求。

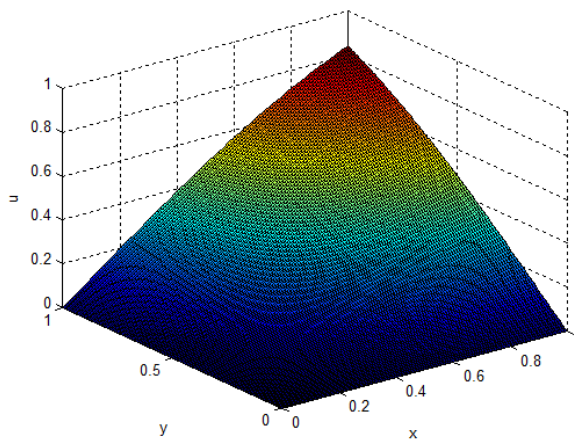
对于先验误差估计,从第一个表格中可以看出,计算解 \tilde{U}_h 与精确解 u 的误差 e_h 有 $\|e_h\|_\infty = 3.3093 \times 10^{-7} < 10^{-5}$,比要求的精度 10^{-5} 小近100倍,确实达到了要求的精度,但也表示取的网格尺度偏小。

对于后验误差估计,当网格尺度为 $h = \frac{1}{26}h_0 = 0.0078125$ 时,计算解 \tilde{U}_h 与精确解 u 的误差 e_h 的无穷范数,得到下表:

步长	误差 $\ e_h\ _\infty$
$h = 0.0078125$	5.0496×10^{-6}

图象如下:

图 1 计算解的图象



从该表中可以看出, $\|e_h\|_\infty \leq 10^{-5}$,确实是满足要求精度的计算解,验证了后验误差的可靠性。在后验误差估计中,同时也是最方便的,我们仅凭得到的计算解就可以得到计算解与精确解较好的估计,同时,还避免了先验误差估计估的网格尺度偏小的问题,有效减免了运算量。

§1.5.2 关于误差主项的阶是否为2。

在先验误差估计中,我们仅计算了 $h = 0.002$ 时的计算解,不能作为估计误差主项阶的数据。因此,利用后验误差估计中用的数据来估计主项的阶。

假定该差分格式的误差主项阶为 α ,则有:

$$U_{h,(i,j)} = u_{i,j} + C_{i,j}h^\alpha + o(h^\alpha)$$

其中, $C_{i,j}$ 是与 h 无关的网格函数, α 为待定的误差主项阶。

因此, 当 h 充分小时, 我们有:

$$\|U_h - u\|_\infty \approx Ch^2, \quad \|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty \approx (1 - 2^{-\alpha})Ch^\alpha$$

其中, C 是与 h 无关的常数。在以上的第二个式子两边取对数得:

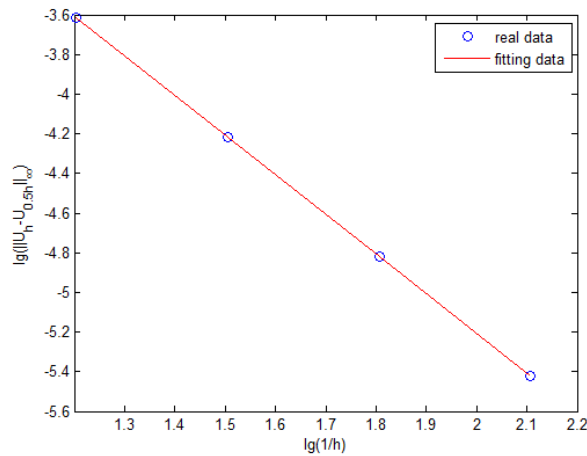
$$\lg\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty \approx \lg((1 - 2^{-\alpha})C) - \alpha \lg h^{-1}$$

这说明, 当 h 趋于0时, 在以 $\lg h^{-1}$ 为横坐标, $\lg\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty$ 为纵坐标的双对数坐标中, 数值结果 $\lg\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty$ 渐近的趋于一条斜率为 $-\alpha$ 的直线, 截距与 C 有关, 因此, 利用逐次减半的网格尺寸 h 的 $\lg\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty$ 应用最小二乘进行拟合。为了数据的可靠性, 仅采用从步长为 $\frac{1}{2^3}h_0$ 后的数据进行拟合。拟合结果如下:

$$\lg\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty = -1.2050 - 2.0011 \lg h^{-1}$$

