Numerical Analysis

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

线性多步法的基本出发点

如果说单步法的基本思想在于利用前一步的信息近似计算下一步的平均梯度值或积分平均值, 则多步法无非是希望利用前若干步的信息得到更高精度的逼近. 以计算积分平均值为例.

设 $y(x)$ 是常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \quad a \le x \le b, \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

的精确解, 则对节点 x_{n+1}, x_{n-p} 有

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-p}) + \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx.$$

基于数值积分的线性多步法

若用基于节点 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-q}$ 的数值积分近似积分 $\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\,dx$, 则得到线性多步法显式格式

$$y_{n+1} = y_{n-p} + h\sum_{j=0}^{q} \alpha_j f(x_{n-j}, y_{n-j}),$$

其中 $\alpha_j = \frac{1}{h}\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} l_j(x)\,dx$, $l_j(x), j = 0, \cdots, q$ 是关于节点 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-q}$ 的 Lagrange 插值基函数.

记 $r = \max\{p, q\}$, 当已知节点函数值 $y_{n-r}, \cdots, y_n$ 时, 便可由格式直接求得 y_{n+1}. 此时格式为 $r+1$ 步 $q+1$ 阶的.

例如, 当 $p = 1$, $q = 2$ 时, 可得3步3阶显式格式

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}[7f(x_n, y_n) - 2f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})].$$

基于数值积分的线性多步法

若用基于节点 $x_{n+1}, x_n, \cdots, x_{n+1-q}$ 的数值积分近似积分 $\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx$, 则得到线性多步法隐式格式

$$y_{n+1} = y_{n-p} + h \sum_{j=0}^{q} \beta_j f(x_{n+1-j}, y_{n+1-j}),$$

其中 $\beta_j = \frac{1}{h} \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} l_j(x)\, dx$, $l_j(x), j = 0, \cdots, q$ 是关于节点 $x_{n+1}, x_n, \cdots, x_{n+1-q}$ 的 Lagrange 插值基函数.

记 $r = \max\{p, q-1\}$, 当已知节点函数值 $y_{n+1-r}, \cdots, y_n$ 时, 便可由格式隐式解得 y_{n+1}. 此时格式为 $r+1$ 步 $q+1$ 阶的.

例如, 当 $p = 2$, $q = 2$ 时, 可得3步3阶隐式格式

$$y_{n+1} = y_{n-2} + \frac{h}{4}[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 9f(x_{n-1}, y_{n-1})].$$

基于数值积分的线性多步法— Adams 方法（$p=0$）

上述方法中若 $p=0$, 则相应的方法统称为 Adams 方法. 此时, 相应的单步法, 即 $q=0$, 为 Euler 格式; 相应的两步显式 Adams 格式（$q=1$）为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[3f(x_n,y_n)-f(x_{n-1},y_{n-1})];$$

而相应的两步隐式 Adams 格式（$q=1$）(也称为梯形公式) 为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_{n+1},y_{n+1})+f(x_n,y_n)].$$

线性多步法的局部截断误差可利用插值多项式的余项，当然也可以用 Taylor 展开分析.

基于预估-校正的线性多步法

与同类显式格式相比，隐式格式一般具有较小的局部截断误差和更好的稳定性. 但在隐式格式中, y_{n+1} 往往需要通过迭代法求解. 这通常会使计算量大增, 尤其在缺乏一个好的初值的情况下.

预估-校正的思想即为选一个适当的显式格式求出 y_{n+1} 的预估值作为隐式格式的相当好的迭代初值, 再通过隐式格式对预估值做一步迭代得到校正后具有更高精度更好稳定性的 y_{n+1}.

基于预估-校正思想构造的格式称为预估-校正格式.

