Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

非线性双曲守恒律方程组黎曼问题解的结构 —— 概述

仅限于讨论自治的真正非线性双曲守恒律方程组黎曼问题解的结构.

- 常系数线性双曲型方程式黎曼问题的解是以其特征速度传播的波 (黎曼初值的跳跃间断).
- 常系数线性双曲型方程组黎曼问题的解是以其一组特征速度 (系数矩阵的特征值)传播的波 (黎曼初值的跳跃间断按矩阵的特征向量所做的分解).
- 非线性双曲型方程式黎曼问题的弱解是一个以满足 R-H 跳跃间断条件的特征速度 s 传播的激波 (黎曼初值的跳跃间断) 或是一个界定于 $f'(q_l)$ 和 $f'(q_r)$ 之间的中心稀疏波.
- 非线性双曲型方程组黎曼问题的弱解是一组以满足 R-H 跳跃间断条件的特征速度 s 传播的激波 (黎曼初值的跳跃间断) 和中心稀疏波构成的涨落波.

一维浅水方程的导出

一维浅水方程模拟宽度一定的渠道中深度很浅 (深度远小于波长) 的不可压流体的运动. 我们做以下基本假设

- 每个横截面上流体的水平速度一致 $u(x,t)$, 垂直速度可忽略.
- 渠道的宽度为 1, 每个横截面上流体的深度一致 $h(x,t)$.
- 流体的质量密度 $\bar{\rho}$ 为常量(量纲为: 质量/体积. 不可压 $\Rightarrow \rho =$ 常量).
- 重力加速度 g 为常量.

于是有: 时刻 t, $[x_1, x_2]$ 中流体的总质量 $= \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho} h(x,t)dx$,
时刻 t, 截面 x 处流体质量的通量 $= \bar{\rho} u(x,t)h(x,t)$.

由此得质量守恒方程: $h_t + (uh)_x = 0$,
(uh 常称为排量 discharge).

一维浅水方程的导出

又: 时刻 t, $[x_1, x_2]$ 中流体的总动量 $= \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho} h(x,t) u(x,t) dx$,
时刻 t, 截面 x 处流体动量的通量 $= \bar{\rho} h(x,t) u^2(x,t) + p(x,t)$.

其中 $p = \int_0^h \bar{\rho} g (h-y) dy = \frac{1}{2} \bar{\rho} g h^2$ 为时刻 t 截面 x 上流体的总压力.

由此得动量守恒方程: $(\bar{\rho} h u)_t + (\bar{\rho} h u + p)_x = 0$, 或

$$(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2} g h^2\right)_x = 0.$$

一维浅水方程组: $\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2} g h^2 \end{bmatrix}_x = 0.$

注: 通过变量替换也可以导出其它形式的守恒律方程组. 但若非物理守恒量的守恒律方程组, 则当求解非光滑弱解, 尤其是激波解时, 一般会得到非物理解.

一维浅水方程 —— 拟线性形式, 特征值与特征向量

- 令 $q(x,t) = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}$, 这里 $u = q^2/q^1$, $h = q^1$;

  $$f(q) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^2 \\ (q^2)^2/q^1 + \frac{1}{2}g(q^1)^2 \end{bmatrix}.$$

- 则 $f'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(q^2/q^1)^2 + gq^1 & 2q^2/q^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{bmatrix}$.

- 一维浅水方程的拟线性形式 $q_t + f'(q)q_x = 0$.

- f' 的特征值为 $\lambda^{1,2} = u \mp \sqrt{gh}$, 特征向量为 $r^{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \mp \sqrt{gh} \end{bmatrix}$.

一维线性浅水方程—— 刻画 $h_0 > 0$, u_0 附近微小扰动

考虑常值 $h_0 > 0$, u_0 附近微小扰动, 令 $q = \begin{bmatrix} h - h_0 \\ hu - h_0 u_0 \end{bmatrix}$, $q_0 = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_0 u_0 \end{bmatrix}$.

由 $f'(q_0 + q) = f'(q_0) + f''(q_0 + \xi q)q \approx f'(q_0)$, 忽略高阶小量, 则 q 近似满足线性双曲型方程组 $q_t + f'(q_0)q_x = 0$.

因此, 小扰动的波的特征速度为 $\lambda^{1,2} = u_0 \mp c_0$, $c_0 = \sqrt{gh_0}$. 这与线性声波类似 ($c_0 = \sqrt{K_0/\rho_0}$). 不同之处在于, 声波是可压流体中的纵波, 而浅水波是不可压流体中由 (不均匀) 重力引起的横波 (也称重力波), 后者的速度通常要慢许多.

比值 $F_r = |u|/c$ 称为 Froude 数 (比较声波中的马赫数).

一维浅水方程光滑初值问题解的定性行为

光滑初值将被分解为两个特征波 $r^{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \mp \sqrt{gh} \end{bmatrix}$ 的线性组合, 并以特征速度 $\lambda^{1,2} = u \mp \sqrt{gh}$ 传播. 但它们的传播通常是耦合的.

在深度 h 较大处两个特征波的传播速度之差 $2\sqrt{gh}$ 也较大, 反之则较小. 当 h, u 都变化很小时, 则可以认为波速为常数, 两个特征为常向量. 这时问题的解可通过求解线性双曲组的方法求得 (例如特征线法).