即 $\alpha = 2.0011, C = 0.0831$ 。相应的拟合图如下:

图 2 拟合图



从图中可以看出, 拟合数据和数值结果 $\lg\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty$ 几乎在一条直线上, 而且经计算拟合数据和数值结果 $\lg\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty$ 的误差最大为 2.62×10^{-4} 左右, 说明在尺度足够小时, 确实可以忽略误差余项。同时, 利用数值解估计的误差主项阶为2.0011与2十分接近, 从数值上验证了误差主项的阶确实为2。

§2 第二组右端项和边界条件

再定义如下的二维椭圆微分方程

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = 0 & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 1) = e^x \sin(1) & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + u = 2\sin(y)e & x = 1, 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\sin(y) & x = 0, 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (15)$$

其中, 求解区域 $(0, 1) \times (0, 1)$ 记为 Ω , 区域 $[0, 1] \times 0 \cup [0, 1] \times 1$ 为Dirichlet边界, 记为 $\partial\Omega_D$; 区域 $1 \times [0, 1]$ 为Robin边界, 记为 $\partial\Omega_R$; 区域 $0 \times [0, 1]$ 为Neumann边界, 记为 $\partial\Omega_N$. ν 为单位外法向量. 沿用之前的记号, 记 $g^{(1)}(x, y) = 2\sin(y)e$, $g^{(2)}(x, y) = -\sin(y)$, $g^{(3)}(x) = e^x \sin(1)$. 该问题的精确解为 $e^x \sin(y)$.

相应的在步长 h 的网格上(其中 J 为节点指标集)的差分逼近方程记为

$$-L_h U_{i,j} = f_{i,j} \quad (i, j) \in J$$

并记 $\bar{L}u = \Delta u$, 当 $(x, y) \in \Omega$; $\bar{L}u = u$, 当 $(x, y) \in \partial\Omega_D$; $\bar{L}u = \frac{\partial u}{\partial \nu} + u$, 当 $(x, y) \in \partial\Omega_R$; $\bar{L}u = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, 当 $(x, y) \in \partial\Omega_N$. U 为差分方程的数值真解, \tilde{U}_h 为差分方程取步长为 h 的计算解. 并记 $e_h = \tilde{U}_h - u, \forall (i, j) \in J$; $T_h = L_h u - \bar{L}u, \forall (i, j) \in J$. 若需要表示在 (i, j) 节点处的值, 在这些量下加下角标 i, j 表示

§2.1 构造差分格式

先将区域划为网格. 为方便计, 取在 x, y 方向步长均为 h , 记 $N = \frac{1}{h}$. 全体指标集为 $J = \{(i, j) : (ih, jh) \in \Omega\} = \{(i, j) : 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N\}$. U 在 (ih, jh) 的值记为 $U_{i,j}$, 各量在 (ih, jh) 处的值用加下角标 i, j 表示. 由于采用二阶中心差分算子近似二阶偏导, 故对于正则内点 $\overset{\circ}{J}_\Omega$ 、非正则内点 \tilde{J}_Ω 、Dirichlet边界点集 J_D 有:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{J}_\Omega &= \{(i, j) : 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N-1\} \\ \tilde{J}_\Omega &= \{(i, j) : i = 0, 1 \leq i \leq N-1 \text{ 或 } i = N, 1 \leq j \leq N-1\} \\ J_D &= \{(i, j) : 0 \leq i \leq N, j = 0 \text{ 或 } 0 \leq i \leq N, j = N\} \end{aligned}$$

下面列出在各节点集上的差分格式(并利用 $-\Delta u = 0$).

(1) 当 $(i, j) \in \overset{\circ}{J}_\Omega$, 用二阶中心差分算子近似算子 Δ , 得到如下差分格式:

$$4U_{i,j} - U_{i+1,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1} = 0 \quad (16)$$

取比较函数为 $\phi = \frac{1}{4}((x+2)^2 + (y+2)^2)$ 相应的网格函数, 则 ϕ 非负, 下看 $L_h\phi$ 。

当 $(i, j) \in \overset{\circ}{J}_\Omega$ 时, 易知 $L_h\phi = 1$ 。

当 $(i, j) \in \tilde{J}_{\Omega_1}$ 时, 因为从分析在 \tilde{J}_{Ω_1} 的局部截断误差(类似于之前的处理方法)时, 截断误差是精确解的三次导数及以上构成, ϕ 只有二次, 故 $L_h\phi_{i,j} = -(-\frac{\partial\phi}{\partial x})$ 。有

$$\begin{aligned} L_h\phi_{i,j} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ &= \frac{1}{4} \times 2(jh+2) \geq 1 \end{aligned}$$

