数值分析

李治平

北京大学
数学科学学院

一次多项式插值基函数与一次插值多项式

- 当 $n = 1$ 时，给定插值节点 x_0, x_1, 及插值条件 y_0, y_1, 则相应的一次插值多项式可以表示为

$$L_1(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

- 既 $L_1(x)$ 是组合系数恰为 y_0, y_1 的两个特殊一次多项式 $l_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}$, $l_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ 的线性组合.

- 这两个特殊一次多项式构成了一次多项式空间 $\mathbb{P}_1$ 的一组基，且满足：$l_0(x_0) = 1$, $l_0(x_1) = 0$, $l_1(x_0) = 0$, $l_1(x_1) = 1$, 既其中每一个多项式在一个相应插值节点上取值为一，而在另外的插值节点上取值为零 $(l_i(x_j) = \delta_{ij})$.

n 次 Lagrange 插值基函数与 n 次 Lagrange 插值多项式

- 这启发我们寻找构成 n 次多项式空间 $\mathbb{P}_n$ 的一组基的 $n+1$ 个特殊 n 次多项式 $\{l_i(x)\}_{i=0}^{n}$，使其满足： $(l_i(x_j) = \delta_{ij})$.

- 对给定的 $n+1$ 个插值节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, 这样的基底函数为

$$l_i(x) = \frac{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)},$$

称为 n 次 Lagrange 插值基函数.

- n 次 Lagrange 插值多项式可写为 $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$.

Lagrange 插值多项式的余项表达式

要估计 n 次 Lagrange 插值多项式的误差，也就是要估计函数

$$R_n(x) \triangleq f(x) - L_n(x)$$

的取值范围。$R_n(x)$ 称为余项，它实际上是用 $L_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 的截断误差，有以下的表达式：

定理： 设函数 $f(x) \in \mathbb{C}^{(n+1)}[a, b]$，且插值节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 互不相同，则对 $\forall x \in [a, b]$，都存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

Lagrange 插值多项式的余项表达式的证明

不妨设 $x \neq x_i,\ 0 \leq i \leq n$, 令 $K_n(x) = \dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}$。

1. 记 $\omega_{n+1}(t) = (t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)$.
2. 令 $E(t) = R_n(t) - K_n(x)\cdot\omega_{n+1}(t)$. 则 $E(t) \in C^{(n+1)}[a,b]$.
3. 由 $t = x, x_0, \cdots, x_n$ 时 $E(t) = 0$, 及 Rolle 定理知, 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $E^{(n+1)}(\xi) = 0$, 即 $K(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.
4. 于是有 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. ■

注: $E(t)$ 是 $R_n(t)$ 的 $n+1$ 次 Lagrange 插值多项式的余项.

Lagrange 插值多项式序列

- 对给定的定义在 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$;
- 及插值节点序列 $\left\{x_j^{(n)}\right\}_{j=0}^{n}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$;
- 可定义 Lagrange 插值多项式序列

$$P_n(x) = L_n(f; x_0^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}; x), \quad \forall x \in [a, b];$$

- 其中 $L_n(f; x_0^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}; x)$ 是以 $\left\{x_j^{(n)}\right\}_{j=0}^{n}$ 为插值节点, $P_n(x_j) = f(x_j), j = 0, \cdots, n$ 为插值条件的 n 次Lagrange 插值多项式。

Lagrange 插值多项式的收敛性

定理： 对复函数 $f(z)$, 如果存在 $r_0 > \frac{3}{2}(b-a)$, 使得 $f(z)$ 在 $B_{r_0}(\frac{a+b}{2})$ 内解析, 则 $P_n(x)$ 在 $[a,b]$ 内一致收敛于 $f(x)$.

证明： 因为 $f(z)$ 在 $B_{r_0}(\frac{a+b}{2})$ 内解析, 由 Cauchy 定理有

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\partial B_{r_0}} \frac{f(z)}{(z-x)^{(n+2)}}\,\mathrm{d}z, \quad \forall x \in [a,b].$$

由于 $|z-x| \geq r_0 - \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \geq r_0 - \frac{b-a}{2}$, 所以有

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq (n+1)! \frac{r_0 \max_{\partial B_{r_0}} |f(z)|}{(r_0 - \frac{b-a}{2})^{n+2}}, \quad \forall x \in [a,b].$$

Lagrange 插值多项式的收敛性定理证明（续）

又 $|\omega_{n+1}(x)| = |(x - x_0^{(n)}) \cdots (x - x_n^{(n)})| \leq |b-a|^{n+1}$.