在简波情形, 例如初值只含第二族特征, 则其波峰将逐渐追上前面相邻的波谷, 使波峰前沿变得越加陡峭 (即形成压缩波), 而波谷与前面相邻波峰间的距离则将越拉越大, 使波峰后沿变得越加平坦 (形成稀疏波). 第一族简波的情形也类似 (见p.257, 图 13.1).

这种典型的非线性现象可通过简单实验观察到 (见图 13.2, 13.3).

一维浅水方程的黎曼问题 —— 水坝坍塌问题

1. 考虑一维浅水方程组 $\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}_x = 0$ 的黎曼问题: $h(x,0) = \begin{cases} h_l, & x < 0, \\ h_r, & x > 0, \end{cases}$ $u(x,0) = 0.$
2. 自治非线性双曲守恒律方程组黎曼问题的熵解是相似性解 $q(x,t) = \tilde{q}(x/t)$, (见§11.10, 和课件 FDM2-Nonlinear-9-c11 第16 页), $\therefore$ $(f'(\tilde{q}(\frac{x}{t})) - \frac{x}{t} I)\tilde{q}'(\frac{x}{t}) = 0$ (即 $\tilde{q}' = 0$ 或 $\tilde{q}' = r^p(\tilde{q})$, $\lambda^p(\tilde{q}) = \frac{x}{t}$).
3. 两族特征线: $\frac{dX^1}{dt} = \lambda^1 \triangleq u - \sqrt{gh}$ 和 $\frac{dX^2}{dt} = \lambda^2 \triangleq u + \sqrt{gh}$.
4. $f'(q)$ 的两个特征向量: $(1, u - \sqrt{gh})^T$ 和 $(1, u + \sqrt{gh})^T$.
5. 由于 (2)—(4), 熵解只能是 1-中心稀疏波 (激波), 2-激波 (中心稀疏波) 的各种组合 (由黎曼初值决定).

水坝坍塌问题熵解的特征结构

6. 当 $h_l > h_r$ 时, 熵解总是1-中心稀疏波和2-激波 (图 13.5-6).
7. 激波速度满足 R-H 跳跃间断条件 $s(q_l - q_r) = f(q_l) - f(q_r)$.
8. 中心稀疏波则应满足 $f'(\tilde{q}(x/t))\tilde{q}'(x/t) = \frac{x}{t}\tilde{q}'(x/t)$ (比较 p.214 (11.26)).
9. 两族特征线除了在 1-稀疏波区域, 1-特征线为散开的直线族, 在其余区域都是平行的直线族(见p.261, 图 13.6).
10. 1-特征线从右端进入2-激波, 从左端穿出2-激波. 而2-特征线则分别从左右两端进入2-激波. 又2-特征线从左端进入1-中心稀疏波, 从右端穿出1-中心稀疏波, 在中心稀疏波区域则平滑过渡(见p.261, 图 13.6).
11. 流体粒子以速度 u 运动. 所以, 当1-中心稀疏波左端前沿到达上游时, 该处的流体粒子开始加速, 直到在到达1-中心稀疏波右端时达到最大值. 另一方面, 当2-激波到达下游时, 到达处的流体粒子速度突然加速至最大值(见p.260, 图 13.5).

一维浅水方程双激波解的黎曼初值问题

1. 考虑黎曼初值 $h(x,0) = h_0$, $u(x,0) = \begin{cases} u_l, & x < 0, \\ -u_l, & x > 0, \end{cases} \quad u_l > 0.$
2. 由初值的对称性, 熵解必然有相同的对称性. 因此, 中间状态满足 $u_m = 0$.
3. 由于流体从两端流入中间区域, 导致 $h_m > h_l = h_r = h_0$.
4. 因此有 $\lambda_r^2 = u_r + \sqrt{gh_0} < \lambda_m^2 = \sqrt{gh_m}$, 即 2-波是激波.
5. 由熵解的对称性 1-波是向相反方向以同样速度传播的激波.
6. 图 13.7 给出了 $h_0 = 1$, $u_l = 0.5$ 时熵解作为 x/t 的函数.
7. 图 13.8 则展示1-特征线从左右两端进入 1-激波, 从右端进入 2-激波, 从左端穿出 2- 激波. 而 2-特征线则分别从左右两端进入 2-激波, 又 2-特征线从左端进入 1-激波, 从右端穿出 1-激波. (激波速度 s^2 和 h_m 可由R-H条件唯一解得).

非线性守恒律方程组的经典 Lax 激波

从以上例子中我们可以看到非线性守恒律方程组经典的特征结构 — 经典 Lax 激波.

对于有 m 个分量的非线性守恒律方程组的第 p 族激波, 如果有 i-特征 ($i \leq p-1$) 右进左出, j-特征 ($j \geq p+1$) 左进右出, 第 p-特征分别从两端进入, 既总共有 $m+1$ 个特征进入该激波, 则称该激波为 Lax 激波.

以上例子中的激波都是 Lax 激波. 并且出现在许多物理问题中.

我们将看到, 对严格双曲型的非线性守恒律方程组, 如果其通量 f 是真正非线性的 (相当于凸性条件在方程式中的作用), 则熵解的所有激波一定是 Lax 激波.

