数值分析

李治平

北京大学
数学科学学院

分段线性插值问题的提法

- 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数。
- 设给定一组插值点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 和相应的插值条件 $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$.
- 求一个函数$\phi_h(x)$, 其中指标 $h = \max\limits_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$, 满足
  1. $\phi_h(x) \in \mathbb{C}[a, b]$;
  2. $\phi_h(x) \in \mathbb{P}_1[x_{i-1}, x_i]$, $\forall 1 \le i \le n$;
  3. $\phi_h(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$.

分段线性插值问题的 Lagrange 型插值基函数

- $\phi_h(x)$ 在每个子区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上由一次插值多项式给出.
- 由 1 次 Lagrange 插值法，在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上有

$$\phi_h(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

- 因此分段线性插值问题有 Lagrange 型插值基函数

$$l_{n,i}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \cap [a, b]; \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \cap [a, b]; \\ 0, & \forall x \in [a, b] \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases} \quad i = 0, 1, \cdots n.$$

分段线性插值问题解的表达式

- 容易验证函数 $l_{n,i}(x)$, $0 \le i \le n$, 满足
  1. $l_{n,i}(x) \in \mathbb{C}[a,b]$;
  2. $l_{n,i}(x) \in \mathbb{P}_1[x_{j+1} - x_j], \quad \forall 0 \le j \le n-1$;
  3. $l_{n,i}(x_j) = \delta_{ij}$, $i,j = 0,1,\cdots,n$.
- 函数 $l_{n,i}(x)$, $0 \le i \le n$ 称为是分段线性插值问题的一组基函数，因为对任给的一组插值条件 $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,\cdots,n$

$$\phi_h(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_{n,i}(x),$$

是分段线性插值问题的解。

分段线性插值问题解的截断误差估计

要估计分段线性插值问题解的截断误差，也就是要估计函数

$$R_h(x) \triangleq f(x) - \phi_h(x)$$

的取值范围。由于 $\phi_h(x)$ 是分段线性插值，因此只需对各个子区间应用线性插值的余项估计即可。我们有以下结果：

定理： 设函数 $f(x) \in \mathbb{C}^2[a, b]$，则有

$$|f(x) - \phi_h(x)| \leq \frac{Mh^2}{8}, \quad \forall x \in [a, b].$$

其中 $M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

分段线性插值问题解的截断误差估计的证明

不妨设 $[a,b]\ni x\neq x_j,\ 0\le j\le n$, 于是必存在 $1\le i\le n$ 使得 $x\in(x_{i-1},x_i)$.

1. 分段线性插值函数 $\phi_h(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 即为线性插值函数
$$L_1(x)=y_i\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+y_{i-1}\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}.$$
2. 由插值多项式的余项表达式(定理 2.3.1), $\exists\xi\in(x_{i-1},x_i)$, s.t.
$$|f(x)-\phi_h(x)|=|f(x)-L_1(x)|=\frac{1}{2}|f''(\xi)|\cdot|(x-x_{i-1})(x-x_i)|.$$
3. 由 $x\in(x_{i-1},x_i)$, $x_i-x_{i-1}\le h$, 知 $|(x-x_{i-1})(x-x_i)|\le\frac{h^2}{4}$.

$\blacksquare$

分段低次多项式 Lagrange 插值函数

- 如果在每个子区间 (x_{i-1}, x_i) 上加入 $k-1$ 个互不相同的插值节点 $\{x_{i,j}\}_{j=1}^{k-1}$，则我们可以考虑分段 k 次多项式插值问题：求函数$\phi_h(x)$, 其中指标 $h = \max\limits_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$, 满足
  1. $\phi_h(x) \in \mathbb{C}[a, b]$;
  2. $\phi_h(x) \in \mathbb{P}_k[x_{i-1}, x_i]$, $\forall 1 \leq i \leq n$;
  3. $\phi_h(x_i) = f(x_i)$, $\phi_h(x_{i,j}) = f(x_{i,j})$, $\forall 0 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k-1$.

