Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

Godunov 方法 — 通过解黎曼问题计算数值通量 $F^n_{i-1/2}$

- REA 算法首先计算当前时刻守恒量的单元平均值, 然后通过解黎曼问题计算下一时间步守恒量的单元平均值.
- 记 $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = q^{\downarrow}(Q^n_{i-1}, Q^n_i)$ 为 $x_{i-1/2}$ 处相应黎曼问题的熵解.
- 黎曼问题的熵解是相似性解, 因此解沿射线 $x_{i-1/2}$ 为常数.
- 当 Δt 满足 CFL 条件时, 一个单元界面上黎曼问题的解所产生的波在一个时间步内不会传播到其它单元交界面.
- 令 $F^n_{i-1/2} = f(Q^{\downarrow}_{i-1/2})$ 则得到 Godunov 格式.
- 当 f 严格凸 (凹) 时, 黎曼问题的熵解是激波或中心稀疏波.

Godunov 方法 — f 严格凸时黎曼问题的熵解

以 $f'' > 0$ 为例, $q_l > q_r$ 时是激波; $q_l < q_r$ 时是中心稀疏波.

$Q^{\downarrow}_{i-1/2}$ 的取值分为 5 种情况 (见图 12.1(a)—(e)).

- (a). $Q_{i-1} > Q_i$, 激波; 激波速度 $s = \frac{[\![f]\!]}{[\![q]\!]} < 0$, $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = Q_i$.
- (b). $Q_{i-1} < Q_i$, 中心稀疏波; $f'(Q_i) < 0$, $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = Q_i$.
- (c). $Q_{i-1} < Q_i$, 中心稀疏波; $f'(Q_{i-1}) < 0 = f'(q_s) < f'(Q_i)$,
  $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = q_s$. $q_s = (f')^{-1}(0)$ 称为声速点.
- (d). $Q_{i-1} < Q_i$, 中心稀疏波; $f'(Q_{i-1}) > 0$, $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = Q_{i-1}$.
- (e). $Q_{i-1} > Q_i$, 激波; 激波速度 $s = \frac{[\![f]\!]}{[\![q]\!]} > 0$, $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = Q_{i-1}$.

Godunov 方法 — f 严格凸时数值通量 $F^n_{i-1/2}$ 的计算

由于我们仅黎曼问题的熵解在 $x_{i-1/2}$ 处的值 $Q^{\downarrow}_{i-1/2}$, 注意到

- $f'(q_s) = 0$, $f'' > 0$, 所以q_s 是 f 的全局最小值点;
- 在稀疏波的条件 (b), (c), (d) 下, $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = \min\limits_{Q_{i-1} \leq q \leq Q_i} f(q)$;
- 而在激波的条件 (a), (e) 下, $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = \max\limits_{Q_i \leq q \leq Q_{i-1}} f(q)$;
- $f'' > 0 \Rightarrow \max\limits_{Q_i \leq q \leq Q_{i-1}} f(q) = \max\{f(Q_{i-1}), f(Q_i)\}$.

因此, f 严格凸时熵解通量 $F^n_{i-1/2}$ 的取值可表示为

$$F^n_{i-1/2} = \begin{cases} \min\limits_{Q_{i-1} \leq q \leq Q_i} f(q), & Q_{i-1} \leq Q_i; \\ \max\{f(Q_{i-1}), f(Q_i)\}, & Q_i < Q_{i-1}. \end{cases}$$

习题: 导出 $f'' < 0$ 时黎曼问题熵解通量 $F^n_{i-1/2}$ 的取值公式.