而在更一般的情况下, 则有可能出现过压缩 (overcompressive) 激波和欠压缩 (undercompressive) 激波. 另外, 在非严格双曲型情形有可能无法判别一个激波是第几族的.

求解黎曼问题的要素

求解黎曼问题的要素:

1. 确定 m 个波的性质 (激波还是稀疏波) (应用适当的熵条件);
2. 确定 $m-1$ 对相邻两个波之间的 $m-1$ 个中间状态;
3. 确定穿过稀疏波时解的结构.

其中 (1), (3) 与非线性守恒律方程式情形类似, (2) 则与积分曲线及 Rankine-Hugniot 跳跃间断条件相关.

对于浅水方程来说, $m=2$, 因此也只有一个中间状态.

一般来说这些要素的解决是耦合在一起的.

常系数线性严格双曲型守恒律方程组黎曼问题解的结构

对于常系数线性严格双曲型方程组 $q_t + Aq_x = 0$:

1. 所有 m 个波都是激波;
2. 第 p 族激波的跳跃间断平行于 A 的第 p 族特征向量 r^p;
3. 设 $q_r - q_l = \alpha^1 r^1 + \cdots + \alpha^m r^m$, 则 $m-1$ 个中间状态依次为 $q_i = q_l + \sum_{j=1}^{i} \alpha^j r^j$, $i = 1, \cdots, m-1$.

由此可见, 在由 A 的特征向量系构成的仿射坐标系中, 中间状态可由 q_l, q_r 的坐标直接计算得到.

守恒律方程组关于给定状态 q_* 的 Hugoniot 点 (locus)

- 守恒律方程组的弱解在间断处必须满足 Rankine-Hugoniot 跳跃间断条件 $s(q_* - q) = f(q_*) - f(q)$. 这是有 $m+1$ 个未知变量的 m 个方程. 因此, 每个解一般都对应一个单参数族解.
- 称每个满足以上方程的 q 为系统关于 q_* 的一个 Hugoniot 点.
- 当 $f(q) = Aq$ 时, 即对常系数线性问题, 上述方程有 m 族解, 对应于 A 的 m 个特征值与相应的特征向量空间. 关于 q_* 的 Hugoniot 点集是过 q_* 的 m 条特征线.
- 对非线性严格双曲型问题, 可以 (用隐函数定理) 证明方程也有 m 族解, 且存在参数 α, 使得第 p 族解 $(s_p(\alpha), q_p(\alpha))$ 满足 $s_p(0) = \lambda^p(f'(q_*))$, $q_p'(0) = r^p(f'(q_*))$, $p = 1, 2, \cdots, m$.
- 单参数曲线 $q_p(\alpha)$ 定义了系统过 q_* 的第 p 族 Hugoniot 点集, 其上每个点都可与 q_* 间通过一个 p-激波连接.

浅水方程的 Hugoniot 点集

以浅水方程为例.

1. 将方程 $s(q_* - q) = f(q_*) - f(q)$ 表示成以下形式

$$s(h_* - h) = h_* u_* - hu,$$

$$s(h_* u_* - hu) = h_* u_*^2 - hu^2 + \frac{1}{2}(h_*^2 - h^2).$$

2. 这两个方程中有三个未知函数, 因此解一般应该有个单参数.

3. 由第一个方程得 $s = \frac{h_* u_* - hu}{h_* - h}$, 将其代入第二个方程化简得

$$u^2 - 2u_* u + \left[u_*^2 - \frac{g}{2}\left(\frac{h_*}{h} - \frac{h}{h_*}\right)(h_* - h)\right] = 0.$$

浅水方程的 Hugoniot 点集

4. 该方程有两个根 $u^{\pm}(h) = u_* \pm \sqrt{\frac{g}{2}\left(\frac{h_*}{h} - \frac{h}{h_*}\right)(h_* - h)}$.
5. 取 $\alpha = h - h_*$ 为参数. 此时有 $h(0) = h_*$, $h(\alpha) = h_* + \alpha$.
6. 将 $u^{\pm}(h)$ 的表达式两端同乘以 h, 化简得

$$hu^{\pm} = h_* u_* + \alpha \left[u_* \pm \sqrt{gh_*\left(1 + \frac{\alpha}{h_*}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{2h_*}\right)} \right].$$

   特别地, 由此知当 $\alpha > 0$ 时, $s_+^{\alpha} > \lambda^2(q^*) > \lambda^1(q^*) > s_-^{\alpha}$, 而当 $\alpha < 0$ 时, $\lambda^2(q^*) > s_+^{\alpha} > s_-^{\alpha} > \lambda^1(q^*)$.

7. 这样就得到了 $(q^1(\alpha), q^2(\alpha))^T = (h(\alpha), h(\alpha)u(\alpha))^T$ 的两族单参数 Hugoniot 点集.
8. 为了看 $\pm$ 号分别对应第一还是第二族 Hugoniot 点集, 我们需要计算相应曲线当 α 趋于零时的切线方向.

