Numerical Analysis

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

计算机图形生成与 B-样条曲线

- 利用所给出的一组离散点，构造具有一定的光滑度曲线（或曲面），使其满足一定的几何要求（如单调性、凸性等）。
- 所构造的曲线（或曲面）不一定过所给的离散点，但却有一定的逼近性，且可由这些点（又称控制点）做局部调整.
- 所构造的曲线（或曲面）是分片多项式，便于计算。
- 常用的方法有 Bernstein 多项式、Bézier 和 B-样条曲线等。
- 其中 B-样条曲线是由具有紧支集的规范化的 B-样条函数为基函数张成的曲线。

B-样条函数

- 设有点列 $\cdots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \cdots < x_j < \cdots$，满足 $\lim_{j\to\pm\infty} x_j = \pm\infty$.
- 对任给的正整数 k, 定义
$$M_k(x;y) \triangleq k(y-x)_+^{k-1} = \begin{cases} k(y-x)^{k-1}, & \forall y \geq x, \\ 0, & \forall y < x. \end{cases}$$
- 将 x 视为参数, 做 $M_n(x;y)$ 关于 y 在 $y = x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处的 n 阶差商，记作 $M_n(x) = M_n(x;x_0,x_1,\cdots,x_n)$.
- 由 n 阶差商的基本性质（见（2.4.2）），$M_n(x)$ 可以写为
$$M_n(x) = M_n(x;x_0,x_1,\cdots,x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{n(x_j-x)_+^{n-1}}{\omega_n'(x_j)},$$
其中 $\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$.

B-样条函数

- 容易验证函数 $M_n(x)$ 满足
  1. $M_n(x) = 0, \forall x \geq x_n;$
  2. $M_n(x) = 0, \forall x \leq x_0, \quad \because M_n(x; y) = n(y-x)^{n-1}, x \leq x_0 \leq y;$
  3. 对任意的$-\infty < i < \infty$, $M_n(x) \in \mathbb{P}_{n-1}[x_i, x_{i+1}]$.
  4. $M_n(x) \in \mathbb{C}^{n-2}(-\infty, \infty)$.
- 可见函数 $M_n(x)$ 是支集为 $[x_0, x_n]$ 的 $n-1$ 次样条函数。
- $M_n(x)$ 还有其它许多很好的性质，如非负性 (见以下定理), 单位性（$\int_{x_0}^{x_n} M_n(x; x_0 \cdots, x_n)dx = 1$, 见习题 14）等.

B-样条函数 $M_n(x)$ 的性质

定理： $M_n^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, \cdots, n-2$ 在区间 (x_0, x_n) 内恰有 i 个零点。特别地有 $M_n(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_n)$.

证明： 由 $M_n(x)$ 的表达式（2.5.23）知

$$M_n(x) = \frac{n(x_n - x)^{n-1}}{\omega_n'(x_n)} > 0, \quad \forall x \in (x_{n-1}, x_n).$$

1. $\therefore \exists$ 三点 $x_0 < x^* < x_n$, s.t. $\mathrm{sign}(M_n(x)) = 0, +, 0$.
2. 由中值定理, $\exists$ 四点 $x_0 < x_1^* < x_2^* < x_n$, s.t. $\mathrm{sign}(M_n'(x)) = 0, +, -, 0$ (变号一次). $\therefore \exists\, x_1^\dagger \in (x_1^*, x_2^*)$, s.t. $M_n'(x_1^\dagger) = 0$.

B-样条函数 $M_n(x)$ 的性质证明续

3. 由中值定理, $\exists$ 五点 $x_0 < x_1^{\natural} < x_2^{\natural} < x_3^{\natural} < x_n$, s.t. $\mathrm{sign}(M_n''(x)) = 0, +, -, +, 0$ (变号两次). $\therefore \exists\ x_1^{\ddagger} \in (x_1^{\natural}, x_2^{\natural})$ 和 $x_2^{\ddagger} \in (x_2^{\natural}, x_3^{\natural})$ s.t. $M_n''(x_1^{\ddagger}) = M_n''(x_2^{\ddagger}) = 0$.

4. 依次类推, $\exists\ n+1$ 个点 $x_0 < \bar{x}_1 < \cdots < \bar{x}_{n-1} < x_n$, s.t. $\mathrm{sign}(M_n^{(n-2)}(x)) = 0, +, -, +, \cdots, 0$ (变号 $n-2$ 次). $\therefore \exists\ x_i^{\spadesuit} \in (\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$, s.t. $M_n^{(n-2)}(x_i^{\spadesuit}) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n-2$.