当 $(i, j) \in \tilde{J}_{\Omega_2}$ 时, 可得:

$$\begin{aligned} L_h\phi_{i,j} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + \phi \\ &\geq \frac{1}{4} \times 2(jh+2) \geq 1 \end{aligned}$$

综合上述三个方面, 当 $(i, j) \in J_\Omega$ 时, $L_h\phi \geq 1$ 。由比较定理得

$$C = \max_{(i,j) \in J_D} |\phi_{i,j}| = \frac{9}{2}$$

(2) 分别估计截断误差的模, 和差分残量的模。

先估计截断误差的模。在此, 大致计算一下精确解 u 的各阶偏导的值, 可发现 $\frac{\partial^k u}{\partial x^k} = e^x \sin(y)$, 当 k 为偶数时, $|\frac{\partial^k u}{\partial y^k}| = e^x \sin(y)$; 当 k 为奇数时, $|\frac{\partial^k u}{\partial y^k}| = e^x \cos(y)$, 则在 Ω 上 u 各阶偏导始终小于 e 。

当 $(i, j) \in \overset{\circ}{J}_\Omega$ 时, 类似于之前的处理方法, 有:

$$\begin{aligned} &|L_h u - \bar{L}u|_{i,j} \\ &\leq \frac{1}{12} h^2 \max_{(x,y) \in \Omega} (|\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4}| + |\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4}|) \\ &\leq \frac{1}{6} h^2 e \end{aligned}$$

当 $(i, j) \in \tilde{J}_{\Omega_1}$ 时, 有:

$$\begin{aligned} &|L_h u - \bar{L}u|_{i,j} \\ &\leq \frac{1}{6} h^2 \max_{(x,y) \in \Omega} (|\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3}| + \frac{1}{8} h |\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4}| + \frac{1}{8} h |\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4}|) \\ &\leq \frac{1}{6} h^2 (1 + \frac{1}{4} h) e \end{aligned}$$

当 $(i, j) \in \tilde{J}_{\Omega_2}$ 时, 有:

$$\begin{aligned} & |L_h u - \bar{L}u|_{i,j} \\ & \leq \frac{1}{6}h^2 \max_{(x,y) \in \Omega} (|\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3}| + \frac{1}{8}h|\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4}| + \frac{1}{8}h|\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4}|) \\ & \leq \frac{1}{6}h^2(1 + \frac{1}{4}h)e \end{aligned}$$

综合上面的四个分析, 结合在Dirichlet边界上没有误差, 可以得到在全空间 Ω 上, 当 $h < 4$ (而这是显然满足的), 有如下的截断误差估计:

$$\|L_h u - \bar{L}u\|_{\infty} \leq \frac{1}{3}h^2 e$$

再估计差分残量的模。

由于采用共轭梯度法时, 是用残量是否达到预定值及是否到达最大迭代次数做为迭代终止条件, 则我们可以选择迭代终止条件为残量 $\|r\|_{\infty} < 5 \times 10^{-7}$ 。此时, 通过选取合适的 h , 使得误差小于 10^{-5} 。即

$$\|e_h\|_{\infty} \leq \frac{9}{2}(\frac{1}{3}h^2 e + 5 \times 10^{-7}) \leq 10^{-5}$$

解得 $h \leq 0.0014$ 。则取步长 $h = 0.001$, 可满足精度达到 10^{-5} 。

§2.4 后验误差估计确定步长 h 及相应的求解算法

后验误差估计式如下:

$$U_{h,(i,j)} - u_{i,j} = \frac{4}{3}(U_{h,(i,j)} - U_{\frac{h}{2},(i,j)}) + o(h^4)$$

此时, 先计算 $\frac{\|U_{h,(i,j)} - U_{\frac{h}{2},(i,j)}\|_{\infty}}{\|U_{\frac{h}{2},(i,j)} - U_{\frac{h}{4},(i,j)}\|_{\infty}} \approx 4$, 则认为网格尺度 h 足够小, 此时, 若 $\frac{4}{3}\|U_{h,(i,j)} - U_{\frac{h}{2},(i,j)}\|_{\infty} \leq 10^{-5}$, 则认为已达到 10^{-5} 的精度, 否则, 将网格尺度变为原来的 $\frac{1}{2}$, 直到 $\frac{4}{3}\|U_{h,(i,j)} - U_{\frac{h}{2},(i,j)}\|_{\infty} \leq 10^{-5}$ 。