浅水方程的 Hugoniot 点集

9. 由 (5), (6), 当 $|\alpha| \ll 1$ 时有

$$q^{\pm} = q_* + \alpha \left[\frac{1}{u_* \pm \sqrt{gh_* + O(\alpha)}} \right]$$

10. 因此, $\frac{dq^{\pm}}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \left[\frac{1}{u_* \pm \sqrt{gh_*}} \right]$, 即 "+" 对应 r^2, "−" 对应 r^1.

11. 由 (1), (5), (6),

$$\lim_{\alpha \to 0} s_{\pm}(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{hu^{\pm} - h_* u_*}{h - h_*} = u_* \pm \sqrt{gh_*} = \lambda_{\pm}(q_*).$$

12. 即 (6) 中取 "−" 号时, 得到的是 1-激波 Hugoniot 点集.

13. 即 (6) 中取 "+" 号时, 得到的是 2-激波 Hugoniot 点集.

非线性守恒律方程组黎曼问题的全激波解

- 可以进一步证明 (同样用隐函数定理, 至少当 q_l, q_r 相差不太大时) 非线性守恒律方程组黎曼问题可以有一个完全由激波构成的弱解. 构成弱解的这些激波未必都满足 Lax 熵条件.
- Lax 熵条件: 设状态 q_l, q_r 间的跳跃以速度 s 传播. 若存在指标 p, 使得

$$\lambda^p(q_l) > s > \lambda^p(q_r);$$
$$\lambda^j(q_l) < s, \quad \lambda^j(q_r) < s, \quad \forall j < p;$$
$$\lambda^j(q_l) > s, \quad \lambda^j(q_r) > s, \quad \forall j > p,$$

  其中特征值排序为$\lambda^1 < \cdots < \lambda^m$, 则称该跳跃是满足Lax熵条件的第 p 族激波.
- 对真正非线性严格双曲型守恒律方程组, 可以证明物理激波满足 Lax 熵条件, 反之亦然. 另外, 过一点的每族 Hugoniot 点集恰有一半 ($\alpha > 0$ 或$\alpha < 0$) 满足 Lax 熵条件.

浅水方程黎曼问题的全激波解和激波解的 Lax 熵条件

1. 浅水方程黎曼问题的全激波解由 q_l 与中间状态 q_m 之间形成的 1-激波, 和 q_m 与 q_r 之间形成的 2-激波组成.
2. 由此知 q_m 是过 q_l 的 1-激波 Hugoniot 点, 同时也是过 q_r 的 2-激波 Hugoniot 点. 即 q_m 是两个 Hugoniot 点集的交点.
3. 联立求解两个 Hugoniot 点集的方程 ((13.18), 其中 $\alpha = h - h_*$, 将 $*$ 分别换为 l 和 r, l 取 "$-$" 号(1-族), r 取 "$+$" 号(2-族)), 即得中间状态 q_m. 激波速度分别为 $s_\pm^* = \frac{h_* u_* - h_m u_m^\pm}{h_* - h_m}$.
4. 对于 1-激波, 由 $s^1 = \frac{h_l u_l - h_m u_m^-}{h_l - h_m}$ 知条件 $\lambda^1(q_l) > s^1 > \lambda^1(q_m^-)$ 可显式地表示为

$$u_l - \sqrt{g h_l} > \frac{h_l u_l - h_m u_m^-}{h_l - h_m} > u_m^- - \sqrt{g h_m}.$$

浅水方程黎曼问题的全激波解和激波解的 Lax 熵条件

5. 令 $c = \frac{u_l - u_m^-}{h_l - h_m}$，则 $\frac{h_l u_l - h_m u_m^-}{h_l - h_m} = u_l + ch_m = u_m^- + ch_l$，则上式等价于

$$-\sqrt{gh_l} - ch_m > 0 > -\sqrt{gh_m} - ch_l,$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{g}h_l^{3/2} - ch_m h_l > 0 > -\sqrt{g}h_m^{3/2} - ch_l h_m, \quad \Rightarrow \quad h_l < h_m.$$

6. 类似地可证 $\lambda^2(q_m^+) > s^2 > \lambda^2(q_r)$, $\Rightarrow \quad h_r < h_m$.
7. 而当 $h_l < h_m$ 和 $h_r < h_m$ 同时成立时，$\lambda^2(q_m) > s^2 > s^1 > \lambda^1(q_m)$，且 $\lambda^2(q_l) > \lambda^1(q_l) > s^1$, $\lambda^1(q_r) < \lambda^2(q_r) < s^2$ (见：浅水方程的 **Hugniot** 点集 (6))，所以 1-激波和 2-激波都满足 Lax 熵条件.
8. 当且仅当 $h_l < h_m$ 和 $h_r < h_m$ 同时成立时，全激波解是熵解.

浅水方程黎曼问题全激波解的例

例 1(例13.6, p267) $h_l = h_r = 1$, $u_l = -u_r = 0.5$. 由 (13.18), 连接左端的 1-激波 Hugoniot 点集 (在 h-(hu) 坐标中的曲线方程) 为

$$hu = 0.5 + (h-1)\left[0.5 - \sqrt{gh(1+h)/2}\right].$$

连接右端的 2-激波 Hugoniot 点集为 (见p.267 图13.10(a))

$$hu = -0.5 + (h-1)\left[-0.5 + \sqrt{gh(1+h)/2}\right].$$

物理激波对应 $h > 1$ 的部分(实线), 非物理激波对应 $h < 1$ 的部分(虚线). 1-激波 Hugoniot 点集的实线部分和 2-激波 Hugoniot 点集的实线部分交于 $(h_m, h_m u_m) \approx (?2.1701, 0)$. 因此, 所给全激波解的两个激波都是 Lax 激波. 即全激波解是物理解.