所以有

$$|f(x) - P_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \right| \leq \frac{r_0 (b-a)^{n+1} \max_{\partial B_{r_0}} |f(z)|}{(r_0 - \frac{b-a}{2})^{n+2}}.$$

而当 $r_0 > \frac{3}{2}(b-a)$ 时，$b - a < r_0 - \frac{b-a}{2}$。因此有

$$|f(x) - P_n(x)| \rightrightarrows 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

$\blacksquare$

注： 记 $\gamma = (b-a)/(r_0 - \frac{b-a}{2})$，由 $0 < \gamma < 1$ 知收敛是一阶的.

等距节点高次 Lagrange 插值多项式的不稳定性

尽管 Weierstrass 定理说可用充分高次的多项式来任意逼近给定的连续函数，但这样的多项式不可能用等距节点高次 Lagrange 插值多项式来实现。

原因是等距节点高次 Lagrange 插值多项式的不稳定性。

- 考察等距插值节点列 $\{x_i\}_{i=-n}^{n}$, $x_i = i \cdot h = i/n$, $-n \le i \le n$.
- 取 $x^* = x_n - h/2$, 计算 $|l_0(x^*)|$. 由
  $U \triangleq |\prod_{j\neq 0}(x^* - x_j)| = h^{2n}|\prod_{j\neq 0}(n-j-1/2)| =$
  $\frac{h^{2n}}{2^{2n}}\prod_{j=1}^{n}(2n+2j-1)\cdot\prod_{j=1}^{n}(2n-2j-1) =$
  $\frac{h^{2n}}{2^{2n}}\prod_{j=1}^{n}(4n-2j+1)\cdot\prod_{j=1}^{n}(2n-2j-1) = \frac{h^{2n}(4n-1)!!(2n-3)!!}{2^{2n}(2n-1)!!}$,
  $L \triangleq |\prod_{j\neq 0}(x_0 - x_j)| = h^{2n}(n!)^2$, 由 $(4n-1)!! = \frac{(4n)!}{(4n)!!} = \frac{(4n)!}{2^{2n}(2n)!}$,
  以及 Sterling 公式 $n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$, 得

等距节点高次 Lagrange 插值多项式的不稳定性

- $|l_0(x^*)| = \frac{U}{L} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{2\pi n}(2n-1)} \to \infty$, 当 $n \to \infty$.
- 现考察两组插值条件: $\{\bar{y}_i\}_{i=-n}^{n}$, $\{y_i\}_{i=-n}^{n}$, 其中 $y_i = \bar{y}_i$, $\forall i \neq 0$, $y_0 = \bar{y}_0 + \varepsilon_0$, 其中 $\varepsilon_0 \sim n^{-k}$, $k > 0$.
- 记相应的 $(2n+1)$ 次 Lagrange 插值多项式分别为 $\bar{P}_{2n+1}(x)$ 和 $P_{2n+1}(x)$. 由此得, 当 $n \to \infty$ 时

$$|\bar{P}_{2n+1}(x^*) - P_{2n+1}(x^*)| = |\varepsilon_0 l_0(x^*)| \backsim \frac{2^{2n}}{\sqrt{2\pi n^{k+1}}(2n+1)} \to \infty.$$

- 这说明当 n 很大时，即便数据误差很小 ($\varepsilon_0 \sim n^{-k}$, 任意$k > 0$)， Lagrange 插值多项式仍然可能有非常大的误差。因此，在实际计算时一般不用高次 Lagrange 插值多项式。

Lagrange 插值多项式的优点

- 基函数计算简单，且相似的节点分布给出相似的基函数.
- 在给定插值节点后， Lagrange 插值多项式是 Lagrange 插值基函数的以插值节点上的函数值为系数的线性组合. 因此, 对不同的插值条件，可很快得到相应的插值多项式.
- 当被插函数未知时，其插值多项式可简单地用 Lagrange 插值多项式表出，从而给方程（包括微分方程、积分方程）的离散化带来方便。

Lagrange 插值多项式的缺憾: 如果在原有基础上增加一组插值条件 (x_{n+1}, y_{n+1}), 则之前得到的所有计算结果都无法加以利用.

