Numerical Analysis

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

复合梯形求积公式截断误差的渐近展开式

定理： *(Euler-Maclaurin 公式)* 设 $f \in \mathbb{C}^m[a,b]$, $m \geq 3$, 则梯形求积公式 $T_h(f)$ 的截断误差 $\int_a^b f(x)dx - T_h(f)$ 可表示为

$$-\sum_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} \frac{b_{2j}h^{2j}}{(2j)!}[f^{(2j-1)}(b)-f^{(2j-1)}(a)]+(-1)^m h^m \int_a^b \tilde{B}_m(\frac{x-a}{h})f^{(m)}(x)dx,$$

其中 $[\frac{m}{2}]$ 指 $\leq \frac{m}{2}$ 的最大整数，$b_{2j} = (2j)!B_{2j}(0)$ 为 *Bernoulli* 数，$\tilde{B}_m(x)$ 是 *Bernoulli* 多项式的周期扩张。

注： Euler-Maclaurin 公式是 Romberg 求积方法的理论基础之一（另一个理论基础是 Richardson 外推加速收敛技术）。为证明 Euler-Maclaurin 公式, 首先介绍 Bernoulli 多项式及其性质.

Bernoulli 多项式及其性质

定义： n 次 *Bernoulli* 多项式 $B_n(x)$ 是指由以下递推关系

$$\begin{cases} B_0(x) = 1, \\ B_n'(x) = B_{n-1}(x), \quad \text{且} \quad \int_0^1 B_n(x)dx = 0, \quad n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

定义的多项式序列. 称$b_n = n!B_n(0)$ $(n = 0, 1, \cdots)$ 为*Bernoulli* 数.

- $\int_0^1 B_{n+1}'(x)dx = \int_0^1 B_n(x)dx = 0 \Rightarrow B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1), \ \forall n \geq 1.$
- 对称性： $B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.
  $n = 0, 1$ 时，显然成立；设当 $n = k \geq 1$ 时仍然成立，则有

$$B_{k+1}(x) - B_{k+1}(0) = \int_0^x B_k(t)dt = \int_0^x (-1)^k B_k(1-t)dt$$

$$= (-1)^{k+1} \int_1^{1-x} B_k(s)ds = (-1)^{k+1}(B_{k+1}(1-x) - B_{k+1}(1))$$

Bernoulli 多项式及其性质

因此，由 $B_{k+1}(0) = B_{k+1}(1), \forall k \geq 1$ 得

$$B_{k+1}(x) - (-1)^{k+1} B_{k+1}(1-x) = (1 - (-1)^{k+1}) B_{k+1}(0).$$

而 $\int_0^1 [B_{k+1}(x) - (-1)^{k+1} B_{k+1}(1-x)] dx = 0$, 所以

$$\left(1 - (-1)^{k+1}\right) B_{k+1}(0) = 0.$$

于是，得 $B_{k+1}(x) = (-1)^{k+1} B_{k+1}(1-x)$. 由归纳法知对称性对所有 n 成立。特别地，$B_{2m+1}(0) = -B_{2m+1}(1), \forall m \geq 1$.

- $B_{2m+1}(0) = B_{2m+1}(1) = 0,\ m = 1, 2, \cdots$. （边值的齐次性）
- $B_0(x) = 1,\ B_1(x) = x - \frac{1}{2},\ B_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x + \frac{1}{6}), \cdots\cdots,$ $\forall x \in x \in [0, 1]$.

Bernoulli 多项式的周期扩张及其 Fourier 级数展开式

- 记 $\tilde{B}_1(x)$ 为 $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ $(B_1(0) = B_1(1) = 0)$ 的周期扩张，即
  $$\tilde{B}_1(x) = B_1(x), \quad \forall x \in [0,1], \qquad \tilde{B}_1(x+1) = \tilde{B}_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
  则 $\tilde{B}_1(x)$ 可展开成 Fourier 级数
  $$\tilde{B}_1(x) = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{2k\pi}.$$
- 记 $\tilde{B}_n(x)$ 为 $B_n(x)$, $n = 1, 2, \cdots$ 的周期扩张，即
  $$\tilde{B}_n(x) = B_n(x), \quad \forall x \in [0,1], \qquad \tilde{B}_n(x+1) = \tilde{B}_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Bernoulli 多项式的周期扩张及其 Fourier 级数展开式

则由 $\tilde{B}_2'(x) = \tilde{B}_1(x)$ 得：

$$\tilde{B}_2(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{(2k\pi)^2} + c_2.$$

又 $\int_0^1 \tilde{B}_2(x)dx = 0$, 所以 $c_2 = 0$.