浅水方程黎曼问题全激波解的例

例 2(例13.7, p267, 例13.4, p259) $h_l = 3,\ h_r = 1,\ u_l = u_r = 0.$
由 (13.18), 连接左端的 1-激波 Hugoniot 点集 (在 h-(hu) 坐标中的曲线方程) 为 (见图 13.10(b))

$$hu = 0 + (h-3)\left[0 - \sqrt{gh(3+h)/6}\right].$$

连接右端的 2-激波 Hugoniot 点集为 (见图 13.10(b))

$$hu = 0 + (h-1)\left[0 + \sqrt{gh(1+h)/2}\right].$$

1-激波的物理激波对应 $h > 3$ 的部分(实线), 非物理激波对应 $h < 3$ 的部分(虚线). 2-激波的物理激波对应 $h > 1$ 的部分(实线), 非物理激波对应 $h < 1$ 的部分(虚线).

1-激波 Hugoniot 点集的虚线部分和 2-激波 Hugoniot 点集的实线部分交于 $(h_m, h_m u_m) \approx (1.7, 1.3)$. 即所给全激波解中 1-激波不是 Lax 激波. 因此, 全激波解不是物理解.

浅水方程黎曼问题全激波解的例

事实上, 1-激波应该替换为 1-稀疏波.

图 13.11 显示的是非物理全激波解的特征图. 从图 13.11(a) 可以看出 $\lambda^1(q_l) < s^1 < \lambda^1(q_m)$, 因此, 1-激波不满足 Lax 熵条件, 是一个扩张型激波.

另一方面, 从图 13.11(a) 可以看出 $\lambda^1(q_m) < s^2$, $\lambda^1(q_r) < s^2$, 又由图 13.11(b) 可以看出 $\lambda^2(q_m) > s^2 > \lambda^2(q_r)$, 因此, 2-激波满足 Lax 熵条件.

注: 由 $\lambda^1(q) = u - \sqrt{gh} < u < \lambda^2(q) = u + \sqrt{gh}$, 以及物理 1-激波总满足 $h_m > h_l$, 2-激波总满足 $h_m > h_r$, 我们可以得到以下结论: 流体质点穿过激波时深度增加.

用隐函数定理证明 Hugoniot 点集的存在性

目标: 求 $s(q-q_*)=f(q)-f(q_*)$ 的 m 个单参数解族 $(s_p(\alpha_p), q_p(\alpha_p))$ s.t. $s_p(0)=\lambda_p(f'(q_*))$, $q_p'(0)=r_p(f'(q_*))$.

令 $\xi_p=\{\xi_p^i : 1\le i\le m,\ 但\ i\ne p\}$, 记 $\{(\lambda_i, r_i)\}_{i=1}^m$ 为 $f'(q_*)$ 的特征值和特征向量. 令 $q_p(\alpha_p,\xi_p)=q_*+\alpha_p(r_p+\sum_{i\ne p}\xi_p^i r_i)$. 定义映射

$$F(\alpha_p,\beta_p,\xi_p)=\begin{cases}\frac{f(q_p(\alpha_p,\xi_p))-f(q_*)}{\alpha_p}-(\lambda_p+\beta_p)[r_p+\sum\limits_{i\ne p}\xi_p^i r_i], & \alpha_p\ne 0,\\ [f'(q_*)-(\lambda_p+\beta_p)I][r_p+\sum\limits_{i\ne p}\xi_p^i r_i], & \alpha_p=0.\end{cases}$$

则有 $F(0)=0$, 又由 $\frac{\partial F}{\partial \beta_p}(0)=r_p$, $\frac{\partial F}{\partial \xi_p^i}(0)=[f'(q_*)-\lambda_p I]r_i$, $i\ne p$, 知 $\frac{\partial F}{\partial(\beta_p,\xi_p)}(0)$ 非奇异.

用隐函数定理证明 Hugoniot 点集的存在性

于是, 由隐函数定理知, 在 $\alpha_p = 0$ 的邻域中, 存在充分光滑的函数 $(\beta_p(\alpha_p), \xi_p(\alpha_p))$ 满足 $(\beta_p(0), \xi_p(0)) = 0$, 并且有 $F(\alpha_p, \beta_p(\alpha_p), \xi_p(\alpha_p)) \equiv 0$.

令 $s_p = (\lambda_p + \beta_p(\alpha_p))$, $\alpha_p \neq 0$, 则由 F 和 $q_p(\alpha_p, \xi_p)$ 的定义知 $f(q_p(\alpha_p, \xi_p(\alpha_p))) - f(q_*) = s_p(q_p(\alpha_p, \xi_p(\alpha_p)) - q_*)$.

另一方面, 不难验证 $\left.\frac{dq(\alpha_p, \xi_p(\alpha_p))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = r_p$; $s_p(0) = \lambda_p$.

