

Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University



一维一阶双曲型偏微分方程组

考虑一维一阶偏微分方程组：

$$q_t(x, t) + Aq_x(x, t) = 0,$$

其中 $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, A 是 m 阶实矩阵.

当矩阵 A 的特征值都是实的，且有一组（ m 个）相应的线性无关的特征向量，则称以上方程组为(强)双曲型的。特别地，当所有实特征值都互不相同时，方程组称为是严格双曲型的。当矩阵 A 的特征值都是实的，但相应的线性无关的特征向量少于 m 个，则称以上方程组为弱双曲型的。



二阶双曲型偏微分方程组

波动方程：

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t),$$

是二阶双曲型偏微分方程.

令 $v = u_t$, $w = -au_x$, 则有

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_x = 0.$$

一般二阶双曲型偏微分方程都可以通过变量替换转化为一阶双曲型方程组。



一维守恒律方程组

若存在通量函数 $f(q)$, 使得

$$q_t(x, t) + f(q(x, t))_x = 0,$$

且矩阵 $\nabla f(q)$ 的特征值都是实的, 且有一组 (m 个) 相应的线性无关的特征向量, 则称以上方程组为守恒量(密度) q 的双曲守恒律。特别地, 当所有实特征值都互不相同, 守恒律方程组称为是严格双曲型的。



二维和三维空间双曲型（守恒律）方程（组）的定义

Definition

常系数一阶线性偏微分方程组 $q_t + Aq_x + Bq_y = 0$ 称为是(强)双曲型的, 如果对任意的单位向量 $\vec{n} = (n^x, n^y)$, $\check{A} = (n^x A + n^y B)$ 可实对角化. 偏微分方程组 $q_t + f(q)_x + g(q)_y$ 称为是(强)双曲型的, 如果 $\check{f}'(q) = (n^x f'(q) + n^y g'(q))$ 对任意的单位向量 $\vec{n} = (n^x, n^y)$ 可实对角化.

Definition

常系数一阶线性偏微分方程组 $q_t + Aq_x + Bq_y + Cq_z = 0$ 称为是(强)双曲型的, 如果 $\check{A} = (n^x A + n^y B + n^z C)$ 对任意的单位向量 $\vec{n} = (n^x, n^y, n^z)$ 可实对角化.

偏微分方程组 $q_t + f(q)_x + g(q)_y + h(q)_z = 0$ 称为是(强)双曲型的, 如果 $\check{f}'(q) = (n^x f'(q) + n^y g'(q) + n^z h'(q))$ 对任意的单位向量 $\vec{n} = (n^x, n^y, n^z)$ 可实对角化.

注：类似地可定义二维和三维空间严格双曲型方程（组）.



一维守恒律的积分形式

对一维守恒律方程组在 $x_1 < x < x_2$ 上积分得:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(q(x_1, t)) - f(q(x_2, t))$$

这说明, 在 $[x_1, x_2]$ 上以 q 为密度的守恒量关于时间的变化率仅依赖于区域两端点的通量差。

将上式在 $[t_1, t_2]$ 上积分, 得更一般的积分形式的守恒律方程组

$$\int_{x_1}^{x_2} q(x, t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} q(x, t_1) dx - \int_{t_1}^{t_2} (f(q(x_2, t)) - f(q(x_1, t))) dt$$

这说明, 在 $[x_1, x_2]$ 上以 q 为密度的守恒量的增量等于在相应时间段通过该区域端点净流入的守恒量。



二维和三维守恒律的积分形式和微分形式

- 任取守恒量 q 定义域中的光滑区域 Ω , 则 Ω 中总守恒量的变化完全来自于穿过光滑边界 $\partial\Omega$ 的通量. 即

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} q(x, y, t) dx dy = \text{穿过 } \partial\Omega \text{ 进入 } \Omega \text{ 的净通量.}$$

- 记 $\vec{f}(q)$ 为通量密度, 则“穿过 $\partial\Omega$ 进入 Ω 的净通量”为 $-\int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \vec{f}(q) ds = -\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(q) dx dy$.

- 于是得积分形式的守恒律方程（组）

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} q(x, y, t) dx dy = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(q) dx dy.$$

$$\int_{\Omega} q(x, y, t_2) = \int_{\Omega} q(x, y, t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \vec{f}(q) ds dt.$$

- 若 q, \vec{f} 充分光滑, 则有 $q_t + \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(q) = 0$.



守恒与非守恒输运方程——一维变截面管道流

已知流速： $u(x, t)$ （单位：长度/时间）。设 $q(x, t)$ 和 $\tilde{q}(x, t)$ 分别为流体中某种物质的线密度（单位：质量/长度）和体密度（单位：质量/体积）。则 $q(x, t)$ 和 $\tilde{q}(x, t)$ 分别满足守恒与非守恒输运方程（也称对流方程）：

守恒型输运方程： $q_t + (uq)_x = 0$.

非守恒型输运（颜色）方程： $\tilde{q}_t + u\tilde{q}_x = 0$.

特征方程： $\frac{dX}{dt} = u(X(t), t)$.

解沿特征线为常数： $\frac{dq(X(t), t)}{dt} = (q_t + X'(t)q_x)(X(t), t) \equiv 0$.



一阶双曲型方程（组）的一些模型问题

可压缩流方程: Lecture1 p.26-29(一维), Lecture13 p.33-34(二维)

线性声波方程: Lecture1 p.30-31(1-d), Lecture13 p.34, p.37(2,3-d)

一维拉氏气体动力学方程: Lecture2 p.9-11.

车流方程: Lecture5 p.36-37(线性), Lecture7 p.2-3(非线性),
Lecture12 p.19(非线性变限速), Lecture13 p.2-8(带出入口)

浅水方程: Lecture9 p.3-4(一维), Lecture13 p.39-40(二维)

带示踪剂浅水方程: Lecture10 p.23-25(线性退化场与接触间断)

Buckley-Leverett 方程: Lecture11 p.30 (一维两相流, 二次采油)



一阶线性双曲型偏微分方程组

考虑一维一阶线性严格双曲型偏微分方程组：

$$q_t(x, t) + Aq_x(x, t) = 0,$$

其中 $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, A 是 m 阶可实对角化的实矩阵.

记矩阵 A 的特征值为 $\lambda^1 < \dots < \lambda^m$, r^1, \dots, r^m 是其相应的右特征向量, $R = [r^1 \dots r^m]$ 是由右特征向量为列构成的矩阵。则 $L = R^{-1}$ 的行 l^1, \dots, l^m 是矩阵 A 的相应的左特征向量, 且有

$$A = R\Lambda R^{-1}, \quad \text{其中 } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^m \end{bmatrix}.$$



一阶常系数线性双曲型偏微分方程组的对角化

令 $w = R^{-1}q$ 或 $w^p(x, t) = I^p q(x, t)$, $p = 1, \dots, m$, 则方程化简为

$$w_t + \Lambda w_x = 0, \quad \text{或} \quad w_t^p + \lambda^p w_x^p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, m.$$

这是 m 个独立的对流方程，它们的初值问题的解为

$$w^p(x, t) = w^p(x - \lambda^p t, 0) = I^p q(x - \lambda^p t, 0) = I^p \overset{\circ}{q}(x - \lambda^p t).$$

因此，原方程初值问题的解为

$$q(x, t) = R w(x, t) = \sum_{p=1}^m w^p(x, t) r^p = \sum_{p=1}^m [I^p \overset{\circ}{q}(x - \lambda^p t)] r^p.$$



常系数线性双曲型方程组的特征、黎曼不变量和简波解

- p 族特征方程: $X'_p(t) = \lambda^p, (1 \leq p \leq m)$;
- $w^p(q) = l^p q$ 称为第 p ($1 \leq p \leq m$) 族特征的黎曼不变量;
- 沿 p ($1 \leq p \leq m$) 族特征线 $X_p(t) = X_p(0) + \lambda^p t$ 传播的 p 族波的波型是特征向量 r^p , 波的传播速度为 λ^p , 波的强度是黎曼不变量 $w^p(x, t) = l^p \overset{\circ}{q}(x - \lambda^p t)$.
- 若解 $q(x, t)$ 在相空间中的轨迹落在一条 i -积分曲线上, 则称其为第 i -族简波解. 注意: 在每条 i -积分曲线上 $w^p(q)$ 为一常数, $\forall p \neq i$ (i -黎曼不变量的一般定义).