例如, 用 Euler 格式做预估, 梯形公式做一步迭代校正得到改进的 Euler 格式:

$$\begin{cases} y_{n+1}^* = y_n + f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)]. \end{cases}$$

基于预估-校正的线性多步法

常用的预估-校正公式：

用 $p=3$, $q=2$ 的四步三阶显式格式做预估， $p=1$, $q=2$ 的两步三阶隐式格式做一步迭代校正得到三点 Milne 公式:

$$\begin{cases} y_{n+1}^* = y_{n-3} + \frac{h}{3}[8f(x_n,y_n) - 4f(x_{n-1},y_{n-1}) + 8f(x_{n-2},y_{n-2})], \\ \\ y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}[f(x_{n+1},y_{n+1}^*) + 4f(x_n,y_n) + f(x_{n-1},y_{n-1})]. \end{cases}$$

用 $p=0$, $q=3$ 的四步四阶显式格式做预估， $p=0$, $q=3$ 的三步四阶隐式格式做一步迭代校正得到四点 Adams 公式:

$$\begin{cases} y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{24}[55f(x_n,y_n) - 59f(x_{n-1},y_{n-1}) + 37f(x_{n-2},y_{n-2}) - 9f(x_{n-3},y_{n-3})], \\ \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[9f(x_{n+1},y_{n+1}^*) + 19f(x_n,y_n) - 5f(x_{n-1},y_{n-1}) + f(x_{n-2},y_{n-2})]. \end{cases}$$

线性多步法与预估-校正格式数值算例

取 $h = 0.1$, 应用线性多步法与预估-校正格式求解问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^3 - \dfrac{y}{x}, \quad x > 1, \\ y(1) = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

问题的精确解为

$$y = \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{5x}.$$

注: 这里 $f(x,y) = x^3 - \frac{y}{x}$, 当 $x > 1$ 时, $|f_y(x,y)| = \frac{1}{x} < 1$. 因此有 $\alpha h|f(x_{n+1}, y^*_{n+1}) - f(x_{n+1}, y^\dagger_{n+1})| < \alpha h|y^*_{n+1} - y^\dagger_{n+1}|$, 其中 y^*_{n+1} 和 $y^\dagger_{n+1}$ 是显式格式预估值和隐式校正格式的解, αh 是隐式校正格式相应项的系数. 由此知校正解满足 $|y_{n+1} - y^\dagger_{n+1}| < \alpha h|y^*_{n+1} - y^\dagger_{n+1}|$.

线性多步法与预估-校正格式数值算例

x_n	两步隐式 Adams 格式	改进的 Euler 公式	精确解
1	0.400000	0.400000	0.400000
1.1	0.474961	0.475641	0.474638
1.2	0.582069	0.583408	0.581387
1.3	0.726138	0.728135	0.725066
1.4	0.912664	0.915329	0.911177
1.5	1.147760	1.151110	1.145833
1.6	1.438111	1.442169	1.435720
1.7	1.790945	1.795738	1.788067
1.8	2.214019	2.219578	2.210631
1.9	2.715606	2.721961	2.711683

两步隐式 Adams 格式的数值算例

Table: 两步隐式 Adams 格式的误差与精度($h = 0.1$, $x = 2.0$)

步长	误差	精度阶
h	4.4803e-003	
$h/2$	1.11986e-003	2.00027
$h/4$	2.79952e-004	2.00007
$h/8$	6.99873e-005	2.00002
$h/16$	1.74968e-005	2.00000

改进的 Euler 公式的数值算例

Table: 改进的 Euler 公式的误差与精度($h = 0.1$, $x = 2.0$)

步长	误差	精度阶
h	1.1665e-002	
$h/2$	2.91656e-003	1.99985
$h/4$	7.29160e-004	1.99996
$h/8$	1.82291e-004	1.99999
$h/16$	4.55729e-005	2.00000

单步法的相容性

单步法一般可表示为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}, h), \\ y_0 = y(x_0). \end{cases}$$

这里 $\varphi(x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}, h)$ 称为增量函数.