因此, $(s_p(\alpha), q_p(\alpha)) = (\lambda_p + \beta_p(\alpha_p), q_* + \alpha_p(\lambda_p + \sum_{i\neq p} \xi_p^i(\alpha_p) r_i)$, $p = 1, 2, \cdots, m$, 即为所求的 m 个单参数族, 它们分别定义了过 q_* 的 p-激波的 Hugoniot 点集和相应的激波速度, $p = 1, \cdots, m$.

用反函数定理证明全激波解的存在性

设从 $\hat{q}$ 出发取单参数 α_1 得到过 $\hat{q}$ 的 1-激波 Hugoniot 点 $\hat{q}_1$, 再从 $\hat{q}_1$ 出发取单参数 α_2 得到过 $\hat{q}_1$ 的 2-激波 Hugoniot 点 $\hat{q}_2$, $\cdots$ $\cdots$, 最后从 $\hat{q}_{m-1}$ 出发取单参数 α_m 得到过 $\hat{q}_{m-1}$ 的 m-激波 Hugoniot 点 $\hat{q}_m$. 这一过程定义了一个从参数空间到状态空间的光滑映射

$$G(\hat{q}) : (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \mapsto \tilde{q}.$$

由定义和 p-激波 Hugoniot 点集的定义, 该映射满足: $G(\hat{q}; 0) = \hat{q}$, $\frac{\partial G(\hat{q};0)}{\partial \alpha_p} = r_p$, r_p 为 $f'(\hat{q})$ 的第 p 个特征向量, $p = 1, 2, \cdots, m$. 因此, $\frac{\partial G(\hat{q};0)}{\partial(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)}$ 非奇异.

由反函数定理知, 对 $\hat{q}$ 邻域中的 $\tilde{q}$, 存在 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, s.t. $G(\hat{q}; \alpha) = \tilde{q}$.

用反函数定理证明全激波解的存在性

由 $G(\hat{q};\alpha)$ 的定义知, 从 $\hat{q}$ 出发由参数 α_1 给出的过 $\hat{q}$ 的 1-激波 Hugoniot 点 $\hat{q}_1$, 从 $\hat{q}_1$ 出发由参数 α_2 给出的过 $\hat{q}_1$ 的 2-激波 Hugoniot 点 $\hat{q}_2, \cdots \cdots,$ 从 $\hat{q}_{m-1}$ 出发由参数 α_m 给出的过 $\hat{q}_{m-1}$ 的 m-激波 Hugoniot 点 $\hat{q}_m = \tilde{q}$, 给出了以 $q_l = \hat{q}$, $q_r = \tilde{q}$ 的全激波解, 即

$$\hat{q} \overset{\text{1-激波}}{\longmapsto} \hat{q}_1 \overset{\text{2-激波}}{\longmapsto} \hat{q}_2 \cdots\cdots\cdots \overset{\text{(m-1)-激波}}{\longmapsto} \hat{q}_{m-1} \overset{\text{m-激波}}{\longmapsto} \hat{q}_m = \tilde{q}.$$

自治非线性双曲守恒律方程组解的结构 —— 概述

非线性双曲守恒律方程组解的结构通常十分复杂.

- 一般在每个点上都会有 m 个特征波以各自的特征速度通过. 我们观察到的只是这些波的包络(superposition).
- 这些波在传播过程中除了相互独立的产生变形之外, 还在不断地相互作用. 导致一般情况下无法解析求解.
- 解析方法的核心在于考虑仅属于某一个特征族的特殊的波及其传播.
- 每一个激波 —— 由满足 Rankine-Hugoniot 跳跃间断条件的分片常状态组成 —— 都是这样一种仅属于某一个特征族的特殊的波. 我们对此已进行了研究 (包括黎曼问题的全激波解).
- 下面我们研究只属于某一特征族的光滑解 —— 简波.

自治非线性守恒律方程组的特殊简波 —— 中心稀疏波

- 简波的一个特例是中心稀疏波. 其特殊性体现在它们是黎曼问题的解, 因而具有相似性, 即 $q(x,t) = \tilde{q}(x/t)$, 且满足方程 (见 (11.26))
$$f'(\tilde{q}(x/t))\tilde{q}'(x/t) = \left(\frac{x}{t}\right)\tilde{q}'(x/t).$$
- 在方程式情形, 上式给出 $\tilde{q}'(x/t) = 0$ 或 $f'(\tilde{q}(x/t)) = x/t$.
- 在方程组情形, 这说明当 $\tilde{q}'(x/t) \neq 0$ 时 $(x/t, \tilde{q}'(x/t))$ 是矩阵 $f'(\tilde{q}(x/t))$ 的特征值和相应的特征向量.
- 下面我们将讨论自治非线性守恒律方程组的一般简波, 并以浅水方程为例研究其求解方法.

系统在状态空间的积分曲线

设 $f(q)$ 是严格双曲型自治非线性守恒律方程组的光滑通量, 则 $f'(q)$ 的特征向量 $r^1(q), \cdots, r^m(q)$, 在状态空间（也称相空间）上, 定义了 m 族线性无关的光滑向量场.