零次和一次 Newton 插值多项式

- 零次 Newton 插值多项式 $N_0(x)$：给定一个插值节点 x_0，和一个插值条件 $P(x) = f(x_0) = y_0$，则有 $N_0(x) = y_0$.
- 一次 Newton 插值多项式 $N_1(x)$：在零次条件的基础上增加一个插值节点 $x_1 \neq x_0$，和一个插值条件 $P(x) = f(x_1) = y_1$. 我们希望 $N_1(x)$ 是由 $N_0(x)$ 加上一个一次函数构成. 由于 $N_1(x_0) = y_0 = N_0(x)$，因此，$N_1(x) = y_0 + c_1(x - x_0)$. 于是得:
$$N_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0).$$
同理，$N_1(x) = y_1 + \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_1) = f[x_1] + f[x_1, x_0](x - x_1)$
- 这里引入了零阶和一阶差商的记号
$$f[x_0] \triangleq f(x_0), \quad f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0] \triangleq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

二次 Newton 插值多项式

- 二次 Newton 插值多项式 $N_2(x)$：在一次条件的基础上增加一插值节点 $x_2 \notin \{x_0, x_1\}$ 和插值条件 $P(x) = f(x_2) = y_2$. 我们希望 $N_2(x)$ 是由 $N_1(x)$ 加上一个二次函数构成. 由于 $N_2(x_0) = N_1(x_0)$, $N_2(x_1) = N_1(x_1)$, 因此, $N_2(x) = N_1(x) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$. 于是得:

$$c_2 = \frac{f(x_2) - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

- 容易验证

$$c_2 = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} =: f[x_0, x_1, x_2].$$

$$\therefore \quad N_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

k 阶差商的定义和 n 次 Newton 插值多项式

一般地，对给定的节点 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+n}$, 我们可以递归地定义 $f(x)$ 的 $1 \leq k \leq n$ 阶差商和相应的 k 次插值多项式。

1. 零阶差商: $f[x_j] = f(x_j), j = i, i+1, \cdots, i+n.$
2. $1 \leq k \leq n$ 阶差商:

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] \triangleq \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

3. 函数 $f(x)$ 过 $n+1$ 个插值节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的 n 次插值多项式可以利用各阶差商表示为

$$\begin{aligned} N_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots \\ + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

称为 n 次 Newton 插值多项式, 这种插值方法称为 Newton 插值方法。

k 阶差商的性质

定理： $f(x)$ 在节点 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ 上的 k 阶差商有下列性质:

1. $$f[x_0, x_1, \cdots, x_m] = \sum_{i=0}^{m} \frac{f(x_i)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}.$$
2. 差商值与节点排列顺序无关。
3. 如果 $x_m \notin \{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$, 则有
$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k, x_m] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_m] - f[x_0, x_1, \cdots, x_k]}{x_m - x_k}.$$
4. 设 $f(x)$ 的 m 阶导数存在, 则有
$$f[x_0, x_1, \cdots, x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}.$$
其中$\xi \in (\min\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}, \max\{x_0, x_1, \cdots, x_m\})$.

k 阶差商的性质

1. k 阶差商的性质(1) 可用归纳法证明 （留作习题）。
2. k 阶差商的性质(2) 是性质(1) 的简单推论。
3. k 阶差商的性质(3) 是性质(2) 和定义的简单推论。
4. k 阶差商的性质(4) 是以下定理的推论。

n 次 Newton 插值多项式的余项表达式

定理: 设 $y=f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数, 设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是 $[a,b]$ 上的 $n+1$ 个互不相同的插值节点, 则对 $\forall x\in[a,b]\setminus\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 其 n 次 *Newton* 插值多项式的余项可表达为

$$R_n(x)\triangleq f(x)-N_n(x)=f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

注: 由插值多项式的存在唯一性, n 次 Newton 插值多项式的余项就是 n 次 Lagrange 插值多项式的余项, 因此由定理 2.3.1 和以上定理的结论即得

$$f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

n 次 Newton 插值多项式的余项表达式的证明

不妨设 $x \notin \{x_0, \cdots, x_n\}$, 由各阶差商的定义及其性质，我们有：

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0),$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f[x, x_0, \cdots, x_{n-2}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] + f[x, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}](x - x_{n-1}),$$

$$f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_n] + f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_n).$$

依次将后一式代入前一式，归纳得

$$f(x) = N_n(x) + f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \qquad \blacksquare$$

注： 上式右端实际上就是 $f(z)$ 在 $n+2$ 个节点 $x_0, \cdots, x_n, x$ 上的 $n+1$ 次 Newton 插值多项式在 x 点的取值.