§2.5 数值试验结果及分析

对于利用先验误差估计来确定网格尺度, 我们取 $h = 0.001 \leq 0.0014$, 取共轭梯度法终止迭代条件为 $\|r\|_{\infty} \leq 5 \times 10^{-7}$ 。则有相应的数据如下:

	时间代价	误差 $\ e_h\ _{\infty}$
步长 $h=0.001$	422.84 s	4.9818×10^{-8}

其中, 误差计算公式为 $\|e_h\|_{\infty} = \|\tilde{U}_h - u\|_{\infty}$ 。

对于利用后验误差估计来确定网格尺度, 取 h 初值为 $h_0 = 0.25$, 逐次分

半, 并计算 $U_h, U_{\frac{h}{2}}, U_{\frac{h}{4}}$, 直到 $\frac{\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty}{\|U_{\frac{h}{2}} - U_{\frac{h}{4}}\|_\infty} \in (3.99, 4.01)$, 则认为网格尺度 h 足够小, 此时, 若 $\frac{4}{3}\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty \leq 10^{-5}$, 则认为已达到 10^{-5} 的精度, 否则, 将网格尺度变为原来的 $\frac{1}{2}$, 直到 $\frac{4}{3}\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty \leq 10^{-5}$ 。列出到满足要求的 h 的相关数据。

步长	计算该网格尺度的 时间代价	$\frac{4}{3}\ U_h - U_{\frac{h}{2}}\ _\infty$	$(\ U_h - U_{\frac{h}{2}}\ _\infty)/$ $(\ U_{\frac{h}{2}} - U_{\frac{h}{4}}\ _\infty)$
$h = h_0 = 0.25$	0.0024 s	0.0025	3.3955
$h = \frac{1}{2}h_0$	0.0024 s	7.3350×10^{-4}	3.8170
$h = \frac{1}{2^2}h_0$	0.0090 s	1.9217×10^{-4}	3.9601
$h = \frac{1}{2^3}h_0$	0.0142 s	4.8526×10^{-5}	3.9927
$h = \frac{1}{2^4}h_0$	0.0848 s	1.2154×10^{-5}	3.9982
$h = \frac{1}{2^5}h_0$	0.6389 s	3.0398×10^{-6}	-
$h = \frac{1}{2^6}h_0$	6.5373 s	-	-

在 $h = \frac{1}{2^5}h_0$ 时, $\frac{4}{3}\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty / \leq 10^{-5}$, 且 $(\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty)/(\|U_{\frac{h}{2}} - U_{\frac{h}{4}}\|_\infty)$ 已在步长为 $\frac{1}{2^5}h_0$ 处满足属于(3.99, 4.01)的要求, 即网格尺度足够小, 故停止计算。而网格尺度为 $h = \frac{1}{2^7}h_0$ 的数值结果是不必要的, 故而出现了空缺。

我们可以看出, 当网格尺度为 $h = \frac{1}{2^5}h_0 = 0.0078125$ 时, 就有它的误差主项 $\frac{4}{3}\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty / \leq 10^{-5}$, 故而认为当网格尺度为 $h = \frac{1}{2^5}h_0 = 0.0078125$ 时, 计算精度达到了 10^{-5} 。

我们就计算解是否达到了 10^{-5} 精度要求、误差主项的阶是否为2两方面做验证。

§2.5.1 关于计算解是否达到了 10^{-5} 的精度要求。

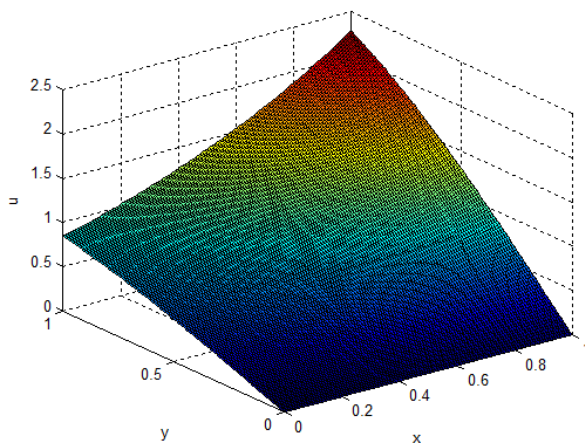
对于先验误差估计, 从第一个表格中可以看出, 计算解 \tilde{U}_h 与精确解 u 的误差 e_h 有 $\|e_h\|_\infty = 4.9818 \times 10^{-8} \ll 10^{-5}$, 比要求的精度 10^{-5} 小近500倍, 确实达到了要求的精度, 但也表示取的网格尺度偏小。