- 例如 $w^p(x, 0) = \overset{\circ}{w}^p(x) \equiv \bar{w}^p, \forall p \neq i$, 则其为简波解, 因为

$$q(x, t) = \overset{\circ}{w}^i(x - \lambda^i t) r^i + \sum_{p \neq i} \bar{w}^p r^p = \overset{\circ}{q}(x - \lambda^i t).$$



变系数线性双曲型方程组黎曼问题解的结构

在分片常系数情形

- 守恒型方程 $q_t + (A(x)q)_x = 0$ 的要点在于
 - 黎曼问题的解一般在界面两侧产生两个中间状态 q_m^- 和 q_m^+ .
 - 两侧通量在界面处的连续性 (即 $A_L q_m^- = A_R q_m^+$).
 - 界面左 (右) 侧仅含向左 (右) 侧传播的涨落波 (即 $A_L^+(q_m^- - q_L) = 0, A_R^-(q_R - q_m^+) = 0$).
- 非守恒型方程 $q_t + A(x)q_x = 0$ 的要点在于
 - 求中间状态 q_m , s.t. $A_L^+(q_m - q_L) = 0, A_R^-(q_R - q_m) = 0$.
 - 实现方法: 设 r_1^-, \dots, r_k^- 为 A_L 的所有负特征值所对应的特征向量, r_{k+1}^+, \dots, r_m^+ 为 A_R 的所有正特征值所对应的特征向量, 令 $R = [r_1^-, \dots, r_k^-, r_{k+1}^+, \dots, r_m^+]$, 则有

$$q_m = q_L + R^- R^{-1}(q_r - q_L) = q_R + R^+ R^{-1}(q_R - q_L),$$

$$\text{其中 } R^- = [r_1^-, \dots, r_k^-, 0, \dots, 0], R^+ = R - R^-.$$



非线性双曲型守恒律方程式黎曼问题熵解的结构

非线性双曲守恒律方程式 $q_t + f(q)_x = 0$ 黎曼问题熵解是相似性解 $q(x, t) = q(x/t)$, 且一般由激波、中心稀疏波组成.

当 $q_r < q_l$ 时,

- 做集合 $\{(q, y) : q_r \leq q \leq q_l, y \leq f(q)\}$ 的凸包 下图的上凸包.
- 该凸包的上边界一般由若干直线段和若干 $f(q)$ 的曲线段交替连接而成, 在每一曲线段上 $f'(\cdot)$ 为单调减函数;
- 其中每一直线段表示了一个连接该直线段两端状态的激波, 该直线段的斜率 s 即为激波速度;
- 其中每一 $f(q)$ 的曲线段则表示了一个连接该曲线段两端状态的中心稀疏波, 解在该曲线段上满足 $x/t = f'(\tilde{q}(x/t))$.
- 特别的, 当 $f'' < 0$ 时, 熵解是连接两端状态的中心稀疏波, 而当 $f'' > 0$ 时, 熵解是连接两端状态的激波 $s\|q\| = \|f(q)\|$.



非线性双曲型守恒律方程式黎曼问题熵解的结构

当 $q_r > q_l$ 时,

- 做集合 $\{(q, y) : q_l \leq q \leq q_r, y \geq f(q)\}$ 的凸包 上图的下凸包.
- 该凸包的下边界一般由若干直线段和若干 $f(q)$ 的曲线段交替连接而成, 在每一曲线段上 $f'(\cdot)$ 为单调增函数;
- 其中每一直线段或曲线段分别表示一个连接该线段两端状态的激波或中心稀疏波. 直线段的斜率 s 为相应激波速度;
- 其中每一 $f(q)$ 的曲线段则表示了一个连接该曲线段两端状态的中心稀疏波, 解在该曲线段上满足 $x/t = f'(\tilde{q}(x/t))$.
- 特别的, 当 $f'' > 0$ 时, 熵解是连接两端状态的中心稀疏波, 而当 $f'' < 0$ 时, 熵解是连接两端状态的激波 $s[q] = [f(q)]$.

见 Lecture 11, 凸通量情形见 Lecture 7.



非凸双曲守恒律方程式黎曼问题的 Osher 解

根据凸包法和函数凸包的计算方法, Osher 给出了一般非凸双曲守恒律方程式黎曼问题相似性熵解 $q(x, t) = \tilde{q}(x/t)$ 的一个简单表达式. 设黎曼初值为 q_l, q_r , 令 $\xi = x/t$, 定义

$$G(\xi) = \begin{cases} \min_{q_l \leq q \leq q_r} [f(q) - \xi q], & q_l \leq q_r, \\ \max_{q_r \leq q \leq q_l} [f(q) - \xi q], & q_r \leq q_l. \end{cases}$$

则 $f(\tilde{q}(\xi)) - \xi \tilde{q}(\xi) = G(\xi)$, 即

$$\tilde{q}(\xi) = \begin{cases} \operatorname{argmin}_{q_l \leq q \leq q_r} [f(q) - \xi q], & q_l \leq q_r, \\ \operatorname{argmax}_{q_r \leq q \leq q_l} [f(q) - \xi q], & q_r \leq q_l. \end{cases}$$

注: 若对某个给定的 ξ , 满足上式的 q 值不唯一, 则熵解中有一个速度为 ξ 的激波, 其两侧的状态是满足上式状态集的上下界.



分段定义的非线性守恒律方程式黎曼问题熵解的结构

求解分段定义的非线性守恒律方程式黎曼问题就是要见Lecture12, p.17

- 找状态 $Q_l^\downarrow, Q_r^\downarrow$, 使其满足 $f_{i-1}(Q_l^\downarrow) = f_i(Q_r^\downarrow)$, 同时要求
- 方程 $q_t + f_{i-1}(q)_x = 0$ 的黎曼初值为 $q_l = Q_{i-1}, q_r = Q_l^\downarrow$ 的黎曼问题的解只含左行波;
- 方程 $q_t + f_i(q)_x = 0$ 的黎曼初值为 $q_l = Q_r^\downarrow, q_r = Q_i$ 的黎曼问题的解只含右行波;

黎曼问题的解正是由 $q_t + f_{i-1}(q)_x = 0$ 的以上黎曼问题解的左行波, $q_t + f_i(q)_x = 0$ 的以上黎曼问题解的右行波, 和 $Q_l^\downarrow, Q_r^\downarrow$ 间的静止激波构成(解也可基于通量差分裂 $f_i(Q_i) - f_{i-1}(Q_{i-1}) = \sum_{p=1}^{M_w} Z_{i-\frac{1}{2}}^p$).

注 1: 以上黎曼问题不一定适定, 两侧必须分别有足够多的左行波和右行波, 且静止激波应满足适当的相容性条件(熵条件).