Newton 插值余项和 Newton 插值方法的优点

- Newton 插值余项不需要 f 有 $n+1$ 次导数。事实上，由于插值多项式的存在唯一性, 以任何方式得到的插值多项式的余项都是相同的。
- 增加一组新的插值节点和插值条件 x_{n+1}，$y_{n+1} = f(x_{n+1})$ 后，Lagrange 插值多项式必须全部重算，而 Newton 插值多项式则只需在原来基础上增加一个 $n+1$ 次单项式：

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

引入记号： $f_i = f(x_i) = f[x_i]$, $i = 0, 1 \cdots, n+1$,
$f_i^k = \dfrac{f_i^{k-1} - f_{i-1}^{k-1}}{x_i - x_{i-k}} = f[x_{i-k}, \cdots, x_i]$, $1 \le k \le i \le n+1$. 则各阶差商可列成以下差商表。

Newton 插值表 $\left(f_i^k = \dfrac{f_i^{k-1} - f_{i-1}^{k-1}}{x_i - x_{i-k}} = f[x_{i-k}, \cdots, x_i],\ 1 \le k \le i \le n+1\right)$

i	x_i	$f[x_i]$	f_i^1	f_i^2	f_i^3	$\cdots$	f_i^n	f_i^{n+1}
0	x_0	$f[x_0]$						
1	x_1	$f[x_1]$	f_1^1					
2	x_2	$f[x_2]$	f_2^1	f_2^2				
3	x_3	$f[x_3]$	f_3^1	f_3^2	f_3^3			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
n	x_n	$f[x_n]$	f_n^1	f_n^2	f_n^3	$\cdots$	f_n^n	
$n+1$	x_{n+1}	$f[x_{n+1}]$	f_{n+1}^1	f_{n+1}^2	f_{n+1}^3	$\cdots$	f_{n+1}^n	f_{n+1}^{n+1}

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = f_k^k,$$
$$N_j(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_j](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1}).$$

等距节点上插值多项式一般不具有收敛性

- 在任意给定的区间 $[a, b]$ 上，令 $h = (b-a)/n$, 令

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n,$$

- 对给定的连续函数 $f(x)$, 以 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 为插值节点的插值多项式 $P_n(x)$ 构成了一个等距节点上的插值多项式序列。
- 尽管函数 $f(x)$ 可以被高次多项式任意逼近，但一般地说，即便 $f(x)$ 无穷次可微，也不能保证$\lim_{n\to\infty} P_n = f$。（一般需要在复平面中相当大的区域内解析才可保证收敛性.）
- 甚至等距节点上的插值多项式 $P_n(x)$ 可能是发散的。

等距节点上的插值多项式发散的例子— Runge 现象

- 1901年德国数学家 Runge 首先给出了这种发散的例子，并根据复变函数的理论给出了解释。
- 考虑函数 $R(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \ x \in [-5, 5].$
- 考虑等距插值节点： $x_i = -5 + \dfrac{10i}{n}, \ i = 0, 1, 2, \cdots, n.$
- 构造 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$ (或 Newton 插值多项式).
- 结果是 $L_n(x)$ 是发散的.
- 由 $L_{10}(x)$ 和 $R(x)$ 图像的对比（见图 2.1）可见在靠近区域两端点处，误差已经很大，并已呈现出发散迹象。

问题：如何利用多项式插值逼近给定区间上的函数?

- 等距节点上的插值多项式一般不收敛。可以想象，一般节点分布，也不可能有什么好的结果。
- 为了得到较好的插值逼近效果，可以从两个方面考虑问题：
  1. 构造分段低次插值多项式来逼近已知函数 $f(x)$.
  2. 寻找适当的插值节点分布序列，使相应的插值多项式序列有较好的收敛性态。
- 第二个实现起来比较困难. 我们将在后面做进一步研究。
- 第一个实现起来却相当简单. 分段低次插值多项式的缺点是其整体光滑性一般有较大的局限性。
- 两者都有相当成熟的理论结果，都有十分广泛的成功应用。

习题二：2，4，6， 上机习题二: 2(1), 2(2)

Thank You!