定义： 对单步法, 如果存在 $p > 0$, 使得其局部截断误差

$$T(x) = y(x+h) - y(x) - h\varphi(x, x+h, y(x), y(x+h), h) = O(h^{p+1}),$$

其中 $y(x)$ 是相应微分方程的精确解, 则称格式是 $(p$ 阶$)$ 相容的.

注： 单步法的局部截断误差就相当于 $h\varphi(x, x+h, y(x), y(x+h), h)$ 逼近 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx$ 的截断误差.

单步法的收敛性

定理： 设单步法中的增量函数满足 *Lipschitz* 条件

$$|\varphi(x_1, x_2, \hat{y}_1, \tilde{y}_1, h) - \varphi(x_1, x_2, \hat{y}_2, \tilde{y}_2, h)| \le L_1|\hat{y}_1 - \hat{y}_2| + L_2|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2|,$$

其中 L_1, L_2 为 *Lipschitz* 常数, 且格式是 (p 阶) 相容的, 则格式是 p 阶收敛的, 即存在常数 $C > 0$, 使得

$$|y_n - y(x_n)| \le Ch^p.$$

证明： 令 $\bar{y}_{n+1} = y(x_n) + h\varphi(x_n, x_{n+1}, y(x_n), y(x_{n+1}), h)$, 则有 $\bar{y}_{n+1} - y(x_{n+1}) = T_{n+1} = O(h^{p+1})$. 于是 $e_{n+1} = (y_{n+1} - y(x_{n+1}))$ 满足

$$|e_{n+1}| \le |y_{n+1} - \bar{y}_{n+1}| + |\bar{y}_{n+1} - y(x_{n+1})| \le (1 + hL_1)|e_n| + hL_2|e_{n+1}| + |T_{n+1}|.$$

单步法的收敛性的证明（续）

不妨设 $2L_2h < 1$, 令 $L = 2(L_1 + L_2)$, 于是有 $\frac{1+L_1h}{1-L_2h} \le 1 + Lh$, $\frac{1}{1-L_2h} \le 1 + 2L_2h < 1 + Lh$. 因此得误差不等式

$$|e_{n+1}| \le (1 + Lh)|e_n| + (1 + Lh)|T_{n+1}|, \quad n \ge 0.$$

由此递推得

$$\begin{aligned}|e_{n+1}| &\le (1 + Lh)^{n+1}|e_0| + \sum_{k=0}^{n}(1 + Lh)^k|T_{n+1-k}| \\ &\le (1 + Lh)^{n+1}|e_0| + \frac{(1 + Lh)^{n+1} - 1}{Lh} \max_{0\le k\le n} |T_{k+1}|.\end{aligned}$$

单步法的收敛性的证明（续）

现设 $h = (b-a)/N,\ 1 \le n \le N$, 于是

$$(1+Lh)^n \le \left(1 + \frac{L(b-a)}{N}\right)^{\frac{N}{L(b-a)}L(b-a)} \le e^{L(b-a)}.$$

由此及前式即得单步法的整体误差估计：

$$|e_n| \le e^{L(b-a)}|e_0| + \frac{e^{L(b-a)}-1}{Lh}\max_{1\le k\le n}|T_k|,\quad \forall\, 0 \le n \le N = \frac{b-a}{h}.$$

特别地，当初始误差 $e_0 = 0$, $\max_{1\le k\le n}|T_k| = O(h^{p+1})$, 即格式为 p 阶时，有

$$|e_n| \le \frac{e^{L(b-a)}-1}{Lh}\max_{1\le k\le n}|T_k| = O(h^p).$$

定理得证. ■

单步法的稳定性— 稳定性研究的对象

以上收敛性分析中, 所有计算都认为是精确的. 但在实际计算时, 不可避免地会有计算误差, 这即有舍入误差, 也有迭代法的残量.

