

偏微分方程数值解复习提纲

一. 基本内容 : (1) 椭圆型方程差分方法; (2) 抛物型方程差分方法; (3) 双曲型方程差分方法; (4) 椭圆型方程的有限元方法.

二. 基本概念 :

- (1) 显式和隐式差分格式, 网格比和加密路径;
- (2) 差分格式的截断误差、相容性、稳定性、收敛性、逼近精度阶和收敛阶;
- (3) 双曲型方程(组)的特征与Riemann 不变量, 差分格式的依赖区域和CFL 条件;
- (4) 差分格式的增长因子和增长矩阵、振幅误差与相位误差、耗散与色散、群速度;
- (5) 双曲守恒方程的弱解与激波传播速度;
- (6) 守恒性与守恒型差分格式、有限体积法;
- (7) 差分格式的Fourier 分析与 L^2 稳定性、最大值原理与 L^∞ 稳定性、实用稳定性和强稳定性、网格的Péclet 数;
- (8) 椭圆边值问题的变分形式与弱解、强制边界条件与自然边界条件;
- (9) Galerkin 方法与Ritz 方法, 协调与非协调有限元方法;
- (10) 有限元与有限元空间, 有限元插值算子与插值函数, 有限元方程与有限元解;
- (11) 有限元的仿射等价与等参等价, 有限元剖分的正则性和拟一致性.

三. 基本方法与技巧 :

- (1) 比较函数与利用最大值原理的误差分析;
- (2) Taylor 展开、Fourier 分析、最大值原理;
- (3) 修正方程分析、能量法分析;
- (4) 充分利用解的守恒性和特征, 以及适当处理初始条件与边界条件;
- (5) Sobolev 空间及其基本性质, 如嵌入定理、迹定理, Poincaré-Friedrichs 不等式;
- (6) 仿射等价、多项式不变算子、商空间与商范数、Sobolev 空间半范数的关系;
- (7) Aubin-Nische 技巧, Bramble-Hilbert 引理, 双线性引理.

四. 基本格式 :

- (1) 二维Poisson 方程的五点差分格式;
- (2) 抛物型方程的显式差分格式、隐式差分格式、Crank-Nicolson 格式和 θ -方法;
- (3) 具有热守恒性质的格式;
- (4) ADI 格式与LOD 格式;
- (5) 双曲型方程的迎风格式、Lax-Wendroff 格式、盒式格式和蛙跳格式;

- (6) 守恒型格式、有限体积格式;
- (7) 二阶椭圆型方程 C^0 -类协调有限元方法.

五. 基本定理与结论 :

- (1) 最大值原理, 比较定理;
- (2) Lax 等价定理;
- (3) CFL 条件、von Neumann 条件、实用稳定性和强稳定性条件;
- (4) Lax-Milgram 引理、Céa 引理、第一和第二Strang 引理;
- (5) 椭圆型方程有限元解的先验误差估计与收敛性.