- 设函数 $f(x) \in \mathbb{C}^{k+1}[a, b]$, 则有

$$|f(x) - \phi_h(x)| \leq \frac{Mh^{k+1}}{4\cdot(k+1)!}, \quad \forall x \in [a, b].$$

其中 $M = \max_{x\in[a,b]} |f^{(k+1)}(x)|$. (更好的上界估计为$\frac{Mh^{k+1}}{4\cdot(k+1)k^{k+1}}$)

分段低次 ($k \le 5$) 多项式 Lagrange 插值函数的优缺点

- 对 $k+1$ 次连续可微的被插函数，分段 k 次多项式 Lagrange 插值函数序列当 $h \to 0$ 时，一致收敛到被插函数，且其截断误差的量级为 $O(h^{k+1})$.
- 分段低次 ($k \le 5$) 多项式 Lagrange 插值函数计算量小，数值上一般也比较稳定。
- 其一个明显的缺点是所得到的分段多项式 Lagrange 插值函数不够光滑。事实上，一般情况下，分段多项式 Lagrange 插值函数在每个子区间端点上都有尖点，即左右导数不相等，因而不可微。

Hermite 插值问题和 Hermite 插值多项式

- 插值条件只包含被插函数节点函数值的插值问题称为 Lagrange 插值问题，相应的插值多项式称为 Lagrange 插值多项式;
- 插值条件还包含被插函数节点导数值的插值问题称为 Hermite 插值问题，相应的插值多项式称为 Hermite 插值多项式;
- 与分段低次多项式 Lagrange 插值问题类似地，我们可以定义分段低次多项式 Hermite 插值问题。

三次 Hermite 插值问题的提法

- 给定一区间 $[x_i, x_{i+1}]$，设 $f(x)$ 是定义在其上的被插函数;
- 给定插值条件：

$$y_i = f(x_i), \quad y_{i+1} = f(x_{i+1}), \quad m_i = f'(x_i), \quad m_{i+1} = f'(x_{i+1});$$

- 求一定义在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的三次多项式 $H_3(x)$，满足：

$$H_3(x_i) = y_i, \quad H_3(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad H_3'(x_i) = m_i, \quad H_3'(x_{i+1}) = m_{i+1}.$$

注： 三次多项式 $H_3(x)$ 有四个自由度，可以由以上四个相互独立的插值条件唯一确定。

三次 Hermite 插值多项式的基函数

类似于 Lagrange 插值法，由于三次多项式函数空间 $\mathbb{P}_3[x_i, x_{i+1}]$ 有四个自由度，我们可以通过构造四个满足一组特殊的相互独立的插值条件的三次 Hermite 插值多项式来给出三次 Hermite 插值问题的一组基函数。

即求 $\mathbb{P}_3[x_i, x_{i+1}]$ 中的函数 $\alpha_i(x), \tilde{\alpha}_{i+1}(x), \beta_i(x), \tilde{\beta}_{i+1}(x)$, 满足：

$$\alpha_i(x_i) = 1, \quad \tilde{\alpha}_{i+1}(x_i) = \beta_i(x_i) = \tilde{\beta}_{i+1}(x_i) = 0;$$

$$\tilde{\alpha}_{i+1}(x_{i+1}) = 1, \quad \alpha_i(x_{i+1}) = \beta_i(x_{i+1}) = \tilde{\beta}_{i+1}(x_{i+1}) = 0;$$

$$\beta_i'(x_i) = 1, \quad \alpha_i'(x_i) = \tilde{\alpha}_{i+1}'(x_i) = \tilde{\beta}_{i+1}'(x_i) = 0;$$

$$\tilde{\beta}_{i+1}'(x_{i+1}) = 1, \quad \alpha_i'(x_{i+1}) = \tilde{\alpha}_{i+1}'(x_{i+1}) = \beta_i'(x_{i+1}) = 0.$$

不难通过条件推导出这组基函数（留作练习）。

三次 Hermite 插值多项式的基函数

容易验证这组基函数为：

$$\alpha_i(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2,$$

$$\tilde{\alpha}_{i+1}(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2,$$

$$\beta_i(x) = (x - x_i)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2,$$

$$\beta_{i+1}(x) = (x - x_{i+1})\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2.$$

三次 Hermite 插值多项式的显式表达式及其截断误差

定义在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上, 满足插值条件

$$H_3(x_i) = y_i, \quad H_3(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad H_3'(x_i) = m_i, \quad H_3'(x_{i+1}) = m_{i+1}.$$

