Numerical Analysis

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

应用快速 Fourier 变换计算卷积

设 $h(x) = \int_0^{2\pi} f(x-y)g(y)\,dy$, 其中 $f(x)$, $g(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数. 取 $x_i = i\delta$, $i = 0, 1, \cdots, N-1$, $\delta = \frac{2\pi}{N}$, 将积分用复合梯形公式离散, 并注意 $f(x_i - x_0)g(x_0) = f(x_i - N\delta)g(N\delta)$, 从而有(也可理解成矩形公式)

$$h(x_i) \approx \sum_{j=0}^{N-1} f(x_i - x_j)g(x_j)\,\delta, \quad i = 0, 1, \cdots, N-1.$$

记 $f_i = f(x_i)$, $g_i = g(x_i)$, 并定义 f_i 以 N 为周期. 令

$$h_i = \delta \sum_{j=0}^{N-1} f_{i-j}g_j, \quad i = 0, 1, \cdots, N-1.$$

应用快速 Fourier 变换计算卷积

记 $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \cdots, h_{N-1})^T$, $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \cdots, f_{N-1})^T$, $\mathbf{g} = (g_0, g_1, \cdots, g_{N-1})^T$, 则依上式计算 $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \cdots, h_{N-1})^T$, 需要 $N(N+1)$ 次乘法和 $N(N-1)$ 次加法.

另一方面, 由

$$\mathbf{h} = (\hat{\mathbf{h}})^{\vee} = [\delta\,\widehat{(\mathbf{f} * \mathbf{g})}]^{\vee} = [\delta\,(\hat{\mathbf{f}} \circ \hat{\mathbf{g}})]^{\vee}.$$

应用 FFT, 由上式计算 $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \cdots, h_{N-1})^T$, 则只需 $3M_N + 2N = \frac{3}{2} N \log_2 N + 2N$ 次乘法和 $3A_N = 3N \log_2 N$ 次加法.

应用快速 Fourier 变换求解循环矩阵的矩阵特征值问题

令 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \cdots, x_{N-1})^T$,

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} c_0 & c_{N-1} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N-1} & c_{N-2} & \cdots & c_0 \end{pmatrix}.$$

求解特征值问题 $\mathbf{Lx} = \lambda \mathbf{x}$.

不妨将 c_i 延拓定义为对下标以 N 为周期，即 $c_{i+N} = c_i$, $\forall i$. 于是有 $(\mathbf{Lx})_i = \sum_{j=0}^{N-1} c_{i-j} x_j$, $i = 0, 1, 2, \cdots, N-1$. 即 $\mathbf{Lx} = \mathbf{c} * \mathbf{x}$, 其中 $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \cdots, c_{N-1})^T$ 是以 N 为周期的向量.

应用快速 Fourier 变换求解循环矩阵的矩阵特征值问题

首先分析矩阵 $\mathbf{L}$ 的谱分解形式. 设 λ_k 是 $\mathbf{L}$ 的特征值, $\mathbf{x}^{(k)}$ 是相应的特征向量, 则有 $\mathbf{c} * \mathbf{x}^{(k)} = \lambda_k \mathbf{x}^{(k)}$. 两端做 DFT 知 $(\lambda_k, \mathbf{x}^{(k)})$ 是特征对的充要条件是:

$$\hat{\mathbf{c}} \circ \hat{\mathbf{x}}^{(k)} = \lambda_k \hat{\mathbf{x}}^{(k)}.$$

不妨设 $\hat{\mathbf{c}}_l \neq \hat{\mathbf{c}}_k, \forall l \neq k$ (思考题: 去掉该条件后结论有何变化?), 由此得(直接构造并验证)

$$\lambda_k = \hat{\mathbf{c}}_k, \quad \hat{\mathbf{x}}_l^{(k)} = \delta_{kl}, \quad k, l = 0, 1, \cdots, N-1.$$

$\therefore \mathbf{x}_j^{(k)} = (\hat{\mathbf{x}}^{(k)})_j^{\vee} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} \delta_{kl} e^{\mathrm{i}jl\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N}\omega^{-jk} = \mathbf{G}_{jk}$, 或 $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}^{(k)}$.
即, $\mathbf{G}$ 的第 k 列恰是 $\mathbf{L}$ 的以 $\lambda_k = \hat{\mathbf{c}}_k$ 为特征值的特征向量 $\mathbf{x}^{(k)}$.