用涨落计算的 Godunov 方法的波的传播形式

Godunov 方法也可以采用标准的用涨落计算的波的传播形式

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2} + \mathcal{A}^-\Delta Q_{i+1/2}\right),$$

其中涨落定义如下 (对比线性情形, p.82, (4.52), (4.53))

$$\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2} = f(Q_i) - f(Q^{\downarrow}_{i-1/2}),$$

$$\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-1/2} = f(Q^{\downarrow}_{i-1/2}) - f(Q_{i-1}).$$

格式等价于前面得到的 Godunov 方法的有限体积格式

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f(Q^{\downarrow}_{i+1/2}) - f(Q^{\downarrow}_{i-1/2})\right).$$

波与波速的全激波选择

为了定义 Godunov 格式的高分辨率校正项, 我们需要计算相应黎曼问题所对应的波 $\mathcal{W}_{i-1/2}$ 与波速 $s_{i-1/2}$. 最自然简单的做法是取

$$\mathcal{W}_{i-1/2} = \Delta Q_{i-1/2} = Q_i - Q_{i-1},$$

$$s_{i-1/2} = \begin{cases} [f(Q_i) - f(Q_{i-1})]/(Q_i - Q_{i-1}), & Q_{i-1} \neq Q_i, \\ f'(Q_i), & Q_{i-1} = Q_i. \end{cases}$$

这相当于在任何情况下都将满足 R-H 跳跃间断条件的激波解 (无论是压缩还是扩张) 作为黎曼问题的解. 因此, 我们简称其为波与波速的全激波选择.

波与波速的全激波选择的合理性

- 当黎曼问题的熵解为激波时, 以上选择没有任何问题.
- 当黎曼问题的熵解为非跨声速稀疏波时, 波不再以单一速度传播. 但此时相应的扩张激波与稀疏波都是守恒律的弱解, 因此, 当 CFL 条件满足时, 两者具有相同的单元平均值.
- 而且, 当黎曼问题的弱解不是跨声速稀疏波时, 不论是压缩激波还是扩张激波, 总有 (对比 p.228, (12.2))

$$\begin{cases} f(Q^{\downarrow}_{i-1/2}) = f(Q_{i-1}) & \Leftrightarrow s_{i-1/2} > 0, \\ f(Q^{\downarrow}_{i-1/2}) = f(Q_i) & \Leftrightarrow s_{i-1/2} < 0. \end{cases}$$

这与利用熵解所做的计算一致.

波与波速的全激波选择的缺陷与弥补办法 — 熵校正

- 所以，只要黎曼问题的熵解不是跨声速稀疏波，则总可以将涨落表示(或近似表示)为全激波涨落公式

$$\mathcal{A}^{+}\Delta Q_{i-1/2} = s_{i-1/2}^{+}\mathcal{W}_{i-1/2},$$

$$\mathcal{A}^{-}\Delta Q_{i-1/2} = s_{i-1/2}^{-}\mathcal{W}_{i-1/2}.$$

- 当黎曼问题的熵解为跨声速中心稀疏波时，熵解将黎曼初值分解为左、右行稀疏波. 上式与此严重不符，继续应用上式将导致非物理解. 跨声速中心稀疏波的涨落可表示为

$$\mathcal{A}^{+}\Delta Q_{i-1/2} = f(Q_i) - f(q_s),$$

$$\mathcal{A}^{-}\Delta Q_{i-1/2} = f(q_s) - f(Q_{i-1}).$$

我们称此为（对全激波涨落公式的）熵校正.

对全激波涨落公式做熵校正的必要性 —— 例

- 考虑 Burger's 方程的黎曼问题, 初值为 $u_l = -1,\ u_r = 2.$
- 熵解为一中心稀疏波 $u(x,t) = \begin{cases} -1, & x < -t, \\ x/t, & -t \le x \le 2t, \\ 2, & x > 2t. \end{cases}$
- 含扩张激波的另一弱解 $\Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & 0 < x \le t, \\ x/t, & t \le x \le 2t, \\ 2, & x > 2t. \end{cases}$

(全激波算法收敛于此解, 见图 12.2(a), p.231)

- 可见不加熵校正的全激波公式可能收敛于非物理的弱解.