的三次多项式 $H_3(x)$ 可以显式地表示为

$$H_3(x) = y_i\alpha_i(x) + y_{i+1}\tilde{\alpha}_{i+1}(x) + m_i\beta_i(x) + m_{i+1}\beta_{i+1}(x).$$

定理: 设被插函数 $f(x) \in \mathbb{C}^4[x_i, x_{i+1}]$, 则对任意的 $x \in [x_i, x_{i+1}]$ 都存在 $\xi \in (x_i, x_{i+1})$, 使得

$$f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_i)^2(x - x_{i+1})^2.$$

$2n+1$ 次 Hermite 插值多项式及其截断误差

给定 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, 定义在 $[x_0, x_n]$ 上, 满足插值条件

$$H_{2n+1}(x_i) = y_i, \quad H'_{2n+1}(x_i) = m_i, \qquad i = 0, 1, \cdots, n.$$

的 $2n+1$ 次多项式 $H_{2n+1}(x)$ 存在唯一。

定理： 设被插函数 $f(x) \in \mathbb{C}^{2n+2}[x_0, x_n]$, 则对任意的 $x \in [x_0, x_n]$ 都存在 $\xi \in (x_0, x_n)$, 使得

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2.$$

注： 与 Lagrange 余项类似地引入辅助函数，通过证明该辅助函数 $2n+2$ 阶导数有零点得到定理的结论（留作习题）。

$(n+1)(k+1)-1$ 次 Hermite 插值多项式及其截断误差

给定 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, 定义在 $[x_0, x_n]$ 上, 满足插值条件

$$H_{2n+1}(x_i) = y_i,\ H_{2n+1}^{(j)}(x_i) = m_i^j,\ i = 0, 1, \cdots, n,\ \ j = 1, \cdots, k.$$

的 $(n+1)(k+1)-1$ 次多项式 $H_{(n+1)(k+1)-1}(x)$ 存在唯一。

定理: 设被插函数 $f(x) \in \mathbb{C}^{(n+1)(k+1)}[x_0, x_n]$, 则对任意的 $x \in [x_0, x_n]$ 都存在 $\xi \in (x_0, x_n)$, 使得

$$f(x) - H_{(n+1)(k+1)-1}(x) = \frac{f^{((n+1)(k+1))}(\xi)}{((n+1)(k+1))!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^{k+1}.$$

注: 最常用的是分段定义的 $n=1$, $k=1,2$ 的 $H_3(x)$ 和 $H_5(x)$.

分段三次 Hermite 插值问题的提法

- 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的连续可微函数。
- 设给定一组插值点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 和相应的插值条件 $y_i = f(x_i)$, $m_i = f'(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$.
- 求一个函数$H_h(x)$, 其中指标 $h = \max\limits_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$, 满足
  1. $H_h(x) \in \mathbb{C}^1[a, b]$;
  2. $H_h(x) \in \mathbb{P}_3[x_{i-1}, x_i]$, $\forall 1 \le i \le n$;
  3. $H_h(x_i) = y_i$, $H_h'(x_i) = m_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$.

分段三次 Hermite 插值的基函数

利用 $[x_i, x_{i+1}]$ 上三次 Hermite 插值多项式的基函数 $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $\tilde{\alpha}_{i+1}(x)$ 和 $\tilde{\beta}_{i+1}(x)$, 我们可以在 $[a,b]$ 上定义分段三次 Hermite 插值的基函数:

$$h_i(x) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_i(x), & \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \cap [a,b], \\ \alpha_i(x), & \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \cap [a,b], \\ 0, & \forall x \in [a,b] \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases} \qquad i = 0, 1, \cdots, n;$$

$$\hat{h}_i(x) = \begin{cases} \tilde{\beta}_i(x), & \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \cap [a,b], \\ \beta_i(x), & \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \cap [a,b], \\ 0, & \forall x \in [a,b] \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases} \qquad i = 0, 1, \cdots, n;$$

分段三次 Hermite 插值函数表达式和截断误差估计

分段三次 Hermite 插值函数可以通过其基函数表达为

$$H_h(x) = \sum_{i=0}^{n} \Big(y_i h_i(x) + m_i \hat{h}_i(x) \Big).$$

由区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上三次 Hermite 插值截断误差的表达式（定理 2.5.2），容易证明分段三次 Hermite 插值截断误差估计：