注 2: 当以上黎曼问题的解 $Q_l^\downarrow, Q_r^\downarrow$ 不唯一时, 应该取使得静止激波“非Lax性”相对最弱(即使 $[f'_i(Q_r^\downarrow) - f'_i(Q_l^\downarrow)]$ 达到最小)的作为问题的熵解. 见Lecture12, p.23



非线性双曲型守恒律方程组黎曼问题熵解的结构

考虑 $q_t + f(q)_x = 0$ 黎曼问题熵解. (仅限于特征场均为真正非线性或线性退化的)

- 令 $H_p(q_*)$ 为过 q_* 的 p -Hugoniot 点集, 记

$$H_p^-(q_*) = \{q \in H_p(q_*) : \lambda^p(q_*) \geq \lambda(q)\}.$$

- 令 $I_p(q_*)$ 为过 q_* 的 p -积分曲线, 记

$$I_p^+(q_*) = \{q \in I_p(q_*) : \lambda^p(q_*) \leq \lambda(q)\}.$$

- 给定黎曼初值 $q_0 = q_l$, $q_m = q_r$, 求中间状态 q_1, \dots, q_{m-1} , s.t. $q_i \in H_p^-(q_{i-1}) \cup I_p^+(q_{i-1})$, $i = 1, \dots, m$;
- 非线性双曲型方程组黎曼问题的熵解是一组满足 R-H 跳跃间断条件和 Lax-熵条件的激波(若 $q_i \in H_p^-(q_{i-1})$) 和中心稀疏波构成的涨落波(若 $q_i \in I_p^+(q_{i-1})$)(含接触间断).

Hugoniot 点集见 Lecture 9, 积分曲线见 Lecture 10.



非线性双曲型守恒律黎曼问题熵解中中心稀疏波的结构

将真正非线性 p -族场中的中心稀疏波 $q(x, t) = \tilde{q}(x/t)$ 代入守恒律方程组 $q_t + f(q)_x = 0$ 得 $(-\frac{x}{t^2} + \frac{1}{t}\lambda^p(\tilde{q}(x/t)))\tilde{q}'(x/t) = 0$, 即

$$\lambda^p(\tilde{q}(x/t)) = \begin{cases} \xi_1, & x/t \leq \xi_1, \\ x/t, & \xi_1 \leq x/t \leq \xi_2, \\ \xi_2, & x/t \geq \xi_2, \end{cases}$$

这说明沿着每一条射线 $x/t = \xi \in [\xi_1, \xi_2]$, 特征速度恰为 ξ , 因此, 射线 $x = \xi t, \xi \in [\xi_1, \xi_2]$ 是中心稀疏波的特征线.

特别地, 我们有

$$\tilde{q}(\xi_1) = q_l, \quad \lambda^p(q_l) = \xi_1,$$

$$\tilde{q}(\xi_2) = q_r, \quad \lambda^p(q_r) = \xi_2.$$



非线性双曲型守恒律黎曼问题熵解中中心稀疏波的结构

关系式 $\xi = \lambda^p(\tilde{q}(\xi))$ 两边对 ξ 求导得 $1 = \nabla \lambda^p(\tilde{q}(\xi)) \cdot \tilde{q}'(\xi)$. 又由 $\tilde{q}(x/t)$ 是 p 族简波解, 知 $\tilde{q}(\xi)$ 是 p 族积分曲线, 因此有 $\tilde{q}'(\xi) = \alpha(\xi)r^p(\tilde{q}(\xi))$. 于是得

$$\alpha(\xi) = \frac{1}{\nabla \lambda^p(\tilde{q}(\xi)) \cdot r^p(\tilde{q}(\xi))}.$$

将此代入 $\tilde{q}'(\xi) = \alpha(\xi)r^p(\tilde{q}(\xi))$ 得 $\tilde{q}(\xi)$ 所应满足的常微分方程

$$\tilde{q}'(\xi) = \frac{r^p(\tilde{q}(\xi))}{\nabla \lambda^p(\tilde{q}(\xi)) \cdot r^p(\tilde{q}(\xi))}.$$

注: 方程式时该方程退化为 $(f'(\tilde{q}(\xi)))' = 1 \Leftrightarrow f'(\tilde{q}(\xi)) = \xi$. 此时, 中心稀疏波也可由 $\tilde{q}(x/t) = (f')^{-1}(x/t)$ 给出.



非线性双曲型守恒律黎曼问题熵解中中心稀疏波的结构

对于守恒律方程组, 一个真正非线性 p -族场中的中心稀疏波 $\tilde{q}(\xi)$ 是以下常微分方程初值问题的解:

$$\begin{cases} \tilde{q}'(\xi) = \frac{r^p(\tilde{q}(\xi))}{\nabla \lambda^p(\tilde{q}(\xi)) \cdot r^p(\tilde{q}(\xi))}, \\ \tilde{q}(\xi_1) = q_l, \end{cases} \quad \text{以及} \quad \begin{cases} \tilde{q}'(\xi) = \frac{r^p(\tilde{q}(\xi))}{\nabla \lambda^p(\tilde{q}(\xi)) \cdot r^p(\tilde{q}(\xi))}, \\ \tilde{q}(\xi_2) = q_r, \end{cases}$$

其中 q_l, q_r 同属一条 p -积分曲线, 且 $\lambda^p(q_l) = \xi_1 < \lambda^p(q_r) = \xi_2$.

注: 给定 q_l , 令 $\xi_1 = \lambda^p(q_l)$, 若 p -族场是真正非线性的, 则相应常微分方程初值问题存在唯一解 $\tilde{q}(\xi)$. $\forall \xi_2 > \xi_1$, 令 $q_r = \tilde{q}(\xi_2)$, 则

$$q(x, t) = \begin{cases} q_l, & x/t \leq \xi_1, \\ \tilde{q}(x/t), & \xi_1 \leq x/t \leq \xi_2, \\ q_r, & x/t \geq \xi_2, \end{cases}$$

是连接 q_l 和 q_r 的 p -中心稀疏波 (见 (13.42)).



拟线性形式的非线性守恒律方程式的特征线为直线

- 拟线性形式的非线性守恒律方程式: $q_t + f'(q)q_x = 0$.
- 特征线方程: $X'(t) = f'(q(X(t), t))$.
- 解沿特征线满足 $\frac{d}{dt}q(X(t), t) = q_t + q_x X'(t) = 0$, 即解沿特征线为常数. 因此特征线是直线, 且解可表示为 $q(X(t), t) = q(X(0), 0) \triangleq \tilde{q}(X(0))$, 其中 $\tilde{q}(\xi)$ 为初始密度分布函数.
- 设过 (x, t) 点的特征线交 x -轴于 ξ , 则相应的特征线方程为 $x = \xi + f'(q(x, t))t = \xi + f'(q(\xi, 0))t = \xi + f'(\tilde{q}(\xi))t$.
- 在特征线互不相交的时段 $(0 \leq t \leq T)$ 内这给出了 ξ 作为自变量 (x, t) 的隐函数关系 $x = \xi + f'(\tilde{q}(\xi))t$.

见 Lecture 7, p.7.



拟线性形式的非线性守恒律方程式的特征线为直线

- 由隐函数定理, 若 $1 + f''(\tilde{q}(\xi))\tilde{q}_\xi(\xi)t \neq 0$, 则 ξ 局部唯一可解.
- 令 $t_b = \frac{-1}{\min_\xi [f''(\tilde{q}(\xi))\tilde{q}_\xi(\xi)]}$, 则当 $t_b < 0$, $0 < t < \infty$, 或 $t_b > 0$, $0 < t < t_b$ 时, 从 x -轴出发的特征线都互不相交.
- 因此当以上条件成立时, 隐函数方程有唯一解 $\xi(x, t)$.
- 而当 $t > t_b > 0$ 时, 从 x -轴出发的特征线必然会产生相交现象. 此时解不再光滑 (见习题 11.1), 而是会出现激波.
- 特别地, 当 $f'' > 0$ 时, 若初始分布满足 $\tilde{q}_\xi \geq 0$, 则解光滑.
- 当 $f'' < 0$ 时, 若初始分布满足 $\tilde{q}_\xi \leq 0$, 则解光滑.
- 反之, 当 $f'' > 0$ 时, 若初始分布满足 $\tilde{q}_\xi < 0$, 有激波产生.
- 当 $f'' < 0$ 时, 若初始分布满足 $\tilde{q}_\xi > 0$, 有激波产生.