全激波涨落公式+熵校正+高分辨率修正的效果

- 全激波涨落公式+熵校正的 Godunov 格式给出的数值解收敛于熵解 (见图 12.2(b)), 尽管由于在声速点附近格式数值粘性太小而导致在声速点处仍有一个 Δx 量级的扩张激波.
- 全激波涨落公式+高分辨率修正的高分辨率格式给出的数值解也收敛于熵解 (见图 12.2(c)), 但精度稍逊于全激波涨落公式+熵校正的 Godunov 格式.
- 全激波涨落公式+熵校正+高分辨率修正的高分辨率格式给出的数值解的确以更高的精度收敛于熵解 (图 12.2(d)).

注: 与通量差形式的 Godunov 格式相比, 带熵校正的全激波涨落波形式的 Godunov 格式虽然计算相对复杂, 但易于做高分辨率修正, 且易于推广应用于非线性守恒律方程组.

上例扩张激波 Godunov 格式解为何有图 12.2(a) 的结构?

由 (12.6), 采用全激波涨落公式 (见 (12.8))

$$\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2} = s_{i-1/2}^+ \mathcal{W}_{i-1/2},$$

$$\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-1/2} = s_{i-1/2}^- \mathcal{W}_{i-1/2}.$$

相当于在 Godunov 格式中取 $F_{i-1/2} = f(Q_i) - \mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2}$, 或 $F_{i-1/2} = f(Q_{i-1}) + \mathcal{A}^-\Delta Q_{i-1/2}$, 或两者的平均值

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2}[f(Q_{i-1}) + f(Q_i) - |s_{i-1/2}|(Q_i - Q_{i-1})].$$

其中 $\frac{1}{2}[f(Q_{i-1}) + f(Q_i)]$ 和 $-\frac{1}{2}|s_{i-1/2}|(Q_i - Q_{i-1})$分别是不稳定的中心通量和起稳定作用的数值粘性(扩散)通量(比较线性情形的 Roe 格式 (4.61)). 但当 $Q_{i-1} \approx -Q_i$ 时, $s_{i-1} \approx 0$, 无法提供足以使算法稳定的粘性. 而这正是上例中最终出现的情况.

Lax-Friedrichs (LxF) 方法, 局部 Lax-Friedrichs (LLF) 方法

以上分析提示, 在跨声速稀疏波情形, 可以尝试采用更简单的熵校正方法, 即在中心通量的基础上加上适当的粘性通量的方法.

- Lax-Friedrichs 方法(数值效果见图 12.3(a)):
  $F_{i-1/2} = \frac{1}{2}[f(Q_{i-1}) + f(Q_i) - a(Q_i - Q_{i-1})]$, $a \sim \Delta x/\Delta t$. 由于有了足够的粘性, 数值解的确收敛于熵解. 但结果显示格式的数值粘性偏大, 且数值解有阶梯状现象.
- 局部 Lax-Friedrichs 方法(数值效果见图 12.3(b)):
  $F_{i-1/2} = \frac{1}{2}[f(Q_{i-1}) + f(Q_i) - a_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1})]$, 其中 $a_{i-1/2} = \max\{|f'(q)| : q$ 介于 Q_{i-1} 和 Q_i 之间$\}$.
- 当 CFL 条件满足时, 总有 $|f'(q)| \leq \Delta x/\Delta t$. 可以证明 (见 §12.7) 这样的粘性足以保证数值解收敛于粘性消失解.

局部 Lax-Friedrichs (LLF) 方法的波的传播形式

由涨落波与黎曼解通量的关系 $\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2} = f(Q_i) - f(Q^{\downarrow}_{i-1/2})$, $\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-1/2} = f(Q^{\downarrow}_{i-1/2}) - f(Q_{i-1})$, 和 $F_{i-1/2} \approx f(Q^{\downarrow}_{i-1/2})$, 可令

$$\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-1/2} = \frac{1}{2}[f(Q_i) - f(Q_{i-1}) - a_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1})],$$

$$\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2} = \frac{1}{2}[f(Q_i) - f(Q_{i-1}) + a_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1})],$$

则也可以将局部 Lax-Friedrichs 方法表示为波的传播形式.