因此有 $\mathbf{LG} = \mathbf{G\Lambda}$, 其中 $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{N-1})$. 于是, 我们得到了矩阵 $\mathbf{L}$ 的全部特征值和特征向量. 运算量为 $O(N \log_2 N)$.

应用快速 Fourier 变换求解循环矩阵线性代数方程组

现考虑求解具有循环系数矩阵的线性代数方程组 $\mathbf{Lx} = \mathbf{b}$.

由以上分析知 $\mathbf{LG} = \mathbf{G\Lambda}$, 其中 $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{N-1})$, $\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1}$, 这里 $\mathbf{F}$ 为 Fourier 矩阵. 因此, $\mathbf{L} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{\Lambda F}$. 所以有

$$\mathbf{Lx} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}^{-1}\mathbf{\Lambda F x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{F b}$$

于是, 求解方程组 $\mathbf{Lx} = \mathbf{b}$ 分为四步:

1. 计算 $\mathbf{Fb}$, 即 $\mathbf{b}$ 的 FFT 得 $\hat{\mathbf{b}}$;
2. 求 $\mathbf{\Lambda}$, 即 $\mathbf{c}$ 的 FFT 得 $\hat{\mathbf{c}}$;
3. 求 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{\Lambda}^{-1}\hat{\mathbf{b}}$, 即 $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{b}}_k/\hat{\mathbf{c}}_k$, $k = 0, 1, \cdots, N-1$;
4. 计算 $\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}\hat{\mathbf{x}}$, 即 $\hat{\mathbf{x}}$ 的快速 Fourier 逆变换 $(\hat{\mathbf{x}})^{\vee}$.

总计 $3M_N + N = \frac{3}{2}N\log_2 N + N$ 次乘法和 $3A_N = 3N\log_2 N$ 次加法.

一维 Poisson 方程的二阶中心差商离散

考虑一维 Poisson 方程的齐次 Dirichlet 边值问题:

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

对二阶微商做二阶中心差商近似:

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2},$$

并在点 $x_j = jh, j = 1, 2, \cdots, N-1$ $(h = \frac{\pi}{N})$, 处取值. 于是, 微分方程边值问题被离散成为了线性代数方程组:

$$u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1} = h^2 f_j, \quad j = 1, 2, \cdots, N-1,$$

其中, $f_j = f(x_j), j = 1, 2, \cdots, N-1$, $u_0 = u_N = 0$, 已知;
$u_j \approx u(x_j), j = 1, 2, \cdots, N-1$, 待求.

离散正弦变换 DST (Discrete Sine Transform)

由于 u 满足齐次 Dirichlet 边界条件, 因此可将 u 做奇延拓至 $[-\pi, \pi]$, 然后做周期延拓, 得一以 2π 为周期的周期奇函数. 这种函数的 Fourier 级数仅包含 $\sin kx$ 项, 在离散时对应使用离散正弦变换(Discrete Sine Transform, 简称 DST):

$$U_k = \sum_{j=1}^{N-1} u_j \sin(jk\frac{\pi}{N}), \quad k = 1, 2, \cdots, N-1.$$

相应的离散正弦逆变换为:

$$u_j = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} U_k \sin(jk\frac{\pi}{N}), \quad j = 1, 2, \cdots, N-1.$$

将 U_k 的定义域拓展至 $-\infty < k < \infty$, 则其为满足 $U_0 = U_N = 0$ 的以 $2N$ 为周期的奇函数. 这时 DST 可由 FFT 的适当变形实现, 相应的快速算法称为 FST (Fast Sine Transform).