一般地，由 $B_n(x)$ 的递推关系易得：对 $m = 2, 3, \cdots$

$$\tilde{B}_{2m-1}(x) = (-1)^m 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{(2k\pi)^{2m-1}}, \quad \tilde{B}_{2m}(x) = (-1)^{m-1} 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{(2k\pi)^{2m}}.$$

注： 特别地有$|\tilde{B}_{2m}(0)| \leq \frac{2}{(2\pi)^{2m}} + \int_1^{\infty} \frac{2}{(2\pi x)^{2m}}\, dx \leq \frac{4m}{(2m-1)(2\pi)^{2m}}$.

Euler-Maclaurin 公式的证明

证明： 对任给的 $g \in \mathbb{C}^m[0,1]$, 由 $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ 得

$$\int_0^1 B_1(x)g'(x)dx = \frac{1}{2}[g(1)+g(0)] - \int_0^1 g(x)dx.$$

另一方面，由 $B_k'(x) = B_{k-1}(x)$ 和 $B_k(0) = B_k(1)$, $2 \le k \le m$, 经过 $m-1$ 次分部积分得

$$\int_0^1 B_1(x)g'(x)dx = \sum_{k=2}^{m}(-1)^k B_k(0)\left[g^{(k-1)}(1) - g^{(k-1)}(0)\right] - (-1)^m \int_0^1 B_m(x)g^{(m)}dx.$$

再由 $B_{2j+1}(0) = 0$, $j = 1, 2, \cdots$, 得 (记 $b_n = n!B_n(0)$)

$$\int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}[g(0)+g(1)] - \sum_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} \frac{b_{2j}}{(2j)!}\left[g^{(2j-1)}(1) - g^{(2j-1)}(0)\right]$$

$$+ (-1)^m \int_0^1 B_m(x)g^{(m)}(x)dx.$$

Euler-Maclaurin 公式的证明(续)

现令 $x = x_l + hz$, $l = 0, 1, \cdots, n-1$, $g_l(z) = f(x_l + hz)$, 并在每个子区间 $[x_l, x_{l+1}]$ 上应用上式得

$$\int_{x_l}^{x_{l+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_l)+f(x_{l+1})] - \sum_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} \frac{b_{2j}h^{2j}}{(2j)!}\left[f^{(2j-1)}(x_{l+1}) - f^{(2j-1)}(x_l)\right] + (-1)^m h^m \int_{x_l}^{x_{l+1}} B_m\left(\frac{x-x_l}{h}\right) f^{(m)}(x)dx.$$

再对 $l = 0, 1, \cdots, n-1$ 求和，并利用 $\tilde{B}_m(x)$ 的定义，即得 Euler-Maclaurin 公式。 ■

对 $f \in \mathbb{C}_{2\pi}^{\infty}$ 复合梯形求积公式具有谱精度

作为 Euler-Maclaurin 公式的应用，除了 Romberg 求积公式外，我们还有以下结果：

定理： 设 $f \in \mathbb{C}_{2\pi}^{\infty}$，则存在复平面上的带状区域 $D \triangleq \mathbb{R} \times (-a, a) \subset \mathbb{C}$ $(a > 0)$, s.t. f 可延拓为 D 上的解析函数，并且复合梯形求积公式的截断误差满足

$$|E_h(f)| \leq \frac{4\pi M}{e^{2\pi a/h} - 1}.$$

这里 $M = \sup_{x \in D} |f(z)|$.

定理表明，对任意的 $f \in \mathbb{C}^{\infty}$ 周期函数，复合梯形求积公式具有谱精度，即其收敛速度快于任何指定的代数阶。

Gauss 求积公式问题的提法

由定理 3.3.2 知，用 n 个积分节点 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 构造的数值积分公式 $I_n(f)=\sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$ 的代数精度最多是 $2n-1$ 阶的。

问题： 给定区间 $[a,b]$, 是否存在代数精度恰好为 $2n-1$ 阶的数值积分公式 $I_n(f)=\sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$?

问题： 更一般地，给定区间 $[a,b]$ 和积分权函数 $\rho(x)>0$, *a.e.* $x\in[a,b]$ 是否存在代数精度恰好为 $2n-1$ 阶的数值积分公式 $I_n(f)=\sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$?

定义： 这种对给定的节点数 n, 代数精度达到最大值 $2n-1$ 的求积公式称为 *Gauss* 求积公式.