若记 $\tilde{y}_{n+1}$ 为在第 $n+1$ 步由单步法实际计算所得的结果, 则整体误差 $\tilde{e}_{n+1} \triangleq \tilde{y}_{n+1} - y(x_{n+1}) = (\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}) + (y_{n+1} - y(x_{n+1})) = (\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}) + e_{n+1}$. 其中 y_{n+1} 是格式的精确解, 误差 $|e_{n+1}|$ 由前所证可由初始误差和算法的局部截断误差给出估计.

但由于计算误差 $\tilde{y}_{n+1}$ 只是近似满足格式, 因此其残量非零, 即

$$(\mathcal{R}_h\tilde{\mathbf{y}})_n \triangleq \frac{1}{h}\left[\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n - h\varphi(x_n, x_{n+1}, \tilde{y}_n, \tilde{y}_{n+1}, h)\right] \neq 0.$$

而另一部分误差 $\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}$ 可否由初始误差和残量控制则是算法稳定性研究的对象.

单步法的稳定性

定义： 如果存在常数 $K>0$ 和 $h_0>0$, 使得对任意网格尺度满足 $h\le h_0$ 的网格节点上取值的向量 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 都有

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|_\infty \le K(\|\mathbf{v}_0-\mathbf{w}_0\|_\infty + \|\mathcal{R}_h\mathbf{v}-\mathcal{R}_h\mathbf{w}\|_\infty),$$

则称相应格式是稳定的.

注 1： 仿照收敛性定理的证明，不难证明满足 Lipschitz 条件的格式是稳定的($K=(e^{L(b-a)}-1)/L$) (但未必数值稳定).

注 2： 此时有 $\|\tilde{\mathbf{y}}-\mathbf{y}\|_\infty \le K(\|\tilde{\mathbf{y}}_0-\mathbf{y}_0\|_\infty + \|\mathcal{R}_h\tilde{\mathbf{y}}\|_\infty + \|\mathcal{T}_h\mathbf{y}\|_\infty)$.

注 3： 因此, 估计和控制残量 $\mathcal{R}_h\tilde{\mathbf{y}}$ 成为构造和使用格式的要点之一. 而估计和控制残量 $\mathcal{R}_h\tilde{\mathbf{y}}$ 在一般情况下是十分困难的.

注 4： 格式的绝对稳定性是控制格式残量 $\mathcal{R}_h\tilde{\mathbf{y}}$ 的重要工具.

注 5： 若将以上定义限于残量为零的向量集合, 则相应的稳定性称为零稳定性, 它等价于格式对初值和右端项的一致连续依赖性.

线性多步法的相容性

线性多步法一般可以表示为

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, y_{n+i}),$$

其中 $\alpha_k = 1$, α_0 和 β_0 不同时为零. 当 $\beta_k = 0$ 时, 方法称为显式的, $\beta_k \neq 0$ 时, 方法则称为隐式的.

定义： 对线性多步法, 如果存在 $p > 0$, 使得其局部截断误差

$$T_{n+k} \triangleq \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y(x_{n+i}) - h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, y(x_{n+i})) = O(h^{p+1}),$$

其中 $y(x)$ 是相应微分方程的精确解, 则称格式是 (p 阶) 相容的.

注： 可证线性多步法相容的充要条件是 $\rho(1) = 0$, $\rho'(1) = \sigma(1)$ (利用 Taylor 展开), 其中 $\rho(\xi) \triangleq \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \xi^i$ 和 $\sigma(\xi) \triangleq \sum_{i=0}^{k} \beta_i \xi^i$ 分别称为格式的第一和第二特征多项式.

线性多步法的稳定性

对线性多步法, 定义残量算子 $\mathcal{R}_h$ 为

$$(\mathcal{R}_h\mathbf{u})_n = \frac{1}{h}\Big(\sum_{i=0}^{k}\alpha_i u_{n+i}\Big) - \sum_{i=0}^{k}\beta_i f(x_{n+i}, u_{n+i}).$$

则可类似地引入稳定性的定义.