非线性守恒律方程式的积分形式与弱解

- 守恒律方程式的积分形式, $\forall x_1 < x_2, t_1 < t_2$,

$$\int_{x_1}^{x_2} q(x, t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} q(x, t_1) dx - \left[\int_{t_1}^{t_2} f(q(x_2, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(q(x_1, t)) dt \right].$$

- 当 q 充分光滑时这等价于 $\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} [q_t + f(q)_x] dx dt = 0$, 或 $\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [q_t + f(q)_x] \chi_{[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]} dx dt = 0$ (其中 χ 为特征函数).
- 将上式中的导数视为弱导数, 将 χ 替换为 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, 则得弱解的定义

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [q \phi_t + f(q) \phi_x] dx dt = \int_{-\infty}^\infty q(x, 0) \phi(x, 0) dx.$$

- 可以证明满足以上定义的弱解也必然是积分形式守恒律方程式的解. 反之亦然.



跳跃间断解（激波）及其 Rankine-Hugniot 条件

- 在特征线相交之后形成的守恒律方程式的物理压缩激波解可由特征线法 + 等面积法则得到 (见Lecture 7, p.13, Lecture 11, p.33).
- 对于守恒律方程(组)孤立的光滑激波解, 即解在激波的两側邻域内分别光滑, 且有光滑的激波传播速度 $s(t)$, 则可由守恒律推得 Rankine-Hugniot 跳跃间断条件 (见Lecture 7, p.15):

$$s(q_r - q_l) = f(q_r) - f(q_l).$$

- 对于带运动奇性源项的平衡律方程 $q_t + f(q)_x = D\delta(x - X(t))$, 其中 $x = X(t)$ 是奇性源项的光滑运动轨迹, 运动速度为 $X'(t) = s(t)$, 类似地可得到 Rankine-Hugniot 跳跃间断条件 (见Lecture 13, p.3-4):

$$s(q_r - q_l) = f(q_r) - f(q_l) - D.$$



非线性守恒律方程式弱解的不唯一性

- 当 $1 \geq q_l > q_r \geq 0$ 时, 车流方程黎曼问题的弱解有两个.
- 物理解是中心稀疏波 (见Lecture 7, p.20)

$$\tilde{q}(x/t) = \begin{cases} q_l, & x/t < f'(q_l); \\ q_r, & x/t > f'(q_r); \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{u_{\max} t}\right), & f'(q_l) \leq x/t \leq f'(q_r). \end{cases}$$

- 非物理解是一速度为 $s = \frac{1}{2}[f'(q_l) + f'(q_r)]$ 的扩张激波.
- 弱解的不唯一性还表现在将非线性守恒律方程式转化为弱形式的方式上 (见Lecture 7, p.21).
- 方程 $u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0$ 与 $(u^2)_t + \left(\frac{2}{3}u^3\right)_x = 0$ 当解光滑时等价.
- 但前者 $s_1 = \frac{[f_1]}{[u]} = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$. 而后者 $s_2 = s_1 + \frac{1}{6} \frac{(u_r - u_l)^2}{u_r + u_l}$.



分段定义的非线性守恒律方程式黎曼问题弱解的不唯一性

- 考虑 $f(q, x) = u_{\max}(x)q(1 - q)$ 的守恒律方程式黎曼问题:

- 其中 $u_{\max}(x) = \begin{cases} u_{\max,l} = 2, & x < 0, \\ u_{\max,r} = 1, & x > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} q_l = 0.2, \\ q_r = 0.1. \end{cases}$

- $f_l(q_l) = 2 \times 0.2(1 - 0.2) = 0.32 > f_r(0.5) = 0.25.$

- 取 $Q_r^\downarrow = 0.5$, 令 $Q_l^\downarrow > 0.5$ s.t. $f_l(Q_l^\downarrow) = f_r(Q_r^\downarrow) = 0.25 \Rightarrow 2Q_l^\downarrow(1 - Q_l^\downarrow) = 0.25 \Rightarrow Q_l^\downarrow \approx 0.8535533906.$

- 也可取 $Q_r^\downarrow = 0.4$, 令 $Q_l^\downarrow > 0.5$ s.t. $f_l(Q_l^\downarrow) = f_r(Q_r^\downarrow) = 0.24 \Rightarrow 2Q_l^\downarrow(1 - Q_l^\downarrow) = 0.24 \Rightarrow Q_l^\downarrow \approx 0.8605551275.$

- 两组 $Q_l^\downarrow, Q_r^\downarrow$ 都给出了一个左传激波和一个右传中心稀疏波.

注 1: 事实上任取 $Q_r^\downarrow < 0.5$, 都可以求得相应的弱解. 见Lecture 12, p.21-22.



非线性双曲型守恒律方程的熵条件— Lax 熵条件

Definition

对于凸的守恒律方程式, 一个间断的传播速度 $s = \frac{[f]}{[q]}$ 称为是满足 Lax 熵条件的, 如果 $f'(q_l) > s > f'(q_r)$.

注意, 对于凸通量, 即 f'' 恒正或恒负, R-H 速度 s 必然介于 $f'(q_l)$ 与 $f'(q_r)$ 之间. 因此, Lax 熵条件可以化简为 $f'(q_l) > f'(q_r)$, 或

- 当 $f'' > 0$ 时, Lax 熵条件简化为 $q_l > q_r$.
- 当 $f'' < 0$ 时, Lax 熵条件简化为 $q_l < q_r$.

注: 与气体动力学中的熵条件类似, Lax 熵条件根据某个量通过间断时单方向的单调性来甄别物理间断.

见Lecture 7, p.23



非线性双曲型守恒律方程的熵条件— Oleinik 熵条件

Definition

设 $f'' > 0$, 设 $q(x, t)$ 是 $q_t + f(q)_x = 0$ 的弱解. 如果存在常数 $E > 0$ 使得

$$\frac{q(x+a, t) - q(x, t)}{a} < \frac{E}{t}, \quad \forall a > 0, t > 0, x \in \mathbb{R},$$

则称 $q(x, t)$ 是守恒律的熵解.

注 1: 当 $f'' > 0$ 时, 在解的跳跃间断处, 由 Oleinik 熵条件可以推出 $q_l > q_r$, 因而有 $f'(q_l) > f'(q_r)$, 即 Lax 熵条件成立.

注 2: 当 $f'' < 0$ 时的 Oleinik 熵条件: 存在常数 $E > 0$ 使得 $\frac{q(x+a, t) - q(x, t)}{a} > \frac{E}{t}$, $\forall a > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}$.



适用于非凸非线性守恒律方程式的 Oleinik 熵条件

Oleinik 还给出了以下更简单且易于推广至非凸非线性守恒律方程式的 Oleinik 熵条件:

Definition

非凸非线性守恒律方程式的粘性消失解（熵解）在间断处满足

$$\frac{f(q) - f(q_l)}{q - q_l} \geq s \geq \frac{f(q) - f(q_r)}{q - q_r},$$

\forall 落在 q_l 和 q_r 定义的闭区间上的 q .

注: 当 f 凸时, 即 $f'' > 0$ 或 $f'' < 0$ 时, 由该 Oleinik 熵条件可以推出 Lax 熵条件.



非线性双曲型守恒律方程用熵对表示的熵条件

Definition

守恒律方程式 $q_t + f(q)_x = 0$ 的弱解 $q(x, t)$ 称为是熵解, 如果存在严格凸的熵函数 $\eta(q)$ 和熵通量 $\psi(q)$ (熵对 其定义见 Lecture 7, p.28), 使得对任意的 $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ 都有

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(q(x, t_2)) dx \leq \int_{x_1}^{x_2} \eta(q(x, t_1)) dx + \int_{t_1}^{t_2} \psi(q(x_1, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} \psi(q(x_2, t)) dt,$$

或等价地

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi_t \eta(q) + \phi_x \psi(q)] dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, 0) \eta(q(x, 0)) dx \geq 0, \\ \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+), \phi \geq 0.$$

(注: 即熵不等式 $\eta(q)_t + \psi(q)_x \leq 0$ 在弱形式意义下成立.)