应用 DST 求解离散化线性代数方程组

将 $u_j = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1} U_k \sin(jk\frac{\pi}{N})$, $f_j = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1} F_k \sin(jk\frac{\pi}{N})$,

其中 $F_k = \sum_{j=1}^{N-1} f_j \sin(jk\frac{\pi}{N})$, 代入方程组 $u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1} = h^2 f_j$ 得

$$\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1} U_k \left[\sin((j-1)k\frac{\pi}{N}) - 2\sin(jk\frac{\pi}{N}) + \sin((j+1)k\frac{\pi}{N})\right]$$

$$= \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1} h^2 F_k \sin(jk\frac{\pi}{N}).$$

由此及

$\sin((j-1)k\frac{\pi}{N}) - 2\sin(jk\frac{\pi}{N}) + \sin((j+1)k\frac{\pi}{N}) = -4\sin^2(\frac{k\pi}{2N})\sin(jk\frac{\pi}{N})$ 得

$$\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1}(4\sin^2(\frac{k\pi}{2N})U_k + h^2 F_k)\sin(k\frac{j\pi}{N}) = 0,\ j=1,2,\cdots,N-1,$$

$\because\ \check{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\therefore\ U_k = -h^2 F_k/\left[4\sin^2(\frac{k\pi}{2N})\right]$, $k = 1, 2, \cdots, N-1$.

应用 DST 求解离散化线性代数方程组

由以上分析不难看出，$\lambda_k = -4h^{-2}\sin^2(\frac{k\pi}{2N})$, $k = 1, 2, \cdots, N-1$ 是线性代数方程组系数矩阵的特征值，而对应于 λ_k 特征向量是 $(\sin(\frac{k\pi}{N}), \sin(2\frac{k\pi}{N}), \cdots, \sin((N-1)\frac{k\pi}{N}))^T$.

求解一维 Poisson 方程的齐次 Dirichlet 边值问题数值解的计算可分为以下三步:

1. 对 $\mathbf{f} = (f_1, \cdots, f_{N-1})^T$ 做 FST 得 F_k, $k = 1, 2, \cdots, N-1$.
2. 计算 $U_k = -h^2 F_k / \left[4\sin^2(\frac{k\pi}{2N})\right]$, $k = 1, 2, \cdots, N-1$;
3. 对 $\mathbf{U} = (U_1, \cdots, U_{N-1})^T$ 做逆 FST 得 $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{U}}$.

注: 以上运算总共需要两个 $N-1$ 维的 FST 另加 $2N$ 次乘法. 因此总工作量是 $O(N\log_2 N)$ 量级的.

一维 Poisson 方程的谱方法

考虑一维 Poisson 方程的齐次 Dirichlet 边值问题:

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), \quad x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

设 $u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sin kx$, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \sin kx$. 则由
$u''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -k^2 U_k \sin kx$, 得 $U_k = -\frac{1}{k^2} F_k, \quad k = 1, 2, \cdots.$

令 $u^N(x) = \sum_{k=1}^{N-1} U_k^N \sin kx$, $f^N(x) = \sum_{k=1}^{N-1} F_k^N \sin kx$. 则由
$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2}{dx^2} u^N(x) \sin jx dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^N(x) \sin jx dx$, $j = 1, 2, \cdots, N-1$, 得

$$U_k^N = -\frac{1}{k^2} F_k^N, \quad k = 1, 2, \cdots, N-1.$$

在上页算法的第二步改用上式，则得到工作量相同的另一算法.