若令 $s^{\pm}_{i-1/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{f(Q_i)-f(Q_{i-1})}{(Q_i-Q_{i-1})} \pm a_{i-1/2}\right]$, $\mathcal{W}_{i-1/2} = Q_i - Q_{i-1}$, 则局部 Lax-Friedrichs 方法也可以结合高分辨率修正方法使用.

Engquist-Osher 方法

Engquist 和 Osher 引入了一种与全激波选择截然相反的做法, 即全稀疏波选择, 即使当稀疏波导致多值解的时候也仍然选稀疏波.

由于可将涨落波 $\mathcal{A}^{\pm}\Delta Q_{i-1/2}$ 分别视为向右侧和左侧传播的波的通量差 (见 (12.6)), 因此可以按以下公式计算

$$\mathcal{A}^{+}\Delta Q_{i-1/2} = \int_{Q_{i-1}}^{Q_i} (f'(q))^{+}\,dq, \quad \mathcal{A}^{-}\Delta Q_{i-1/2} = \int_{Q_{i-1}}^{Q_i} (f'(q))^{-}\,dq.$$

而相应的通量则可以表示为 (见 (12.6), 比较 (4.55))

$$\begin{aligned} F_{i-1/2} &= f(Q_{i-1}) + \int_{Q_{i-1}}^{Q_i} (f'(q))^{-}\,dq = f(Q_i) - \int_{Q_{i-1}}^{Q_i} (f'(q))^{+}\,dq \\ &= \frac{1}{2}[f(Q_{i-1}) + f(Q_i)] - \frac{1}{2}\int_{Q_{i-1}}^{Q_i} |f'(q)|\,dq. \end{aligned}$$

Engquist-Osher 方法 $(f'' > 0)$

- ⋆ 当 Q_{i-1}, $Q_i < q_s$, $F_{i-1/2} = f(Q_{i-1}) + \int_{Q_{i-1}}^{Q_i} (f'(q))^- dq = f(Q_i)$.
- ⋆ 当 Q_{i-1}, $Q_i > q_s$, $F_{i-1/2} = f(Q_i) - \int_{Q_{i-1}}^{Q_i} (f'(q))^+ dq = f(Q_{i-1})$.
- ⋆ 当 $Q_{i-1} < q_s < Q_i$, $F_{i-1/2} = f(Q_{i-1}) + \int_{Q_{i-1}}^{q_s} (f'(q))^- dq = f(q_s)$.
- ⋆ 当 $Q_{i-1} > q_s > Q_i$ (跨声速激波情形), 则有
  $F_{i-1/2} = f(Q_{i-1}) + \int_{Q_{i-1}}^{Q_i} (f'(q))^- dq = f(Q_{i-1}) + f(Q_i) - f(q_s)$.

与熵解的通量 (12.2) 比较可见, 前两种情况下, 无论熵解是激波还是稀疏波, 以上公式都给出了熵解的通量; 第三种是跨声速稀疏波情形, 以上公式也给出了熵解的通量; 但对跨声速激波情形则与熵解的通量 $(f'' > 0$ 时为 $\max\{f(Q_{i-1}), f(Q_i)\})$ 不同.

Engquist-Osher 方法

注 1:Engquist-Osher 方法定义的通量与守恒律相容. 事实上, 容易验证数值通量 $F_{i-1/2}$ 关于 (Q_{i-1}, Q_i) 是 Lipschitz 连续的, 且当 $Q_{i-1} = Q_i$ 时, $F_{i-1/2} = f(Q_{i-1}) = f(Q_i)$.

注 2: 可以证明 Engquist-Osher 方法当CFL数充分小时是TVD 的 (习题 12.3), 且收敛于满足熵条件的弱解.