用熵函数与离散熵通量表示的离散熵条件

Definition

设 $(\eta(q), \psi(q))$ 是守恒律方程 $q_t + f(q)_x = 0$ 的凸熵对 (§11.14), 称 $\Psi_{i-1/2}^n = \Psi(Q_{i-1}^n, Q_i^n)$ 是与 $\psi(q)$ 相容的数值熵通量, 如果

- ① $\Psi(q, q) = \psi(q), \quad \forall q;$
- ② 存在常数 $L > 0$, s.t. 对任意的 Q_{i-1}^n, Q_i^n 和 q 都有 $|\Psi(Q_{i-1}^n, Q_i^n) - \psi(q)| \leq L(|Q_{i-1}^n - q| + |Q_i^n - q|).$

Definition

设 $(\eta(q), \psi(q))$ 是守恒律方程 $q_t + f(q)_x = 0$ 的凸熵对, $\Psi_{i-1/2}^n = \Psi(Q_{i-1}^n, Q_i^n)$ 是与 $\psi(q)$ 相容的数值熵通量, 称有相容数值通量的守恒型格式的数值解 Q 满足离散熵条件, 如果

$$\eta(Q_i^{n+1}) \leq \eta(Q_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Psi_{i+1/2}^n - \Psi_{i-1/2}^n), \quad \forall n, i.$$



熵相容性格式—— Godunov 格式具有熵相容性

Definition

称一个守恒律的相容的守恒型数值格式具有熵相容性, 如果: 当用于定义其数值通量的每个黎曼子问题的(近似)解均满足熵条件时, 相应的数值解就满足离散熵条件.

Godunov 格式具有熵相容性:

- ① 设 $\tilde{q}^n(x, t)$ 在 $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (t_n, t_{n+1})$ 上满足熵条件

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \eta(\tilde{q}^n(x, t_{n+1})) dx \leq \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \eta(\tilde{q}^n(x, t_n)) dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\psi(\tilde{q}^n(x_{i+1/2}, t)) - \psi(\tilde{q}^n(x_{i-1/2}, t))) dt.$$



Godunov 格式具有熵相容性

② 由 $\eta'' > 0$, $Q_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{q}^n(x, t_{n+1}) dx$ 和 Jensen 不等式得 $\eta(Q_i^{n+1}) \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \eta(\tilde{q}^n(x, t_{n+1})) dx$.

③ 又 $\tilde{q}^n(x, t_n) = Q_i^n$, $\tilde{q}^n(x_{i-1/2}, t) = q^\downarrow(Q_{i-1}^n, Q_i^n) =: Q_{i-1/2}^\downarrow$.

④ 若定义数值熵通量 $\Psi_{i-1/2}^n = \psi(Q_{i-1/2}^\downarrow)$, 则由 (1)-(3) 得

$$\eta(Q_i^{n+1}) \leq \eta(Q_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Psi_{i+1/2}^n - \Psi_{i-1/2}^n).$$

易证 Ψ 是与 ψ 相容的数值通量, 因此 Godunov 格式产生的数值解满足离散熵不等式, 从而其数值解在一定意义下的极限是熵解.



一维双曲型守恒律方程（组）的有限体积格式

一维一阶双曲型守恒律方程：

$$q_t(x, t) + f(q(x, t))_x = 0$$

其积分形式，或称弱形式为： $\forall x_1 < x_2, \quad t_1 < t_2,$

$$\int_{x_1}^{x_2} q(x, t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} q(x, t_1) dx - \left[\int_{t_1}^{t_2} f(q(x_2, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} f(q(x_1, t)) dt \right].$$

对给定的网格 $x_i = ih, t_n = n\tau$ ，可取控制体（也称有限体积，或网格单元）

$C_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$ ，令 $\bar{q}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_n) dx$ ，有限体积格式可写为

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right),$$

其中 $Q_i^n \approx \bar{q}_i^n$ ， $F_{i-\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt$ 是时段 $[t_n, t_{n+1}]$ 上 $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ 处的数值通量，通常有形式 $F_{i-\frac{1}{2}}^n = F(Q_{i-1}^n, Q_i^n)$.

见 Lecture 3, p.2-3, 数值通量的相容性定义见 Lecture 3, p.6



最简单的 REA 算法 Godunov 方法

① 计算 $x_{i-\frac{1}{2}}$ 处的黎曼问题的（近似）解 $q^\downarrow(Q_{i-1}^n, Q_i^n)$.

② 计算数值通量

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n) = f(q^\downarrow(Q_{i-1}^n, Q_i^n)).$$

③ 用通量差公式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right)$$

计算 t_{n+1} 时刻的单元平均值。

REA 算法见 Lecture 3, p.14, Godunov 方法见 Lecture 3, p.17



一般非线性守恒律方程式有限体积法

在 $f(\tilde{q}(\xi)) - \xi\tilde{q}(\xi) = G(\xi)$ 中令 $\xi = 0$, 得 ($G(\cdot)$ 的定义见 Lecture 11, p.41)

$$f(q^\downarrow(q_l, q_r)) = f(\tilde{q}(0)) = G(0) = \begin{cases} \min_{q_l \leq q \leq q_r} f(q), & q_l \leq q_r, \\ \max_{q_r \leq q \leq q_l} f(q), & q_r \leq q_l. \end{cases}$$

令 $F_{i-1/2} = f(q^\downarrow(Q_{i-1}, Q_i))$, 我们就可以应用 Godunov 方法了.

同样, 令 $Q_{i-1/2}^\downarrow = q^\downarrow(Q_{i-1}, Q_i)$, 然后定义涨落 (比较 (12.6))

$$\mathcal{A}^+ \Delta Q_{i-1/2} = f(Q_i) - f(Q_{i-1/2}^\downarrow), \quad \mathcal{A}^- \Delta Q_{i-1/2} = f(Q_{i-1/2}^\downarrow) - f(Q_{i-1}).$$

为了构造高分辨率格式所需的波与波速. 经验表明, 一般只用一个波以及相应的 R-H 间断条件定义的波速就足够了:

$$W_{i-1/2} = Q_i - Q_{i-1}, \quad s_{i-1/2} = \frac{f(Q_i) - f(Q_{i-1})}{Q_i - Q_{i-1}}.$$

$f(q^\downarrow(q_l, q_r))$ 的公式非凸通量情形见 Lecture 11, p.43, 凸通量情形见 Lecture 8, p.17



波传播形式的 Godunov 方法

- 常系数线性双曲型方程组黎曼问题的解可以表示为一族波

$$Q_i^n - Q_{i-1}^n = \sum_{p=1}^m \alpha_{i-\frac{1}{2}}^p r^p = \sum_{p=1}^m \mathcal{W}_{i-\frac{1}{2}}^p,$$

其中 $\alpha_{i-\frac{1}{2}} = R^{-1}(Q_i^n - Q_{i-1}^n)$.

- 这些波分别以相应的特征速度 $\lambda^1 < \dots < \dots < \lambda^m$ 传播.
- 经过 Δt 时间 ($\max_p |\lambda^p| \Delta t \leq \Delta x$) 后, C_i 上解的平均值变成了

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\mathcal{A}^+ \Delta Q_{i-\frac{1}{2}}^n + \mathcal{A}^- \Delta Q_{i+\frac{1}{2}}^n \right].$$

其中 $\mathcal{A}^- \Delta Q_{i-\frac{1}{2}}^n = \sum_{p=1}^m (\lambda^p)^- \mathcal{W}_{i-\frac{1}{2}}^p$, $\mathcal{A}^+ \Delta Q_{i-\frac{1}{2}}^n = \sum_{p=1}^m (\lambda^p)^+ \mathcal{W}_{i-\frac{1}{2}}^p$, 分别称为 $\Delta Q_{i-\frac{1}{2}}^n$ 的左, 右行涨落波.