问题： Gauss 求积公式是否存在？若存在，有何特征？如何求？

区间 $[-1,1]$ 上权函数 $\rho(x) \equiv 1$ 的 Gauss 求积公式

- 首先考察 $n = 1$ 的情形，即只有一个节点，要求代数精度为 1. 分别取 $f(x) = 1$ 和 $f(x) = x$, 由

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx - A_1 = 0, \quad \int_{-1}^{1} x\,dx - A_1 x_1 = 0,$$

得 $A_1 = 2$ 和 $x_1 = 0$. 由此知

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2f(0).$$

对一般区间 $[a,b]$, 通过积分变量替换 $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$, 得：一个节点的 Gauss 求积公式就是中点公式

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

区间 $[-1,1]$ 上权函数 $\rho(x)\equiv 1$ 的 Gauss 求积公式

- 再考察 $n=2$ 的情形，即有两个节点，要求代数精度为 3. 分别取 $f(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3$，由

$$\begin{cases} A_1+A_2=\int_{-1}^{1}1\,dx=2,\\ A_1x_1+A_2x_2=\int_{-1}^{1}x\,dx=0,\\ A_1x_1^2+A_2x_2^2=\int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{2}{3},\\ A_1x_1^3+A_2x_2^3=\int_{-1}^{1}x^3\,dx=0.\end{cases}$$

不难证明该方程组存在唯一解 $A_1=A_2=1,\ -x_1=x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 由此知 $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\approx f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 对一般的区间 $[a,b]$，通过积分变量替换 $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$，得：两个积分节点的 Gauss 求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right].$$

区间 $[a, b]$ 上一般权函数 $\rho(x)$ 的 Gauss 求积公式

对于一般的问题，通过解非线性方程组的方式求 Gauss 求积公式的节点和权数并不简单。

首先注意到定理 3.3.1 ($I_n(f)$ 为插值型$\Leftrightarrow$ 由插值多项式导出) 和定理 3.3.2 ($I_n(f)$ 代数精度为$n+k$ 的充要条件) 可以推广到区间 $[a, b]$ 上一般权函数 $\rho(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$ 的数值积分公式(证明方法如出一辙) (注: 定理中的n 为代数多项式的次数).

设 $\{l_j(x)\}_{j=1}^n$ 是节点为 $\{x_j\}_{j=1}^n$ 的 $n-1$ 次 Lagrange 插值多项式基底函数，令 $A_j = \int_a^b \rho(x) l_j(x)\, dx$, $j = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\, dx \approx \sum_{j=1}^n A_j f(x_j)$$

的代数精度至少是$n-1$.

区间 $[a,b]$ 上一般权函数 $\rho(x)$ 的 Gauss 求积公式

记 $\omega_n(x)=\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)$, 则对任意 $f(x)\in\mathbb{P}_{2n-1}$, 我们有

$$f(x)=\omega_n(x)P(x)+Q(x),\quad \text{其中}\ \ P(x),Q(X)\in\mathbb{P}_{n-1},$$

于是有 $f(x_j)=Q(x_j),\ j=1,2,\cdots,n$, 以及

$$\int_a^b\rho(x)f(x)\,dx=\int_a^b\rho(x)\omega_n(x)P(x)\,dx+\int_a^b\rho(x)Q(x)\,dx.$$

因此，相应的数值积分公式的代数精度为 $2n-1$ 阶的充要条件是

$$\int_a^b\rho(x)\omega_n(x)P(x)\,dx=0,\quad \forall P(x)\in\mathbb{P}_{n-1}.$$

可以证明这当且仅当 $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ 是 $[a,b]$ 上 n 次带权 $\rho(x)$ 正交多项式的零点时成立（见定理 2.9.1）.

最常用的 Gauss 求积公式—Gauss-Legendre 公式

以上分析表明，构造 Gauss 求积公式的关键在于给出相应带权正交多项式的零点和相应的积分权数.

- 区间$[-1,1]$, 权 $\rho(x)\equiv 1$ 的正交多项式是 Legendre 多项式, 以其零点为积分节点的求积公式称为 Gauss-Legendre 公式:
  1. 当 $n=1$ 时, $x_1=0$, $A_1=2$, 即 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0)$;
  2. 当 $n=2$ 时, $-x_1=x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $A_1=A_2=1$, 即 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(\frac{-1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$;
  3. 当 $n=3$ 时, $-x_1=x_3=\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2=0$, $A_1=A_3=5/9$, $A_2=8/9$, 即 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

注： 实际使用时多采用复合 Gauss-Legendre 公式。

常用的 Gauss 求积公式—Gauss-Chebyshev 公式

- 区间$[-1,1]$, 权 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式是 Chebyshev 多项式, 以其零点为积分节点的求积公式称为 Gauss-Chebyshev 公式:

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\approx\frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n}f(x_j),$$

其中 $x_j=-\cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)$, $j=1,2,\cdots,n$ 为 n 次 Chebyshev 多项式 $T_n(x)$ 的零点.