Definition

相空间中的曲线 $q_p(\xi)$ 称为是第 p 族的积分曲线, 如果在该曲线的每点上都有 $q_p'(\xi)$ 与 $r^p(q_p(\xi))$ 平行, 即存在 $\alpha(\xi) \neq 0$, s.t.

$$q_p'(\xi) = \alpha(\xi) r^p(q_p(\xi)), \quad \forall \xi.$$

注: $\alpha(\xi)$ 与曲线的参数化及 r^p 的归一化（标准化）等有关. 定义的要点在于曲线的切线是特征方向.

浅水方程的积分曲线

例如, 对于浅水方程 $q = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}$, $f'(q)$ 的特征值为 $\lambda^{1,2} = u \mp \sqrt{gh}$, 特征向量为 $r^{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \mp \sqrt{gh} \end{bmatrix}$. 由于 r^p 的第一个分量非零, 即沿积分曲线 $dh \neq 0$, 因此可以取 h 为积分曲线的参变量将积分曲线参数化 (等价于取 $\xi = h$, 此时有 $\alpha(\xi) = 1$).

则浅水方程的第一族积分曲线方程为

$$\tilde{q}'(\xi) = r^1(\tilde{q}(\xi)) = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{q}^2/\tilde{q}^1 - \sqrt{g\tilde{q}^1} \end{bmatrix}.$$

于是得 $(\tilde{q}^1)' = 1$. 所以，我们可以取 $\tilde{q}^1(\xi) = \xi$. 第二个方程就简化为

$$(\tilde{q}^2)' = \tilde{q}^2/\xi - \sqrt{g\xi}.$$

浅水方程的积分曲线

这等价于 $(\frac{\tilde{q}^2}{\xi})' = -\sqrt{\frac{g}{\xi}}$, 由此得 $\frac{\tilde{q}^2}{\xi} = -2\sqrt{g\xi} + c$, 其中 c 为积分常数. 由定义 $\tilde{q}^2(h_*) = h_* u_*$, 因此得 $c = u_* + 2\sqrt{gh_*}$. 所以, 过相点 $(h_*, h_* u_*)$ 的第一族积分曲线为(见图 13.12(a))

$$hu = hu_* + 2h(\sqrt{gh_*} - \sqrt{gh}).$$

类似地, 可以得到过相点 $(h_*, h_* u_*)$ 的第二族积分曲线为(见图 13.12(b))

$$hu = hu_* - 2h(\sqrt{gh_*} - \sqrt{gh}).$$

系统在状态空间的积分曲线 —— 系统的黎曼不变量

理论上, 我们总可以将过某相点 q_* 的积分曲线通过解常微分方程初值问题求出. 系统的某些守恒性质与其积分曲线常常会有某种联系, 利用这些关系可以为系统的求解提供帮助.

Definition

称函数 $w^p(q)$ 为系统的 p-黎曼不变量, 如果它在每一条 p 族积分曲线上均为常数, 即 $\frac{d}{d\xi}w^p(\tilde{q}(\xi)) = 0$, 或等价地

$$\nabla w^p(\tilde{q}(\xi)) \cdot \tilde{q}'(\xi) = \nabla w^p(\tilde{q}(\xi)) \cdot r^p(\tilde{q}(\xi)) = 0.$$

注 1: p-黎曼不变量 $w^p(q)$ 在不同的 p 积分曲线上一般取不同的常数值. p 积分曲线是 p-黎曼不变量 $w^p(q)$ 的等值线.

注 2: 函数$w^p(\cdot)$为系统的 p-黎曼不变量 $\Leftrightarrow$ $\nabla w^p(q) r^p(q) = 0$.

浅水方程的黎曼不变量

浅水方程的第一族积分曲线为 $hu = hu_* + 2h(\sqrt{gh_*} - \sqrt{gh})$, 或等价地

$$u + 2\sqrt{gh} = u_* + 2\sqrt{gh_*}.$$

由定义知 $w^1(q) = u + 2\sqrt{gh}$ 为浅水方程的 1-黎曼不变量.

浅水方程的第二族积分曲线为 $hu = hu_* - 2h(\sqrt{gh_*} - \sqrt{gh})$, 或等价地

$$u - 2\sqrt{gh} = u_* - 2\sqrt{gh_*}.$$

由定义可知, $w^2(q) = u - 2\sqrt{gh}$ 为浅水方程的 2-黎曼不变量.

注: 对于 $m \geq 2$ 的系统, p 积分曲线上一般有 $m-1$ 个相互独立的 p-黎曼不变量. 每个 p-黎曼不变量都是 p 积分曲线的一个首次积分.

系统的 m 族积分曲线构成相空间的一个曲线坐标系

对于一个严格双曲型的非线性系统, 积分曲线在相空间给出了一个（局部）曲线坐标系, 以 $\xi_1, \cdots, \xi_m$ 为其参数坐标.