定义: 如果存在常数 $K>0$ 和 $h_0>0$, 使得对任意网格尺度满足 $h\le h_0$ 的网格节点上取值的向量 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 都有

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|_\infty \le K\Big(\sum_{i=0}^{k-1}\|\mathbf{v}_i-\mathbf{w}_i\|_\infty + \|\mathcal{R}_h\mathbf{v}-\mathcal{R}_h\mathbf{w}\|_\infty\Big),$$

则称相应线性多步法格式是稳定的.

注: 线性多步法的残量 $\mathcal{R}_h\tilde{\mathbf{y}}$ 也可利用格式的绝对稳定性控制.

线性多步法的零稳定性

定义： 如果存在常数 $K>0$ 和 $h_0>0$, 使得对任意网格尺度满足 $h\le h_0$ 的网格上线性多步法格式的任何两个解 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 都有

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|_\infty \le K\sum_{i=0}^{k-1}\|\mathbf{v}_i-\mathbf{w}_i\|_\infty,$$

则称相应线性多步法格式是零稳定的.

注 1： 可以证明, 线性多步法格式是零稳定的充要条件是其第一特征多项式 $\rho(\xi)\triangleq\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\xi^i$ 满足根条件, 即其所有根都在单位圆内或单位圆上, 且在单位圆上的根只能是单根.

注 2： 可以证明, 若一线性多步法格式是零稳定的, 且 f 满足 Lipscitz 条件, 则当 h 充分小时该格式是稳定的.

注 3： 零稳定等价于格式 (f 满足 Lipscitz 条件) $h\to 0$ 时的稳定性.

线性多步法的特征多项式

将线性多步法应用于试验方程 $y' = \lambda y$ 得 k 阶线性差分方程:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = \lambda h \sum_{i=0}^{k} \beta_i y_{n+i}.$$

将形为 $y_i = \xi^i y_0$ 的特解代入差分方程得其特征多项式:

$$\rho(\xi) - \mu\sigma(\xi) = 0,$$

其中 $\rho(\xi) \triangleq \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \xi^i$ 和 $\sigma(\xi) \triangleq \sum_{i=0}^{k} \beta_i \xi^i$ 分别称为格式的第一和第二特征多项式, $\mu = \lambda h$.

注: 差分方程也可写成矩阵形式 $\mathbf{y}_{n+k} = A\mathbf{y}_{n+k-1}$, 这里向量 $\mathbf{y}_{n+k} = (y_{n+k}, \cdots, y_{n+1})^T$, 方程组的第一个方程由以上差分方程给出, 其它为 $y_{n+i} = y_{n+i}$, $i = 0, \cdots, k-1$. 此时 $\rho(\xi) - \mu\sigma(\xi)$ 即为 A 的特征多项式.

线性多步法的绝对稳定性

定义： 若线性多步法在以定步长 h 求解试验方程

$$y' = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

的非零初值问题时，得到的离散解 y_n 满足 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$，则称该数值方法关于 λh 为绝对稳定的；否则，称该方法关于 λh 为计算不稳定的（或非绝对稳定的）.

由定义知，当特征方程的所有根（含重根）都满足 $|\xi(\mu)| < 1$ 时，相应的线性多步法当步长为 h 时是绝对稳定的.

线性多步法的绝对稳定区域

定义： 将一个线性多步法的应用于求解试验方程

$$y' = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

时，若存在复平面中的区域 $R \subset \mathbb{C}$，使得当且仅当步长 h 满足

$$\mu = \lambda h \in R \subset \mathbb{C}$$

时，该数值方法对步长 h 为绝对稳定的，则称区域 R 为该方法的绝对稳定区域.

由定义知，$R = \{\mu \in \mathbb{C} : |\xi_i(\mu)| < 1, i = 1, \cdots, k\}$，其中 $\xi_i(\mu)$，$i = 1, \cdots, k$ 为线性多步法的特征方程的根（含重数）.