一维 Poisson 方程的配置法

另一方面，由 $\frac{d^2}{dx^2}u^N(\frac{j\pi}{N}) = f^N(\frac{j\pi}{N}), j = 1, 2, \cdots, N-1$, 即

$$\sum_{k=1}^{N-1} -k^2 U_k^N \sin k\frac{j\pi}{N} = \sum_{k=1}^{N-1} F_k^N \sin k\frac{j\pi}{N}, \quad j = 1, 2, \cdots, N-1,$$

也得到
$$U_k^N = -\frac{1}{k^2}F_k^N, \quad k = 1, 2, \cdots, N-1.$$

对于一维 Poisson 方程，由

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2}{dx^2}u^N(x)\sin jxdx = \int_{-\pi}^{\pi} f^N(x)\sin jxdx, j = 1, 2, \cdots, N-1,$

和 $\frac{d^2}{dx^2}u^N(\frac{j\pi}{N}) = f^N(\frac{j\pi}{N}), j = 1, 2, \cdots, N-1$ 得到的关系式相同.

但对一般的方程，关系式可能不同. 前者称为谱方法，后者称为配置法. 相应的算法一般具有谱精度.

实数组的 FFT 实现

设 $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2, \cdots, f_{N-1})^T$ 为实向量, 其 DFT 为

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\mathrm{i}jk\frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, \cdots, N-1.$$

则有 $F_{N-k} = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\mathrm{i}j(N-k)\frac{2\pi}{N}} = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\mathrm{i}jk\frac{2\pi}{N}} = \bar{F}_k, \forall k$, 且 F_0, $F_{\frac{N}{2}}$ (N 为偶数时) 必为实数.

由此知实数组的 Fourier 变换只需算出 F_k, $k = 0, 1, \cdots, [\frac{N}{2}]$, 即可, 因而其自由度（每个复数有两个自由度）个数为

$$\begin{cases} \frac{N-2}{2} \times 2 + 2 = N, & N \text{ 为偶数;} \\ \frac{N-1}{2} \times 2 + 1 = N, & N \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

这只有全为复数时自由度的一半. 我们期望工作量也可相应减少

实数组的 FFT 实现

为减少工作量和存储量, 实际计算中分为两步实现(设 $N=2^m$):

1. 令 $\mathbf{h}=(h_0,h_1,\cdots,h_{\frac{N}{2}-1})^T$, 其中

$$h_j=f_{2j}+\mathrm{i}f_{2j+1}, j=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1,$$

★ **应用 FFT 计算 $\frac{N}{2}$ 维 Fourier 变换 $\mathbf{H}\triangleq\hat{\mathbf{h}}$.**

由定义有

$$H_n=\hat{h}_n=F_n^e+\mathrm{i}F_n^o,\quad n=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1,$$

其中 $$F_n^e=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}f_{2k}e^{-\mathrm{i}kn\frac{2\pi}{N/2}},\quad F_n^o=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}f_{2k+1}e^{-\mathrm{i}kn\frac{2\pi}{N/2}}.$$

又由 $\omega_{N/2}$ 的 $N/2$ 周期性, 得 $\bar{F}^e_{\frac{N}{2}-n}=F_n^e$, $\bar{F}^o_{\frac{N}{2}-n}=F_n^o$.

实数组的 FFT 实现

2. 由 DFT 的定义有

$$F_n = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\mathrm{i}jn\frac{2\pi}{N}} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k} e^{-\mathrm{i}kn\frac{2\pi}{N/2}} + e^{-\mathrm{i}n\frac{2\pi}{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2k+1} e^{-\mathrm{i}kn\frac{2\pi}{N/2}}$$

$$= F_n^e + e^{-\mathrm{i}n\frac{2\pi}{N}} F_n^o.$$

于是, 由 $H_n = F_n^e + \mathrm{i}F_n^o$, 得 $\bar{H}_{\frac{N}{2}-n} = \bar{F}^e_{\frac{N}{2}-n} - \mathrm{i}\bar{F}^o_{\frac{N}{2}-n} = F_n^e - \mathrm{i}F_n^o$ (注意 F_0^e, F_0^o 均为实数, 特别地有 $H_{\frac{N}{2}} = H_0$). 因此,

$$\bigstar \quad \mathbf{F}_n = \frac{1}{2}(\mathbf{H}_n + \bar{\mathbf{H}}_{\frac{N}{2}-n}) - \frac{\mathrm{i}}{2} e^{-\mathrm{i}n\frac{2\pi}{N}} (\mathbf{H}_n - \bar{\mathbf{H}}_{\frac{N}{2}-n}), \quad n = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2}.$$

注: 由于主要运算是 $\frac{N}{2}$ 维的 FFT $\mathbf{H} \triangleq \hat{\mathbf{h}}$, 因此总计算量和存储量都大约节省了一半.