设从 $\hat{q}$ 出发取参数 ξ_1 得到过 $\hat{q}$ 的 1-积分曲线上的点 $\hat{q}_1$, 再从 $\hat{q}_1$ 出发取参数 ξ_2 得到过 $\hat{q}_1$ 的 2-积分曲线上的点 $\hat{q}_2$, $\cdots$ $\cdots$, 最后从 $\hat{q}_{m-1}$ 出发取参数 ξ_m 得到过 $\hat{q}_{m-1}$ 的 m-积分曲线上的点 $\hat{q}_m$. 这一过程定义了一个从参数空间到相空间的光滑映射

$$G(\hat{q}) : (\xi_1, \cdots, \xi_m) \mapsto \tilde{q}.$$

系统的 m 族积分曲线构成相空间的一个曲线坐标系

由 $G(\hat{q})$ 定义和 p-积分曲线的定义, 该映射满足: $G(\hat{q};0)=\hat{q}$, $\frac{\partial G(\hat{q};0)}{\partial \xi_p}=r_p$, r_p 为 $f'(\hat{q})$ 的第 p 个特征向量, $p=1,2,\cdots,m$.
因此, $\frac{\partial G(\hat{q};0)}{\partial(\xi_1,\cdots,\xi_m)}$ 非奇异.

由反函数定理知, 对 $\hat{q}$ 邻域中的 $\tilde{q}$, 存在 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_m)$, s.t. $G(\hat{q};\xi)=\tilde{q}$.

注: 与 Hugoniot 点集类似, 相空间中的两点也可以用积分曲线依次相连. 我们将看到对黎曼问题积分曲线对应的是中心稀疏波解.

自治非线性守恒律方程组的简波解

守恒律方程组的(第 p 族的)简波解是指可以写成以下形式的解:

$$q(x,t) = \tilde{q}(\xi(x,t)),$$

其中 $\tilde{q}(\xi)$ 是系统的第 p 族积分曲线 (即 $q'(\xi) = \alpha(\xi) r^p(q(\xi))$), $\xi(x,t)$ 是 $(x,t) \mapsto \xi$ 的光滑函数.

将简波解代入守恒律方程组得 $[\xi_t + \xi_x f'(\tilde{q}(\xi))]\tilde{q}'(\xi) = 0$, 或 $[\xi_t + \lambda^p(\tilde{q}(\xi))\xi_x]\tilde{q}'(\xi) = 0$. 因此, $\xi(x,t)$ 必须满足非线性(严格地说是拟线性)双曲型方程式

$$\xi_t + \lambda^p(\tilde{q}(\xi))\xi_x = 0.$$

自治非线性守恒律方程组的简波解

另一方面, 设 $\xi^0(x)$ 是任一给定的光滑函数, 设 $\tilde{q}(\xi)$ 是守恒律方程组的第 p 族积分曲线, 如果 $\xi(x,t)$ 是以下非线性双曲型方程式初值问题

$$\begin{cases} \xi_t + \lambda^p(\tilde{q}(\xi))\xi_x = 0, \\ \xi(x,0) = \xi^0(x), \end{cases}$$

的解, 则 $q(x,t) = \tilde{q}(\xi(x,t))$ 是守恒律方程组 $q_t + f(q)_x = 0$ 的一个以 $q(x,0) = \tilde{q}(\xi^0(x))$ 为初值的(第 p 族的)简波解.

注: 在简波解情形, $q(x,t)$ 所满足的非线性守恒律方程组初值问题约化成了 $\xi(x,t)$ 所满足的非线性双曲型方程式初值问题.

自治非线性守恒律方程组的简波解的特征

注意到, $\xi(x,t)$ 沿非线性双曲型方程式 $\xi_t + \lambda^p(\tilde{q}(\xi))\xi_x = 0$ 的特征曲线 $X'(t) = \lambda^p(\tilde{q}(\xi(X(t),t)))$ 是常数, 因此, 特征曲线为直线.

又 $q(X(t),t) = \tilde{q}(\xi(X(t),t))$, 所以, (第 p 族)简波解沿相应的(第 p 族)特征线（直线）是常态(常向量). (简波解的特征性质)

由于从 $\tilde{q}(\xi(X(0),0))$ 出发的(第 p 族)简波解的状态始终落在一条第 p 族的积分曲线上, 因此, 任一 p-黎曼不变量 $w^p(q)$ 在该解的发展过程中恒为常数, 即 $w^p(\tilde{q}(\xi(X(t),t))) = w^p(\tilde{q}(\xi^0(X(0))))$.

注: 特征线定义在 x-t 平面, 积分曲线则定义在相空间.

守恒律方程组简波解的特殊形式 —— 稀疏波与压缩波

当初值满足 $\lambda^p(\tilde{q}(\xi(x,0))$ 是 x 的单调增函数时, 第 p 族特征线将随时间发展渐行渐远, 因此, 此时的简波解是一个纯稀疏波.

当初值使得 $\lambda^p(\tilde{q}(\xi(x,0))$ 在某个区间上是 x 的单调减函数时, 从这里出发的第 p 族特征线将随时间发展逐步靠拢, 相应部分的简波解是一个压缩波. 由于这些特征线在有限时间内终将相撞, 因此这样的简波解将发展出激波.

注 1: 自治非线性守恒律方程组的简波解的这些性态与自治非线性守恒律方程式的解的性态完全相同.

注 2: 特征线相撞后发展出的 $\xi(x,t)$ 的激波不一定能给出原方程组的激波解（左右两个状态不一定落在彼此的 Hugniot 点集上, 即便在, 激波速度也需重新计算）.

作业: 13.4，13.6，13.7(b),(g).

Thank You!