5. 另一方面，由 $M_n(x)$ 的表达式（2.5.23）知

$$M_n^{(n-2)}(x) = (-1)^{n-2} n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(x_j - x)_+}{\omega_n'(x_j)},$$

这是一条以 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 为顶点横坐标的折线（共有 n 段, 可以验证这些折线段的斜率均非零）.

B-样条函数 $M_n(x)$ 的性质证明续

6. 由 $M_n^{(n-2)}(x_0) = M_n^{(n-2)}(x_n) = 0$, 知该 n 段折线在 (x_0, x_{n-1}) 内最多有 $n-2$ 次变号. 又该折线在 $(x_0, x_1] \cup [x_{n-1}, x_n)$ 内无零点，因此, 在 (x_0, x_n) 内最多有 $n-2$ 个零点.

7. 结合 ④ 和 ⑥ 知 $M_n^{(n-2)}(x)$ 在 (x_0, x_n) 内恰好有 $n-2$ 个（单重）零点.

8. 最后，若对某个 $0 \le i < n-2$, $M_n^{(i)}(x)$ 在 (x_0, x_n) 内的零点个数（计重数）大于 i，则由中值定理和 Rolle 定理, $M_n^{(i+1)}(x)$ 在 (x_0, x_n) 内的零点个数（计重数）大于 $i+1$; $\cdots$; $M_n^{(n-2)}(x)$ 在 (x_0, x_n) 内的零点个数（计重数）大于 $n-2$. 这与 ⑦ 矛盾。

9. 由此，及 ② — ④ 的推理过程知, $M_n^{(i)}(x)$, $0 \le i \le n-2$, 在 (x_0, x_n) 内恰有 i 个（单重）零点。 $\blacksquare$

B-样条函数的例子

设 $x_i = i - \frac{1}{2},\ i \in \mathbb{Z}$, 则 (由定义 $M_k(x;y) \triangleq k(y-x)_+^{k-1}$, $M_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{k(x_j - x)_+^{k-1}}{\omega_k'(x_j)}$)

$$M_1(x;y) = \begin{cases} 1, & \forall y \geq x; \\ 0, & \forall y < x, \end{cases}$$

知

$$M_1(x) = \frac{M_1(x;x_1) - M_1(x;x_0)}{x_1 - x_0} = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2; \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases}$$

由

$$M_2(x) = \sum_{j=0}^{2} \frac{2(x_j - x)_+}{\omega_2'(x_j)} = (x_0 - x)_+ - 2(x_1 - x)_+ + (x_2 - x)_+ \text{ 知}$$

$$M_2(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - x, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}; \\ \frac{1}{2} + x, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & x \leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } x \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

B-样条函数的例子

由

$$M_3(x)=\sum_{j=0}^{3}\frac{3(x_j-x)_+^2}{\omega_2'(x_j)}=\frac{1}{2}\Big[-(x_0-x)_+^2+3(x_1-x)_+^2-3(x_2-x)_+^2+(x_3-x)_+^2\Big]$$

知

$$M_3(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x-\frac{5}{2})^2, & \frac{3}{2}\le x\le\frac{5}{2};\\ \frac{1}{2}(x-\frac{5}{2})^2-\frac{3}{2}(x-\frac{3}{2})^2, & \frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2};\\ \frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})^2, & -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2};\\ 0, & x\le-\frac{1}{2}\text{ 或 }x\ge\frac{5}{2}.\end{cases}$$

注： 记 Schoenberg 用中心差商表示的 B-样条为 $\hat{M}_n(x)$, 则有 $\hat{M}_n(x)=M_n(x+(n-1)/2)$.

由 m 次样条函数构成的函数空间

记区间 $[a, b]$ 的剖分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 上定义的所有 m 次样条函数构成的线性函数空间为 $\mathbb{S}_m(x_0, x_1, \cdots, x_n)$.

由于 $\mathbb{S}_m(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 中的每个函数都是分段 $\mathbb{P}_m$ 的，因此有 $(m+1)n$ 个待定参数, 而连续性条件给出了 $m(n-1)$ 个相互独立的约束条件。因此， $\mathbb{S}_m(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的维数至多是 $n+m$.