涨落波形式的 Godunov 方法 (见 Lecture 3, p.18-21) 也可以视为迎风格式, 比较 Lecture 3, p.12.



Roe 方法

- 对于常系数线性双曲型方程组, 数值通量可以写成

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = A Q_{i-1}^n + \sum_p (\lambda^p)^- \mathcal{W}_{i-\frac{1}{2}}^p = f(Q_{i-1}^n) + \mathcal{A}^- \Delta Q_{i-\frac{1}{2}}^n.$$

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = A Q_i^n - \sum_p (\lambda^p)^+ \mathcal{W}_{i-\frac{1}{2}}^p = f(Q_i^n) - \mathcal{A}^+ \Delta Q_{i-\frac{1}{2}}^n.$$

- 我们也可以等价地取其平均值, 得 Roe 方法的数值通量

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} A (Q_i^n + Q_{i-1}^n) - \frac{1}{2} |A| (Q_i^n - Q_{i-1}^n).$$

- 推广至非线性问题的 Roe 方法的数值通量:

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} [f(Q_{i-1}^n) + f(Q_i^n)] - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m |\lambda^p| \mathcal{W}_{i-\frac{1}{2}}^p.$$

Roe 格式也可以认为是在不稳定格式基础上加上了适当的粘性项后得到的格式, 见 Lecture 3, p.28-31



一维常系数线性双曲型方程组的 Lax-Wendroff 方法

- 具有二阶逼近精度的 Lax-Wendroff 格式:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 A^2 (Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i+1}^n).$$

- 这相当于在 Godunov 方法中取数值通量

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} A(Q_{i-1}^n + Q_i^n) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} A^2 (Q_i^n - Q_{i-1}^n).$$

由 $A = A^+ + A^-$, $|A| = A^+ - A^-$ 知 $\frac{1}{2}A = A^+ - \frac{1}{2}|A|$,
 $\frac{1}{2}A = A^- + \frac{1}{2}|A|$. 因此, 该数值通量也可以写成

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = (A^+ Q_{i-1}^n + A^- Q_i^n) + \frac{1}{2} |A| \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |A| \right) (Q_i^n - Q_{i-1}^n).$$

- 格式的局部截断误差主项是色散项 q_{xxx} .

Lax-Wendroff 格式可以认为是在迎风格式基础上加上了适当的高阶修正(反扩散)项后得到的格式, 见 Lecture 3, p.35



分片线性重构的 REA 算法

在 REA 算法 4.1 中, 将分片常数重构换为分片线性重构得

$$\tilde{q}^n(x, t_n) = Q_i^n + \sigma_i^n(x - x_i), \quad x_{i-\frac{1}{2}} \leq x < x_{i+\frac{1}{2}}.$$

对任取的斜率 σ_i^n , 分片线性重构是守恒的.

一些最直观的选择:

- 中心斜率: $\sigma_i^n = \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x}$, \Rightarrow Fromm 格式.
- 迎风斜率: $\sigma_i^n = \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x}$, $\bar{u} > 0$, \Rightarrow Beam-Warming 格式.
- 背风斜率: $\sigma_i^n = \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x}$, $\bar{u} > 0$, \Rightarrow Lax-Wendroff 格式.

以上选择在解光滑的区域都具有二阶精度。但在解的间断处附近都会引起数值振荡。



TVD 格式的定义

注意到对流方程 (包括许多非线性守恒律方程式) 的弱解的总变差不变, 即 $TV(q(\cdot, t)) = TV(q(\cdot, 0))$, $\forall t > 0$, 而一般非线性守恒律方程式的弱解的总变差不增, 即 $TV(q(\cdot, t_1)) \leq TV(q(\cdot, t_0))$, $\forall t_1 > t_0 \geq 0$. 我们自然希望相应的数值算法不增加总变差.

Definition

一个两层格式称为是 TVD (Total Variation Deminishing) 的, 若对任意的 Q^n 都有 $TV(Q^{n+1}) \leq TV(Q^n)$.

Definition

一个两层格式称为是 保单调的 (monotonicity-preserving), 若 $Q_i^n \geq Q_{i+1}^n$, $\forall i$, 则有 $Q_i^{n+1} \geq Q_{i+1}^{n+1}$, $\forall i$.

- 相容的守恒型的 TVD 格式一定是保单调的.



在解光滑处具有二阶精度又是 TVD 的常见方法:

- minmod : $\sigma_i^n = \text{minmod}\left(\frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x}, \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x}\right)$, 其中

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{if } |a| \leq |b| \text{ and } ab > 0; \\ b, & \text{if } |a| > |b| \text{ and } ab > 0; \\ 0, & \text{if } ab \leq 0. \end{cases}$$

- superbee : $\sigma_i^n = \text{maxmod}(\sigma_i^{(1)}, \sigma_i^{(2)})$, 其中

$$\sigma_i^{(1)} = \text{minmod}\left(\frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x}, 2\frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x}\right)$$

$$\sigma_i^{(2)} = \text{minmod}\left(2\frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x}, \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x}\right)$$

- MC : $\sigma_i^n = \text{minmod}\left(\frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x}, 2\frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x}, 2\frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x}\right)$.



基于 REA 算法的通量限制器方法

对流方程 $f(q) = \bar{u}q$ 基于分片线性重构的 REA 算法的数值通量 $F_{i-\frac{1}{2}}^n = (\bar{u}^+ Q_{i-1}^n + \bar{u}^- Q_i^n) + \frac{1}{2}(1 - \frac{|\bar{u}|\Delta t}{\Delta x})(\bar{u}^+ \sigma_{i-1}^n \Delta x - \bar{u}^- \sigma_i^n \Delta x)$
或:

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = (\bar{u}^+ Q_{i-1}^n + \bar{u}^- Q_i^n) + \frac{1}{2}|\bar{u}| \left(1 - \frac{|\bar{u}|\Delta t}{\Delta x}\right) \delta_{i-\frac{1}{2}}^n.$$

通常, 我们可以取 $\delta_{i-\frac{1}{2}}^n = \phi(\theta_{i-\frac{1}{2}}^n) \Delta Q_{i-\frac{1}{2}}^n$, 其中

$$\theta_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{\Delta Q_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta Q_{i-\frac{1}{2}}^n}, \quad l = \begin{cases} i-1, & \text{if } \bar{u} > 0, \\ i+1, & \text{if } \bar{u} < 0. \end{cases}$$



一些常见算法的通量限制器

- 迎风格式: $\phi(\theta) = 0.$
- Lax-Wendroff 格式: $\phi(\theta) = 1.$
- Beam-Warming 格式: $\phi(\theta) = \theta.$
- Fromm 格式: $\phi(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \theta).$
- minmod: $\phi(\theta) = \text{minmod}(1, \theta).$
- Superbee: $\phi(\theta) = \max(0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta)).$
- MC: $\phi(\theta) = \max(0, \min((1 + \theta)/2, 2, 2\theta)).$
- Van Leer: $\phi(\theta) = \frac{\theta + |\theta|}{1 + \theta}.$

见 Lecture 3, p.13-14. 变系数线性和非线性问题的高分辨率修正完全类似, 要点是计算相应左右行涨落波及其波速.



应用半时间步长点通量获得高分辨率

考虑基于通量差的格式 $Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n)$, 其中 $F_{i-1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt$.