定理： 设被插函数 $f(x) \in \mathbb{C}^4[a,b]$, 则有

$$\|f(x) - H_h(x)\|_\infty \le \frac{M}{384} h^4,$$

其中 $\|g(x)\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|, \quad M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$

分段低次 Hermite 插值的优缺点

- 分段三次 Hermite 插值函数 $H_h(x) \in \mathbb{C}^1[a,b]$，当被插函数 $f \in \mathbb{C}^4[a,b]$ 时，其截断误差的量级为 $O(h^4)$.
- 分段五次 Hermite 插值函数 $H_h(x) \in \mathbb{C}^2[a,b]$，当被插函数 $f \in \mathbb{C}^6[a,b]$ 时，其截断误差的量级为 $O(h^6)$.
- 插值条件除了需要函数值之外，还需要导数值。

与相应次数的分段 Lagrange 插值函数相比，其截断误差的量级是相同的，但却有更好的光滑性。一般地，分段 $2k+1$ 次 Hermite 插值函数属于 $\mathbb{C}^k[a,b]$.

问题： 如何尽可能的提高分段低次插值多项式的光滑性？尤其是插值条件不含导数值的情况下.

k 次样条插值问题的提法

观察： 如果取消插值条件$m_i^j = f^{(j)}(x_i)$, $j = 1, \cdots, k-1$, 代之以光滑性条件 $S^{(j)}(x_i^+) = S^{(j)}(x_i^-)$, 则每个节点上的约束条件就减少了$k-1$ 个。这意味着可以用更少的自由度（更低次的多项式）来实现更高的光滑性。

- 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数。
- 设给定一组插值点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 和相应的插值条件 $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$.
- 求一个函数$S_k(x)$, 满足
  1. $S_k(x) \in \mathbb{P}_k[x_{i-1}, x_i]$, $\forall 1 \le i \le n$;
  2. $S_k(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$;
  3. $S_k(x) \in \mathbb{C}^{k-1}[a, b]$.

k 次样条插值问题的提法

- 由于 $S_k(x) \in \mathbb{P}_k[x_{i-1}, x_i], \forall 1 \le i \le n$, 所以 $S_k(x)$ 共有 $n(k+1)$ 个自由度。
- k 次样条插值问题有 $2n$ 个插值条件 $S_k(x_i \pm 0) = y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$ 和 $(n-1)(k-1)$ 个内部节点的光滑性条件 $S_k^{(j)}(x_i - 0) = S_k^{(j)}(x_i + 0)$, $i = 1, \cdots, n-1$, $j = 1, \cdots, k-1$.
- 两者之差为 $k-1$。因此，为了唯一确定 $S_k(x)$, 还应补充 $k-1$ 个附加条件。
- 通常取 $k-1$ 为偶数。这样，可以在两端点上对称的给出附加条件。例如，三次（$k=3$）样条插值，可以在两端点各提一个条件，而五次（$k=5$）样条插值，则可以在两端点各提两个条件。根据需要，也可以提周期边界条件等。

三次样条插值问题的解法

- 记三次样条插值函数（简称样条函数）$S_3(x)$ 在 x_i 点的一阶导数为 m_i (待定), $i = 0, 1, \cdots, n$, 则 $S_3(x)$ 可以用三次 Hermite 插值基函数 $h_i(x)$, $\hat{h}_i(x)$ 表示为
$$S_3(x) = \sum_{i=0}^{n} \Big(y_i h_i(x) + m_i \hat{h}_i(x) \Big).$$
- 这样表示的 $S_3(x)$ 对任意的 m_i 都是满足插值条件的 $\mathbb{C}^1$ 的, 因此只需确定 $\{m_i\}_{i=0}^{n}$, 使得 $S_3''(x_i - 0) = S_3''(x_i + 0)$, $1 \le i \le n-1$ 即可. 这将给出 $\{m_i\}_{i=0}^{n}$ 所应满足的 $n-1$ 个联立的线性方程。
- 另外两个方程一般由边界条件给出。

三次样条插值函数一阶节点导数值所应满足的方程组

- 由三次 Hermite 插值基函数 $h_i(x)$, $\hat{h}_i(x)$ 的表达式不难得到

$$S_3''(x_i+0) = -\frac{6}{\triangle x_i^2}y_i + \frac{6}{\triangle x_i^2}y_{i+1} - \frac{4}{\triangle x_i}m_i - \frac{4}{\triangle x_i}m_{i+1},$$

$$S_3''(x_i-0) = \frac{6}{\triangle x_{i-1}^2}y_{i-1} - \frac{6}{\triangle x_{i-1}^2}y_i + \frac{4}{\triangle x_{i-1}}m_{i-1} - \frac{4}{\triangle x_{i-1}}m_i,$$

其中 $\triangle x_i = x_{i+1} - x_i$.