用 FFT 实现 FST

- 设 $f_0 = 0$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_{N-1})^T$, 为关于下标为奇函数的以 $2N$ 为周期的实数组.
- 记 $\mathbf{f}$ 的离散正弦变换 DST 为:
$$F_k = \sum_{j=1}^{N-1} f_j \sin(jk\frac{\pi}{N}), \quad k = 1, 2, \cdots, N-1.$$
- 令 $y_0 = 0$, $y_j = (f_j + f_{N-j})\sin(j\frac{\pi}{N}) + \frac{1}{2}(f_j - f_{N-j})$, $j = 1, 2, \cdots, N-1$.
- 如前做实数组 $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \cdots, y_{N-1})^T$ 的 FFT 得 $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_0, \hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_{N-1})$, 其中 $\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-\mathrm{i}jk\frac{2\pi}{N}}$.

用 FFT 实现 FST

由定义有

$$Re(\hat{y}_k) = \sum_{j=1}^{N-1} y_j \cos(jk\frac{2\pi}{N})$$

$$= \sum_{j=1}^{N-1}(f_j + f_{N-j})\sin(j\frac{\pi}{N})\cos(jk\frac{2\pi}{N}) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}(f_j - f_{N-j})\cos(jk\frac{2\pi}{N}).$$

由于 $\sin((N-j)\frac{\pi}{N}) = \sin(j\frac{\pi}{N}), \quad \cos((N-j)k\frac{2\pi}{N}) = \cos jk\frac{2\pi}{N},$

$$2\sin(j\frac{\pi}{N})\cos(jk\frac{2\pi}{N}) = \sin(j(2k+1)\frac{\pi}{N}) - \sin(j(2k-1)\frac{\pi}{N}),$$

易知 $\sum_{j=1}^{N-1}(f_j - f_{N-j})\cos(jk\frac{2\pi}{N}) = 0,$

$$Re(\hat{y}_k) = \sum_{j=1}^{N-1} f_j\left[\sin(j(2k+1)\frac{\pi}{N}) - \sin(j(2k-1)\frac{\pi}{N})\right] = F_{2k+1} - F_{2k-1}.$$

用 FFT 实现 FST

因此, 对 $k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$, 得:

$$Re(\hat{y}_k)=\sum_{j=1}^{N-1} f_j\left[\sin(j(2k+1)\frac{\pi}{N})-\sin(j(2k-1)\frac{\pi}{N})\right]=F_{2k+1}-F_{2k-1}.$$

类似地, 由 $\sin((N-j)k\frac{2\pi}{N})=-\sin jk\frac{2\pi}{N}$, $\sin(N-j)k\frac{\pi}{N})=\sin j\frac{\pi}{N}$, 得

$$-Im(\hat{y}_k)=\sum_{j=1}^{N-1} y_j\sin(jk\frac{2\pi}{N})$$

$$=\sum_{j=1}^{N-1}(f_j+f_{N-j})\sin(j\frac{\pi}{N})\sin(jk\frac{2\pi}{N})+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}(f_j-f_{N-j})\sin(jk\frac{2\pi}{N})$$

$$=\sum_{j=1}^{N-1} f_j\sin(jk\frac{2\pi}{N})=F_{2k},\quad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1.$$

用 FFT 实现 FST

实数组 $(f_1, f_2, \cdots, f_{N-1})^T$ 的 FST 算法如下(注意, 对 DST, 有 $F_{-1} = -F_1$):