- 将 q 在 (x_{i-1}, t_n) , (x_i, t_n) 做 Taylor 展开

$$Q_{i-1/2}^{L,n+1/2} \approx q(x_{i-1}, t_n) + \frac{\Delta x}{2} q_x(x_{i-1}, t_n) + \frac{\Delta t}{2} q_t(x_{i-1}, t_n) + \dots;$$

$$Q_{i-1/2}^{R,n+1/2} \approx q(x_i, t_n) + \frac{\Delta x}{2} q_x(x_i, t_n) + \frac{\Delta t}{2} q_t(x_i, t_n) + \dots,$$

- 利用方程将 ∂_t 换为 ∂_x , 用迎风和限制器方法重构斜率 q_x .
- 通过求解黎曼问题得 $Q_{i-1/2}^{n+1/2} = q^\downarrow(Q_{i-1/2}^{L,n+1/2}, Q_{i-1/2}^{R,n+1/2})$.
- 高分辨率格式: $Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(Q_{i+1/2}^{n+1/2}) - f(Q_{i-1/2}^{n+1/2}))$.

缺点在于对 q_x 的重构需要基于每个单元上的特征分解, 通常需要采用近似或简化的方法. 见 Lecture 6, p.17-19



空间半离散化和基于原函数的重构方法(ENO,WENO)

用 $Q_i(t)$ 近似 t 时刻单元平均值 $\bar{q}_i(t)$, 取适当数值通量 $F_{i-1/2}(Q(t))$, 则由守恒律得

$$Q'_i(t) = -\frac{1}{\Delta x} [F_{i+1/2}(Q(t)) - F_{i-1/2}(Q(t))] \equiv \mathcal{L}_i(Q(t)).$$

- 获得空间高精度的关键在于给出通量 $f(q(x_{i-1/2}, t))$ 的高阶近似数值通量 $F_{i-1/2}$.
- 例如, 通过使用带斜率限制器的分片线性重构定义 Q_{i-1}^R, Q_i^L , 再由黎曼问题的解给出二阶近似 $Q_{i-1/2} = q^\downarrow(Q_{i-1}^R, Q_i^L)$.
- 还可以用 ENO, WENO 等基于原函数的重构方法定义 Q_{i-1}^R, Q_i^L , 获得高分辨率空间半离散化.

由此导出一个关于单元平均值 $Q(t)$ 的耦合的常微分方程组:

$$Q'(t) = \mathcal{L}(Q(t)).$$



全离散化 —— 将单元平均值的发展方程关于时间做离散化

令 $Q_i^n \approx Q_i(t_n)$, 对单元平均值的发展方程关于时间做离散化. 例如, 用步长为 Δt 的欧拉法得 Godunov 格式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \Delta t \mathcal{L}_i(Q^n) = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1/2}(Q^n) - F_{i-1/2}(Q^n)].$$

作为时间方向高精度方法的例, 考虑两级显式 Runge-Kutta 格式:

$$Q_i^* = Q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F_{i+1/2}(Q^n) - F_{i-1/2}(Q^n)] = Q_i^n + \frac{1}{2} \Delta t \mathcal{L}_i(Q^n),$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1/2}(Q^*) - F_{i-1/2}(Q^*)] = Q_i^n + \Delta t \mathcal{L}_i(Q^*).$$

或另一个两级显式 TVD Runge-Kutta 格式

$$Q^* = Q^n + \Delta t \mathcal{L}(Q^n), \quad Q^{**} = Q^* + \Delta t \mathcal{L}(Q^*), \quad Q^{n+1} = \frac{1}{2}(Q^* + Q^{**}).$$

见 Lecture 6, p.23-26.



一维非线性双曲守恒律方程组黎曼问题的线性化方法

在单元的界面附近将方程组 $q_t + f(q)_x = 0$ 用其局部线性化方程

$$\hat{q}_t + \hat{A}_{i-1/2} \hat{q}_x = 0 \quad (\text{或简记为 } q_t + \hat{A}_{i-1/2} q_x = 0)$$

近似替换, 其中 $\hat{A}_{i-1/2} \approx f'(\bar{q})$, \bar{q} 在 Q_{i-1} 和 Q_i 的某个邻域中, $q \approx \bar{q} + \hat{q}$. $\hat{A}_{i-1/2}$ 应该满足以下基本条件:

- ① $\hat{A}_{i-1/2}$ 可实对角化 (从而有 $\Delta Q_{i-1/2} = \sum_{p=1}^m \alpha_{i-1/2}^p \hat{r}_{i-1/2}^p$).
- ② 当 $Q_{i-1}, Q_i \rightarrow \bar{q}$ 时, $\hat{A}_{i-1/2} \rightarrow f'(\bar{q})$.
 $F(Q_{i-1}, Q_i) = \hat{A}_{i-1/2} \hat{Q}_{i-1/2}^\downarrow$ 关于 Q_{i-1}, Q_i Lipschitz 连续.
- ③ $\hat{A}_{i-1/2}$ 满足关系式: $\hat{A}_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1}) = f(Q_i) - f(Q_{i-1})$.

Roe 线性化方法 —— 同时实现条件 (1), (2), (3) 的算法.



一维非线性双曲守恒律方程组黎曼问题的线性化方法

另一种做法是将通量差分裂成以波速 $s_{i-1/2}^p$ 传播的波, 即

$$f(Q_i) - f(Q_{i-1}) = \sum_{p=1}^{M_w} \mathcal{Z}_{i-1/2}^p,$$

然后直接利用 $\mathcal{Z}_{i-1/2}^p$ 定义涨落 $\mathcal{A}^\pm \Delta Q_{i-1/2} = \sum_{p: s_{i-1/2}^p \geq 0} \mathcal{Z}_{i-1/2}^p$, 通量差分裂更易实现. 例如, 可取 $\hat{A}_{i-1/2} = f'(\frac{1}{2}(Q_{i-1} + Q_i))$. 基于通量差分裂的算法总可以保证线性化矩阵 $\hat{A}_{i-1/2}$ 满足基本性质 (1)-(3), 即

- ① 可实对角化;
- ② 当 $Q_{i-1}, Q_i \rightarrow q$ 时, $\hat{A}_{i-1/2} \rightarrow f'(q)$,
 $F(Q_{i-1}, Q_i) = \hat{A}_{i-1/2} \hat{Q}_{i-1/2}^\downarrow$ 关于 Q_{i-1}, Q_i Lipschitz 连续.
- ③ $\hat{A}_{i-1/2} \Delta Q_{i-1/2} = f(Q_i) - f(Q_{i-1})$.



线性化方法的缺点及补偿办法 —— 熵修复

当出现跨音速中心稀疏波时, 即存在 p 使得在 p -波的左侧 $\lambda^p < 0$, 同时在 p -波的右侧 $\lambda^p > 0$, 则线性化方法 (包括 Roe 方法) 给出的 p -波间断解不满足 Lax 熵条件. 因此需要做适当的修补, 即所谓熵修复 (Entropy Fixes).

Roe 方法的数值通量可以通过矩阵 $\hat{A}_{i-1/2}$ 的特征值表示为

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2}[f(Q_{i-1}) + f(Q_i)] - \frac{1}{2} \sum_p |\hat{\lambda}_{i-1/2}^p| \mathcal{W}_{i-1/2}^p.$$

Harten-Hyman 熵校: 用 $(\hat{\lambda}^k)^+ - (\hat{\lambda}^k)^- = (1-\beta)\lambda_r^k + \beta|\lambda_l^k|$ 替换了 $|\hat{\lambda}_{i-1/2}^k|$, 其中 $\beta = \frac{\lambda_r^k - \hat{\lambda}^k}{\lambda_r^k - \lambda_l^k}$, 这有效地增加了 k-波的数值粘性.