事实上， $\mathbb{S}_m(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的维数刚好是 $n+m$, 且样条函数

$$x^k, \quad k = 0, 1, \cdots, m; \quad (x - x_j)_+^m, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1,$$

构成了 $\mathbb{S}_m(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的一组基函数。

$\mathbb{S}_m(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的维数是 $n+m$ 的证明

- 只需证明上述 $n+m$ 个 m 次样条函数在 $[a,b]$ 上线性无关.
- 设 $\sum_{k=0}^{m} a_k x^k + \sum_{j=1}^{n-1} c_j (x - x_j)_+^m \equiv 0, \ \forall x \in [a,b]$.
- 当 $x < x_1$ 时，上式变为 $\sum_{k=0}^{m} a_k x^k \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad a_k = 0, \ \forall k$.
- 于是有 $c_1 (x - x_1)^m \equiv 0, \ \forall x \in (x_1, x_2) \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$.
- 依次类推得 $c_j = 0, \ j = 2, \cdots, n-1$. ■

$\mathbb{S}_m(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的规范化 B-样条基函数

- 给定节点 $x_{-m} < x_{-m+1} < \cdots < x_{n+m}$, 其中 $x_0 = a$, $x_n = b$. 对每一个 $-m \le j \le n-1$, 定义规范化的 B-样条函数

$$B_{j,m}(x) \triangleq \frac{x_{j+m+1} - x_j}{m+1} M_{m+1}(x; x_j, \cdots, x_{j+m+1}).$$

- 注意 $B_{j,m}(x)$ 的支集为 $[x_j, x_{j+m+1}]$, 可以证明前面所给的 $\mathbb{S}_m(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的一组基函数 x^k, $0 \le k \le m$, $(x - x_j)_+^m$, $1 \le j \le n-1$, 可由这 $m+n$ 个 B-样条函数在 $[a, b]$ 上线性表出。所以，它们也构成了 $\mathbb{S}_m(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 的一组基;

- $\{B_{j,m}(x)\}_{j=-m}^{n-1}$ 称为是规范的，因为支集包含区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 的所有基函数之和在该区间上恰等于 1 (证明留作习题), 即

$$\sum_{j=i-m}^{i} B_{j,m}(x) = 1, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}].$$

$\mathbb{S}_m(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 中函数的 B-样条函数表示

- $\mathbb{S}_m(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 中的每一个 m 次样条函数都可以用规范化的 m 次 B- 样条基函数通过待定系数 $\{a_j\}_{j=-m}^{n-1}$ 表示为

$$S_m(x) = \sum_{j=-m}^{n-1} a_j B_{j,m}(x).$$

- 改变 a_j 可以调整区间 (x_j, x_{j+m+1}) 上的函数值, 且调整效果越靠近该区域的中心越明显.

- 也可以通过联立求解$\{a_j\}_{j=-m}^{n-1}$ 构造 m 次样条插值函数.

最佳逼近多项式问题的提法

- 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的可微函数。
- 对任意给定的正整数 n, 找 $P_0 \in \mathbb{P}_n$, 使得
$$\|P_0(x) - f(x)\| = \min_{P \in \mathbb{P}_n} \|P(x) - f(x)\|,$$
其中 $\|\cdot\|$ 为某一指定的 $[a, b]$ 上的函数空间的范数。
- 常用的函数空间的范数有:
  - L^∞-范数: $\|f\|_\infty = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$ (最佳一致逼近问题的范数);
  - L^1-范数: $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$;
  - L^2-范数: $\|f\|_2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$ (最佳平方逼近问题的范数).

多项式函数的一致逼近性定理

Weierstrass **定理：** 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数。则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon) > 0$, 只要 $n \geq N(\varepsilon) > 0$, 就可以找到 n 次多项式 $P_n(x)$ 使得

$$\|f - P_n\|_\infty = \|f - P_n\|_{\infty,[a,b]} \triangleq \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

注意到任意闭区间上的连续函数可以通过镜像变换和周期延拓定义连续周期函数，为方便起见，我们给出另一个与 Weierstrass 定理等价的三角多项式函数的一致逼近性定理：

三角多项式函数的一致逼近性定理

定理： 设 $f(x)$ 是闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上周期的连续函数。则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon) > 0$, 只要 $N \geq N(\varepsilon) > 0$, 就可以找到 N 阶三角多项式

$$T_N(x) = A + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

使得

$$\|f - T_N\|_\infty = \|f - T_N\|_{\infty,[-\pi,\pi]} \triangleq \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x) - T_N(x)| < \varepsilon.$$

Weierstrass 定理的证明

1. 不妨设 $f \in \mathbb{C}[0,1]$. 定义 f 的 n 次 Bernstein 多项式
$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

2. Bernstein多项式的基函数 $\lambda_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$, 满足
$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^k \equiv 1,$$
$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k} = nx,$$
$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k} = n(n-1)x^2,$$
$$\sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

Weierstrass 定理的证明(续)

3. 定义 $$\varepsilon_n = \max_{\substack{|y-x|\le n^{-\frac{1}{4}} \\ 0\le x,y\le 1}} |f(y)-f(x)|.$$

   由 f 在 $[0,1]$ 上的一致连续性知, $\varepsilon_n \searrow 0$.