对于后验误差估计, 当网格尺度为 $h = \frac{1}{2^5}h_0 = 0.0078125$ 时, 计算解 \tilde{U}_h 与精确解 u 的误差 e_h 的无穷范数, 得到下表:

步长	误差 $\ e_h\ _\infty$
$h = 0.0078125$	3.0399×10^{-6}

图象如下:

图 3 计算解图象



从该表中可以看出, $\|e_h\|_\infty \leq 10^{-5}$, 确实是满足要求精度的计算解, 验证了后验误差的可靠性。在后验误差估计中, 同时也是最方便的, 我们仅凭得到的计算解就可以得到计算解与精确解较好的估计, 同时, 还避免了先验误差估计估的网格尺度偏小的问题, 有效减免了运算量。

§2.5.2 关于误差主项的阶是否为2。

在先验误差估计中, 同样利用后验误差估计中用的数据来估计主项的阶。假定该差分格式的误差主项阶为 α , 则有:

$$U_{h,(i,j)} = u_{i,j} + C_{i,j}h^\alpha + o(h^\alpha)$$

其中, $C_{i,j}$ 是与 h 无关的网格函数, α 为待定的误差主项阶。

因此, 当 h 充分小时, 与之前的处理方法一样, 有:

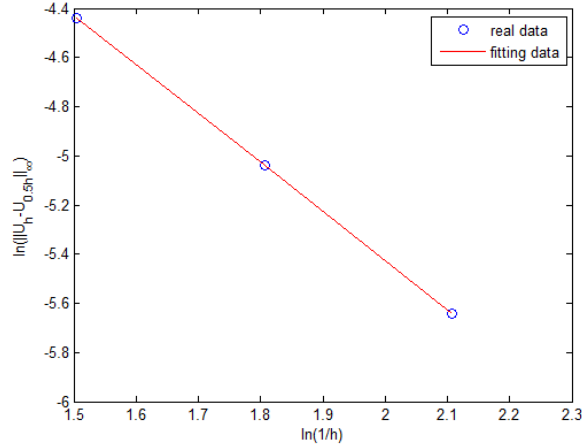
$$\lg\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty \approx \lg((1 - 2^{-\alpha})C) - \alpha \lg h^{-1}$$

这说明, 当 h 趋于0时, 在以 $\lg h^{-1}$ 为横坐标, $\lg\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty$ 为纵坐标的双对数坐标中, 数值结果 $\lg\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty$ 渐近的趋于一条斜率为 $-\alpha$ 的直线, 截距与 C 有关, 因此, 利用逐次减半的网格尺寸 h 的 $\lg\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty$ 应用最小二乘进行拟合。为了数据的可靠性, 仅采用从步长为 $\frac{1}{23}h_0$ 后的数据进行拟合。拟合结果如下:

$$\lg\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty = -1.4311 - 1.9983 \lg h^{-1}$$

即 $\alpha = 1.9983, C = 0.0494$ 。相应的拟合图如下：

图 4 拟合图



从图中可以看出，拟合数据和数值结果 $\lg\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty$ 几乎在一条直线上，而且经计算拟合数据和数值结果 $\lg\|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_\infty$ 的误差最大为 2.1×10^{-4} 左右，说明在尺度足够小时，确实可以忽略误差余项。同时，利用数值解估计的误差主项阶为1.9983与2十分接近。从数值上验证了误差主项的阶确实为2。

§3 程序说明

由于有两组不同的右端项和边界条件，故而将程序分为了code1和code2两个文件夹，里面的程序相似，但不能混用。

对于这两组程序，prior是用于在给定网格尺度下进行计算，并计算与精确解误差的无穷范数。posterior是用于从某个网格尺度开始，逐次分半，直到网格尺度足够小，且误差小于容许值。elliptic是一个函数，在给定网格尺度下就可以计算相应的解，根据问题的不同有不同的elliptic函数。verify是用于判断误差主项阶是否为2，需要在posterior运行后才能运行。CG是共轭梯度法求解线性方程组。