1. 令 $y_0 = 0,\ y_j = (f_j + f_{N-j})\sin(j\frac{\pi}{N}) + \frac{1}{2}(f_j - f_{N-j})$, $j = 1, 2, \cdots, N-1$;
2. 做实数组 $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \cdots, y_{N-1})^T$ 的 FFT 得 $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_0, \hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_{N-1})$;
3. 令 $F_1 = -F_{-1} = \frac{1}{2}Re(\hat{y}_0)$;
4. 令 $F_{2k+1} = F_{2k-1} + Re(\hat{y}_k),\ k = 1, 2, \cdots, \frac{N}{2} - 1$;
5. 令 $F_{2k} = -Im(\hat{y}_k),\ k = 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1$.

$\mathbf{F} = (F_1, \cdots, F_{N-1})^T$ 即为所求的 $\mathbf{f}$ 的正弦变换. 由此可见, FST 的工作量基本上就是 (*N* 维实数组 $\mathbf{y}$ 的 FFT) $\frac{N}{2}$ 维 FFT 的工作量.

微分方程数值解的相关问题

以上讨论了用某种方式离散化微分方程边值问题, 并用 FFT 数值求解离散化问题的方法，得到了数值解. 很自然地，我们会关心：当 $h \to 0$ 时,

- 数值解是否收敛于微分方程的解？
- 数值解是否稳定？数值解是否数值稳定？
- 数值解的误差是多少？误差是如何依赖于 h 的？
- 如何构造微分方程的离散化方法使得相应的数值解有较好的综合性质？

我们将首先针对常微分方程研究数值解的构造方法和分析性质.

微分方程初值问题

我们首先讨论常微分方程初值问题的数值方法.

考虑一阶常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & \forall x \in (a, b), \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

这里 f 是 x 和 y 的已知函数, y_0 是给定的初值.

一阶常微分方程初值问题称为是适定的，如果问题

- 存在唯一解；
- 解连续地依赖于初值和右端项。

微分方程初值问题适定性定理

我们有以下一阶常微分方程初值问题适定性定理.

定理： 如果 $f \in \mathbb{C}([a,b] \times (-\infty,+\infty))$, 且 f 关于 y 满足 *Lipschitz* 条件, 即存在正常数 L, 使得

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|, \quad \forall x \in [a,b], \ \forall y_1, y_2 \in (-\infty,+\infty).$$

则一阶常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y), & \forall x \in (a,b), \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

存在唯一解 $y(x;y_0) \in \mathbb{C}^1[a,b]$, 且 $y(x;y_0)$ 在 $\mathbb{C}^1[a,b]$ 中连续地依赖于 y_0, 即 $\lim_{\tilde{y}_0 \to y_0} \|y(x;\tilde{y}_0) - y(x;y_0)\|_{\mathbb{C}^1[a,b]} = 0$.

我们总假定所涉及的问题满足适定性定理的条件.

微分方程初值问题的离散化

考虑一阶常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & \forall x \in (a, b), \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

的离散化问题.

常微分方程初值问题离散化通常包括以下两个部分:

1. 函数空间的离散化: 引入节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, 用定义在节点 $\{x_i\}_{i=0}^N$ 上的节点函数 $\{y_i\}_{i=0}^N$ 代替函数空间 $\mathbb{C}^1[a, b]$;
2. 微分算子的离散化: 数值微分代替微分, 例如差分离散, 即用差商代替微商.

微分方程初值问题的离散化

不同的的离散化方法给出不同的数值格式.

常微分方程初值问题数值格式优劣的判别准则：

1. 数值格式的精度: 例如微分算子的离散化带来的局部截断误差的量级、数值解与真解误差的量级等;
2. 数值格式的稳定性：例如数值解关于初值和右端项的关于空间离散化指标 $h = (b-a)/N$ 一致的连续依赖性;
3. 数值格式的数值稳定性：例如关于试验方程数值解的渐近收敛性（绝对稳定性）；
4. 数值格式的运算量: 达到允许误差所需的总计算量.

习题五：4，5；上机习题五：1 (1)，4.

Thank You!