常用的 Gauss 求积公式—Gauss-Laguerre 公式

- 区间$[0, +\infty)$, 权 $\rho(x) = e^{-x}$ 的正交多项式是 Laguerre 多项式, 以其零点为积分节点的求积公式称为 Gauss-Laguerre 公式.

  例如, 当 $n = 2$ 时, $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$, $A_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, $A_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, 即

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2}).$$

常用的 Gauss 求积公式—Gauss-Hermite 公式

- 区间$(-\infty,+\infty)$, 权 $\rho(x)=e^{-x^2}$ 的正交多项式是 Hermite 多项式, 以其零点为积分节点的求积公式称为 Gauss-Hermite 公式.

  例如, 当 $n=3$ 时, $-x_1=x_3=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x_2=0$, $A_1=A_3=\frac{\sqrt{\pi}}{6}$, $A_2=\frac{\sqrt{\pi}}{24}$, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{6} f\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{24} f(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{6} f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

Gauss 求积公式的截断误差

定理： 设 $\{x_k\}_{k=0}^n$ 是区间 $[a,b]$ 上，积分权 $\rho(x)\equiv 1$ 的 $n+1$ 次正交多项式的零点. 记 $\omega_{n+1}(x)=\prod_{k=0}^n(x-x_k)$. 则当 $f(x)\in\mathbb{C}^{2n+2}[a,b]$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 *Gauss* 求积公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 的截断误差可以表示为

$$E(f)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b[\omega_{n+1}(x)]^2dx.$$

证明： 记以 $\{x_k\}_{k=0}^n$ 为插值节点的 $f(x)$ 的 Hermite 插值多项式为 $H_n(x)$，即 $H_n(x_k)=f(x_k)$, $H_n'(x_k)=f'(x_k)$, $k=0,1,\cdots,n$. 则有 $H_n(x)\in\mathbb{P}_{2n+1}$，因而有 $\int_a^b H_n(x)dx=\sum_{k=0}^n A_kH_n(x_k)$.

Gauss 求积公式的截断误差（续）

因此有

$$E(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} A_k H_n(x_k)$$

$$= \int_a^b [f(x) - H_n(x)]dx = \int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\xi(x))}{(2n+2)!}[\omega_{n+1}(x)]^2 dx.$$

这里利用了 Hermite 插值多项式的截断误差（见习题 2.10）. 由此及积分中值定理即得定理结论。

注： 对其它带权的 Gauss 积分公式也有与本定理类似的结论，证明方法也是相同的，只需将积分换为相应的带权积分。

积分方程与积分方程数值解问题的提出

- 积分方程：方程中有积分项，且被积函数中包含未知函数;
- 积分方程的解一般是有一定光滑性的函数;
- 积分方程的解一般不能解析的给出;
- 积分方程在实际问题中有广泛应用，需要数值求解方法。

以比较简单的第二类 Fredholm 积分方程为例：

$$y(t) = \lambda \int_a^b k(t,s)y(s)ds + f(t), \quad t \in [a,b],$$

其中 $f(t)$, $k(t,s)$ 为已知函数，λ 为已知常数，y 为未知函数。

注： 可以证明第二类 Fredholm 积分方程的解的结构有所谓二择一性质，即 (1) 解存在唯一; (2) 齐次方程有非零解，此时非齐次方程有无穷多解，λ^{-1} 称为积分算子 $\int_a^b k(t,s)y(s)ds$ 的特征值，相应的特征向量空间是有限维的.

积分方程数值解问题的导出 (仅限于讨论解存在唯一的情形)

积分方程数值解问题：找一个有限维函数 $Y(t)$ 使其在一定意义下近似满足积分方程.

积分方程的数值求解通常包括以下步骤

- **积分的离散化**: 用适当数值积分代替积分;
- **函数空间的离散化**: 用 $\{y(t_i)\}_{i=0}^{n}$ 代替 $y(t)$, $t \in [a, b]$;
- **积分方程的离散化**: 将积分方程化为有限阶代数方程;
- **离散问题求解**： 通过数值求解代数方程得到 $\{y(t_i)\}_{i=0}^{n}$;
- **给出积分方程近似解**： 通过数据拟合 (如分段线性插值).

积分方程数值解问题的导出

现以第二类 Fredholm 积分方程为例实现以上各步.