4. 记 $M=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|$. 对任意给定的 $x\in[0,1]$, 记 $K_n=\{0,1,\cdots,n\}$, $K_n^1(x)=\{k\in K_n : |k-nx|\le n^{3/4}\}$, $K_n^2(x)=K_n\setminus K_N^1$. 则由 ② 有

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_n^f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\lambda_{n,k}(x)\right| \\
&\le \sum_{k\in K_n^1(x)} \varepsilon_n\lambda_{n,k}(x) + 2M\sum_{k\in K_n^2(x)}\lambda_{n,k}(x) \\
&\le \varepsilon_n + 2M\sum_{k\in K_n^2(x)}\lambda_{n,k}(x).
\end{aligned}$$

Weierstrass 定理的证明(续)

5. 由于在 $K_n^2(x)$ 上, $(k-nx)^2 > n^{3/2}$, 因此有

$$n^{3/2}\sum_{k\in K_n^2(x)}\lambda_{n,k}(x) < \sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x) \le \frac{n}{4}.$$

6. 结合 ④ 和 ⑤ 得

$$|f(x)-B_n^f(x)| \le \varepsilon_n + 2M\cdot\frac{1}{4}n^{-\frac{1}{2}}.$$

7. 于是, 当 $n\to\infty$ 时, $B_n^f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$. ■

注: 由证明可以看出, 当 $|x-\frac{k}{n}| > n^{-1/4}$ 时, $\lambda_{n,k}(x) \ll 1$. 尽管 $\lambda_{n,k}(x)$ 没有局域紧支集, 但其影响主要集中在 x 的邻域中.

多项式的最佳一致逼近与最佳一致逼近多项式问题

- 设 $f(x) \in \mathbb{C}[a, b]$, 对给定的 $P(x) \in \mathbb{P}_n$, 定义

$$\triangle(P) \triangleq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)|,$$

称其为 $P(x)$ 与 $f(x)$ (在 $[a, b]$ 上) 的**偏差**.

- 令$E_n \triangleq \inf\limits_{P \in \mathbb{P}_n} \triangle(P)$, 称为 $\mathbb{P}_n$ 对 $f(x)$ 的**最小偏差或最佳逼近**.
- 最佳一致逼近（简称最佳逼近）多项式问题:
  1. 是否存在 $P^* \in \mathbb{P}_n$, 使得 $\triangle(P^*) = E_n$?
  2. 最佳逼近多项式若存在，它有显著的特征吗？有唯一性吗？
  3. 如何求最佳逼近多项式？

最佳一致逼近多项式的存在性定理

Borel **存在定理：** 对任给的 $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, 存在 $P^* \in \mathbb{P}_n$, 使得

$$\triangle(P^*) = E_n.$$

证明：

1. 由 E_n 的定义，对任意正整数 m, $\exists P_m \in \mathbb{P}_n$ 使得
$$E_n \leq \triangle(P_m) \leq E_n + \frac{1}{m}.$$
2. 只需证明 $\exists\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ 的子列, 仍记为$\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$, 和 $P^* \in \mathbb{P}_n$, s.t. $P_m(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛 (L^{∞}-范数意义下) 到 $P^*(x)$.

Borel 存在定理证明（续）

3. 这是因为，若 ② 成立，则有

$$E_n \le \triangle(P^*) \le \triangle(P_m) + \|P_m - P^*\|_\infty \le E_n + \frac{1}{m} + \|P_m - P^*\|_\infty \to E_n,$$

因此, $\triangle(P^*) = E_n$.

4. ② 的证明:
   - $\mathbb{P}_n$ 在 L^∞-范数下是一个有限维赋范线性空间；
   - 由 $\|P_m\|_\infty \le \|f\|_\infty + E_0$ 知，$\{P_m\}_{m=1}^\infty$ 是 $\mathbb{P}_n$ 中的有界集；
   - 有限维赋范线性空间中的任意有界集都是准列紧的（即存在收敛子列）.
   - 有限维赋范线性空间是 Banach 空间, 因此收敛的极限仍在该空间中. $\blacksquare$

习题二：7，14，15 上机习题二: 2(5)

Thank You!