- 记 $\lambda_i = \frac{\triangle x_{i-1}}{\triangle x_{i-1}+\triangle x_i}$, $\mu_i = 3\left[(1-\lambda_i)\frac{\triangle y_{i-1}}{\triangle x_{i-1}} + \lambda_i\frac{\triangle y_i}{\triangle x_i}\right]$, 则得

$$(1-\lambda_i)m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = \mu_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

三次样条插值问题的边界条件

$n+1$ 个待定系数 $\{m_i\}_{i=0}^n$，目前已有 $n-1$ 个方程。另外两个通常由边界条件给出。

常用的边界条件有下列三种：

- **固支边界条件：** $m_0 = f'(x_0),\ m_n = f'(x_n)$;
- **自然边界条件：** $S_3''(x_0) = 0,\ S_3''(x_n) = 0$;
- **周期边界条件：** $y_0 = y_n,\ m_0 = m_n,\ S_3''(x_0) = S_3''(x_n)$;

注： 三次样条插值问题也可由插值条件 $y_i = f(x_i),\ i = 0, \cdots, n$, 待定系数 $S''(x_i) = M_i,\ i = 1, 2, \cdots, n-1$, 连续性条件 $S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0),\ i = 1, 2, \cdots, n-1$, 再加适当边界条件的形式提出。

三次样条插值函数的截断误差

三次样条插值函数有很好的整体逼近性质。可以证明

定理： 设被插函数 $f(x) \in \mathbb{C}^4[a,b]$, 则有

$$\|f^{(k)}(x) - S_3^{(k)}(x)\|_\infty \le C_k \|f^{(4)}(x)\|_\infty h^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2,$$

其中 C_k, $k = 0, 1, 2$, 为常数。

由此可见，三次样条插值函数不仅很好的逼近被插函数，而且很好地逼近了被插函数的一阶和二阶导函数。

三次样条插值函数的极小性质

三次样条插值函数还有其它很好的整体性质。如以下极小性质。

定理: 设 $f(x)$ 为被插函数, $S_3(x)$ 为三次样条插值函数, $g \in \mathbb{C}^2[a,b]$, 且满足插值条件 $g(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \cdots, n$. 若 $S_3(x)$ 满足自然边界条件，或 $g'(x_0) = S_3'(x_0)$ 且 $g'(x_n) = S_3'(x_n)$, 则有

$$\int_a^b |g''(x)|^2 dx \geq \int_a^b |S_3''(x)|^2 dx,$$

其中 “$=$” 当且仅当 $g(x) \equiv S_3(x)$ 时成立。

注: 在线性弹性力学中，若材料变形后的位置坐标是 $g(x)$，则其弹性能正比于 $\int_a^b |g''(x)|^2 dx$。定理说明在所有满足插值条件的二次连续可微函数中，三次样条插值函数具有最小的弹性能。

三次样条插值函数的极小性质的证明

由恒等式

$$|g''(x)|^2 - |S_3''(x)|^2 = |g''(x) - S_3''(x)|^2 + 2S_3''(x)\Big[g''(x) - S_3''(x)\Big],$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_3''(x)\Big[g''(x) - S_3''(x)\Big]dx = S_3''(x)\Big[g'(x) - S_3'(x)\Big]\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} S_3'''(x)\Big[g'(x) - S_3'(x)\Big]dx,$$

而 $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_3'''(x)\Big[g'(x) - S_3'(x)\Big]dx = S_3'''(x_{i+\frac{1}{2}})\Big[g(x) - S_3(x)\Big]\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0,$

又由条件 $S_3''(x)\Big[g'(x) - S_3'(x)\Big]\Big|_a^b = 0$. 于是得

$$\int_a^b |g''(x)|^2 - |S_3''(x)|^2 dx = \int_a^b |g''(x) - S_3''(x)|^2 dx.$$

∎

习题二：5，9，10　上机习题二: 2(3), 2(4)

Thank You!