Harten 熵校正: 将 $|\hat{\lambda}_{i-1/2}^p|$ 换为 $\phi_\delta(\hat{\lambda}_{i-1/2}^p)$, 其中

$$\phi_\delta(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|, & |\lambda| \geq \delta, \\ \frac{\lambda^2 + \delta^2}{2\delta}, & |\lambda| < \delta. \end{cases}$$



线性化方法的缺点及补偿办法——熵修复

Roe 线性化方法+LLF 熵校正: 定义数值通量

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2}[f(Q_{i-1}) + f(Q_i)] - \frac{1}{2} \sum_p \alpha_{i-1/2}^p \mathcal{W}_{i-1/2}^p,$$

其中 $\alpha_{i-1/2}^p = \max\{|\lambda_{i-1}^p|, |\lambda_i^p|\}$, λ_{i-1}^p , λ_i^p 是 $f'(Q_{i-1})$, $f'(Q_i)$ 的第 p 个特征值. 并利用 $f(Q_i) - f(Q_{i-1}) = \sum_{p=1}^m \hat{\lambda}_{i-1/2}^p \mathcal{W}_{i-1/2}^p$, 得

$$\mathcal{A}^\mp \Delta Q_{i-1/2} = \frac{1}{2} \sum_p (\hat{\lambda}_{i-1/2}^p \mp \alpha_{i-1/2}^p) \mathcal{W}_{i-1/2}^p.$$

注: 以上几种熵校正方法在非线形方程式凸通量情形给出的都是 E 格式, 因此可以证明相应数值解收敛于熵解. 对方程组没有相应结果, 在一些特殊情况下线性化方法可能会给出非物理解.

见 Lecture 11, p.2-8. 黎曼问题的 HLL 和 HLLE 近似求解方法见 Lecture 11, p.9-11, E 格式见 Lecture 8, p.17



Harten 定理

Harten 定理是证明格式为 TVD 的基本工具.

Theorem

考虑格式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - C_{i-1}^n(Q_i^n - Q_{i-1}^n) + D_i^n(Q_{i+1}^n - Q_i^n),$$

其中系数 C_{i-1}^n, D_i^n 可以依赖于 Q^n . 若系数满足关系

$$C_{i-1}^n \geq 0, D_i^n \geq 0, C_i^n + D_i^n \leq 1, \forall i.$$

则有 $TV(Q^{n+1}) \leq TV(Q^n)$.

证明: 由格式有 $|Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}| \leq (1 - C_i^n - D_i^n)|Q_{i+1}^n - Q_i^n| + C_{i-1}^n|Q_i^n - Q_{i-1}^n| + D_{i+1}^n|Q_{i+2}^n - Q_{i+1}^n|$. 将该不等式对 i 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 求和即得定理结论. ■

见 Lecture 4, p.15.



Lax-Wendroff 定理

设给定了一族网格 $\Delta t^{(j)}, \Delta x^{(j)}, j = 1, 2, \dots$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时, $\Delta t^{(j)} \rightarrow 0, \Delta x^{(j)} \rightarrow 0$. 设数值通量 $F_{i-1/2}^{(j)n} = \mathcal{F}(Q_{i-1}^{(j)n}, Q_i^{(j)n})$ 与 $f(q)$ 相容. 设 $Q^{(j)n}$ 为数值解. 定义 $Q^{(j)}(x, t) = Q_i^{(j)n}, \forall (x, t) \in \Omega_i^{(j)n} = (x_{i-1/2}^{(j)}, x_{i+1/2}^{(j)}) \times [t_n^{(j)}, t_{n+1}^{(j)})$. 称 $Q^{(j)}(x, t)$ 是 TV 稳定的, 若对任取的 $T > 0$, 存在 $R > 0$, 使得

$$TV(Q^{(j)}(\cdot, t)) < R, \quad \forall t \in [0, T], j = 1, 2, \dots$$

Theorem

设有相容数值通量的守恒型格式的数值解序列 $Q^{(j)}$ 是 TV 稳定的. 若存在局部可积函数 $q(x, t)$, 使得对 $\forall \Omega = [a, b] \times [0, T]$, 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|Q^{(j)} - q\|_{1, \Omega} = 0.$$

则 $q(x, t)$ 是守恒律方程的一个弱解.



离散熵条件 + Lax-Wendroff 定理条件 \Rightarrow 熵解

设 $(\eta(q), \psi(q))$ 是守恒律方程 $q_t + f(q)_x = 0$ 的凸熵对 (§11.14),
 设 $\Psi_{i-1/2}^n = \Psi(Q_{i-1}^n, Q_i^n)$ 是与 $\psi(q)$ 相容的数值熵通量. 则有

Theorem

设有相容数值通量的守恒型格式的数值解序列 $Q^{(j)}$ 是 TV 稳定的, 且满足离散熵条件

$$\eta(Q_i^{n+1}) \leq \eta(Q_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Psi_{i+1/2}^n - \Psi_{i-1/2}^n).$$

若存在局部可积函数 $q(x, t)$, 使得对 $\forall \Omega = [a, b] \times [0, T]$, 有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|Q^{(j)} - q\|_{1, \Omega} = 0.$$

则 $q(x, t)$ 是守恒律方程的熵解.

注: 定理的证明与 Lax-Wendroff 定理的证明类似.

见 Lecture 8, p.29. Godunov 格式产生的数值解满足离散熵条件.



单调格式及其非线性稳定性和收敛性

非线性问题数值方法的稳定性和收敛性一般来说是一个十分困难的问题. 一个特例是压缩算子 (见§8.3.1). 单调格式等一些数值格式可利用压缩算子的方法证明非线性稳定性和收敛性.

Definition

数值格式 $Q_j^{n+1} = \mathcal{N}(Q^n; j) = \mathcal{N}(Q_{j-p}^n, \dots, Q_{j+r}^n)$ 称为是单调格式, 如果 $\frac{\partial}{\partial Q_i^n} \mathcal{N}(Q^n; j) \geq 0, \forall i, j, Q^n$.

Theorem

守恒型的单调格式是 \mathbb{L}^1 -压缩的.

注 1: 守恒型的单调格式是 \mathbb{L}^1 -稳定的和收敛的.

注 2: Godunov 格式是单调格式 (习题), 因此是 \mathbb{L}^1 -稳定和收敛的.

注 3: 单调格式都是一阶的, 其分析方法不适用于高分辨率格式.

见 Lecture 8, p.32.



相容的 TV-稳定的守恒型格式是收敛的

Theorem

设初值 q^0 有紧支集且 TV 有界. 设 $Q(\Delta t)$ 是由具有局部 Lipschitz 连续数值通量 $F_{i-1/2}^n$ 的与某守恒律方程式相容的 TV-稳定的守恒型格式产生的数值解序列. 设 \mathcal{W} 是该守恒律方程式相应初值问题的弱解集. 则

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{dist}(Q(\Delta t), \mathcal{W}) = 0.$$

即格式是收敛的.

证明: 反证法. 设 $\exists \epsilon > 0$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta t_j = 0$, s.t. $\text{dist}(Q(\Delta t_j), \mathcal{W}) > \epsilon$.

由 TV-稳定性知 $\exists R, M > 0$, s.t. $Q(\Delta t_j) \in \mathcal{K}(R, M)$, $\forall j$.

由 $\mathcal{K}(R, M)$ 紧, 不妨设存在 $v \in L_1$ s.t. $\lim_{j \rightarrow \infty} \|Q(\Delta t_j) - v\|_{1, T} = 0$.

因而由 Lax-Wendroff 定理, $v \in \mathcal{W}$. 这与 $\text{dist}(Q(\Delta t_j), \mathcal{W}) > \epsilon$ 矛盾.

见 Lecture 8, p.44. TV-稳定性的定义和相容的守恒型格式的 TV-稳定性见 Lecture 8, p.41-43.



Thank You!