线性单步法绝对稳定区域的例

分析单步 Adams 隐式格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n)]$$

的绝对稳定区域.

由定义和 $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = \frac{1}{2}$, $\beta_1 = \frac{1}{2}$, 格式的特征方程为

$$\rho(\xi) - \mu\sigma(\xi) \triangleq (-1 + \xi) - \mu(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi) = 0.$$

由此知格式的特征值是 $\xi(\mu) = \frac{2+\mu}{2-\mu}$. 因此, 格式的绝对稳定区域是

$$R = \left\{\mu \in \mathbb{C} : |2 + \mu| < |2 - \mu|\right\}.$$

线性多步法绝对稳定区域的例

分析两步 Adams 显式格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})]$$

的绝对稳定区域.

由定义和 $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_0 = -\frac{1}{2}$, $\beta_1 = \frac{3}{2}$, $\beta_2 = 0$, 格式的特征方程为

$$\rho(\xi) - \mu\sigma(\xi) \triangleq (-\xi + \xi^2) - \mu(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\xi) = 0.$$

由此知格式的特征值是 $\xi_\pm(\mu) = \frac{1+\frac{3}{2}\mu\pm\sqrt{1+\mu+\frac{9}{4}\mu^2}}{2}$. 因此, 格式的绝对稳定区域是

$$R = \{\mu \in \mathbb{C} : |\xi_\pm(\mu)| < 1\}.$$

线性多步法的相对稳定性

定义： 若线性多步法是零稳定的，且存在常数 $\alpha > 0$，使得在以步长 h 求解试验方程

$$y' = \lambda y, \quad Re(\lambda) > 0,$$

的非零初值问题时，若存在常数 $\alpha > 0$，使得离散解 y_n 满足

$$\lim_{n\to\infty} y_n e^{-n[Re(\lambda h)+\alpha(Re(\lambda h))^2]} = 0,$$

则称该数值方法关于 λh 为相对稳定的；否则，称该方法关于 λh 为非相对稳定的.

注 1： 在相对稳定区域，由舍入误差引起的($nh \le X$)数值解的误差相对可控.

注 2： 记 $\xi_i(\mu)$, $i = 1, \cdots, k$ 为线性多步法的特征方程的根. 可以证明相容且零稳定的线性多步法格式 (注意此时必有 $\xi_1(0) = 1$) 的相对稳定区域为 $R = \{\mu \in \mathbb{C} : |\xi_i(\mu)| < |\xi_1(\mu)|, i = 2, \cdots, k\}$.

线性单步法相对稳定区域的例

分析单步 Adams 隐式格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n)]$$

的相对稳定区域. 由此得对试验方程 $y' = \lambda y$,

$$y_n = \left(\frac{2+\lambda h}{2-\lambda h}\right)^n y_0.$$

由此知格式的特征值是 $\xi(\mu) = \frac{2+\mu}{2-\mu} = 1 + \mu + \frac{1}{2-\mu}\mu^2$. 因此, 格式的相对稳定区域

$$R = \{\mu \in \mathbb{C} : Re(\mu) > 0, Re(\mu) \neq 2\}.$$

线性多步法相对稳定区域的例

分析两步 Adams 显式格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})]$$

的相对稳定区域. 格式的特征值是 $\xi_{\pm}(\mu) = \frac{1+\frac{3}{2}\mu\pm\sqrt{1+\mu+\frac{9}{4}\mu^2}}{2}$. 由此得

$$\xi_{\pm}(\mu) = \begin{cases} 1 + \mu + \frac{17}{16}\mu^2 + O(\mu^3) \\ \frac{1}{2}\mu - \frac{17}{16}\mu^2 + O(\mu^3) \end{cases} .$$

因此, 至少当 h 充分小时格式的相对稳定的.

习题六：4，8；　上机习题六：1.

Thank You!