- 给出 $[a, b]$ 的一个剖分 $a \le t_0 < \cdots < t_n \le b$, 这一方面是作为数值积分的节点，另一方面，未知函数在这些节点上的值 $\{y(t_i)\}_{i=0}^n$ 成为了我们数值求解的目标;
- 用相应的数值积分替换积分方程中的积分得等价方程

$$y(t) = \lambda \sum_{j=0}^{n} A_j k(t, t_j) y(t_j) + f(t) + R_n(t).$$

其中 $R_n(t) \triangleq R_n(\lambda k(t, \cdot) y(\cdot))$ 是数值积分的截断误差函数.

积分方程数值解问题的导出

- 不妨设截断误差是个小量，将其舍弃得到近似的函数方程

$$Y(t) = \lambda \sum_{j=0}^{n} A_j k(t, t_j) Y(t_j) + f(t).$$

- 在该方程中取 $t = t_i$, 并记 $Y_i = Y(t_i)$, 得线性代数方程组

$$Y_i = \lambda \sum_{j=0}^{n} A_j k(t_i, t_j) Y_j + f(t_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

- 注意积分方程的解在节点上的值 $y_i = y(t_i)$ 满足方程组

$$y_i = \lambda \sum_{j=0}^{n} A_j k(t_i, t_j) y_j + f(t_i) + R_n(t_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n,$$

其中 $R_n(t_i)$ 是数值积分的截断误差函数 $R_n(t)$ 在 t_i 处的值.

积分方程数值解问题的导出

- 引入记号

$$D = \lambda \mathrm{diag}(A_0, A_1, \cdots, A_n), \quad K = \big(k(t_i, t_j)\big)_{(n+1)\times(n+1)},$$

$$Y = (Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)^T, \quad F = (f(t_0), f(t_1), \cdots, f(t_n))^T,$$

- 则 $\{Y_i\}_{i=0}^n$ 的线性代数方程组可以写成矩阵形式

$$(I - KD)Y = F.$$

这里 I 为单位矩阵. 当第二类 Fredholm 积分方程的解存在唯一时, 一个成功的离散化方法应该满足:

(1) 相容性条件, 即 $\lim_{n\to\infty} \max_{0\le i\le n} |R_n(t_i)| = 0$;

(2) $(I - KD)$ 关于 n 一致可逆, 即 $\|(I - KD)^{-1}\| \le C$ (通常也称为稳定性条件), 其中 C 是与 n 无关的常数.

思考题: 当 λ^{-1} 是积分算子 $\int_a^b k(t,s)y(s)ds$ 特征值时, 应该如何提第二类 Fredholm 积分方程的数值解问题.

积分方程数值解问题的提法与数值解的误差估计

给出适当的数值积分公式和相应的数值积分节点集 $\{t_i\}_{i=0}^n$（例如复合梯形公式），则得相应的积分方程的数值解问题:

$$\begin{cases} \text{找 } \{Y_i\}_{i=0}^n \text{ 使得} \\ (I-KD)Y=F. \end{cases}$$

记 $e_n=(Y_0-y_0, Y_1-y_1, \cdots, Y_n-y_n)^T$, 则 e_n 满足方程

$$(I-KD)e_n=-R_n,$$

其中 $R_n=(R_{n,0}, R_{n,1}, \cdots, R_{n,n})^T$, $R_{n,i}=R_n(t_i)$ 是数值积分的截断误差. 由此知

$$\|e_n\|\le C\|R_n\|.$$

注： 可以采用先验或后验估计的方法估计 $\|R_n\|$.

积分方程数值解的数值稳定性 (仅限于讨论解存在唯一的情形)

积分方程数值解的数值稳定性主要依赖于矩阵 $I-KD$ 的条件数 $\mathrm{cond}(I-KD)=\|I-KD\|\|(I-KD)^{-1}\|$.

当 $I-KD$ 有误差 δA, F 有误差 δF 时, 数值解的相对误差满足

$$\frac{\|\delta Y\|}{\|Y\|}\leq \mathrm{cond}(I-KD)\left(\frac{\|\delta A\|}{\|I-KD\|}+\frac{1}{1-\mathrm{cond}(I-KD)\frac{\|\delta A\|}{\|I-KD\|}}\frac{\|\delta F\|}{\|F\|}\right)$$

积分方程数值解 $\tilde{Y}$ 的误差满足

$$\|y-\tilde{Y}\|\leq\|y-Y\|+\|Y-\tilde{Y}\|\leq C\|R_n\|+\|Y\|\frac{\|\delta Y\|}{\|Y\|}.$$

习题三：10，11； 上机习题三：8 (3), 11

Thank You!