注 3:Engquist-Osher 方法给出的黎曼问题数值解满足Oleinik熵条件. 只需分析跨声速激波情形. 熵解的激波(涨落波 $s_{i-\frac{1}{2}}\Delta Q_{i-\frac{1}{2}}$) 此时被分解成两个稍弱的分别向两侧传播的激波 $\int_{Q_{i-1}}^{Q_i} f'(q)dq = \int_{q_s}^{Q_i}(f'(q))^{-}dq + \int_{Q_{i-1}}^{q_s}(f'(q))^{+}dq$. 这相当于引入了一个扩散, 对熵解起到耗散磨光的作用, 而并不会改变Oleinik熵不等式.

注 4: Engquist-Osher 方法可以推广应用于方程组的黎曼问题熵解的近似计算.

E-格式

Osher 引入了以下概念 (设 $f'' > 0$)

Definition

若数值通量对所有介于 Q_{i-1} 和 Q_i 之间的 q 满足不等式

$$\operatorname{sgn}(Q_i - Q_{i-1})[F_{i-1/2} - f(q)] \le 0,$$

则称相应的有限体积格式为 E-格式.

$$F^G_{i-1/2} = \begin{cases} \min\limits_{Q_{i-1}\le q\le Q_i} f(q), & Q_{i-1} \le Q_i; \\ \max\limits_{Q_i\le q\le Q_{i-1}} f(q), & Q_{i-1} > Q_i. \end{cases}$$

显然满足不等式 (见 (12.4)).

E-格式 $\Leftrightarrow$ $F_{i-1/2} \le F^G_{i-1/2},\ Q_{i-1} \le Q_i;$ &

$F_{i-1/2} \ge F^G_{i-1/2},\ Q_{i-1} \ge Q_i.$

E-格式

- Godunov 格式, LxF 格式, LLF 格式, E-O 格式都是 E-格式.
- 当 Courant 数充分小时, E-格式是 TVD 的(习题 12.3).
- Osher 证明了 E-格式收敛于熵解, 但收敛阶最多是一阶的.

注: 鉴于一阶格式在实际问题中直接使用的意义不大, 而高阶格式又往往在解的间断附近产生振荡, 类似于线性情形, 我们需要在一阶格式的基础上发展非线性守恒律方程式的高分辨率格式.

一阶格式+高分辨率修正项 $\Rightarrow$ 高分辨率格式

与第六章 (见 (6.59), (6.60)) 和第九章 (见 (9.18), (9.19)) 类似地, 我们可以将本章中介绍的几个一阶格式改造成高分辨率格式

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2} + \mathcal{A}^-\Delta Q_{i+1/2}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{F}_{i+1/2} - \tilde{F}_{i-1/2}),$$

$$\tilde{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2}|s_{i-1/2}|\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|s_{i-1/2}|\right)\tilde{W}_{i-1/2},$$

其中 $\tilde{W}_{i-1/2}$ 是 $W_{i-1/2}$ 的某种限制形式.

注 1: 可以证明, 如果使用 TVD 限制器 (见§6.12), 则所得到的格式是 TVD 的.

注 2: 对于方程式可以证明, TVD 格式是稳定的, 收敛的.

使用TVD 限制器得到的格式是 TVD 的 (证明思路)

我们在以下特殊条件下证明这一结论. 即设 Q_i^n 关于 i 单调减, 且在所涉及区域 $f'(q) > 0$. 另外, 设 $\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |f'(q)| < \frac{1}{2}$.

- 首先对 Q^n 做 TVD (因此单调减) 的分片线性重构 $\tilde{q}(x, t_n)$ （注意，限制器在且仅在这里发挥作用）.
- 对通量 $f(\cdot)$ 做分片线性插值得 $\hat{f}(\cdot)$ (见图 12.4(a)).
- 在发展步(用特征线法+等面积发则) 解通量 $\hat{f}(\cdot)$ 的守恒律方程 (见图12.4(b)). 其结果是守恒律的熵解, 因此是 TVD 的.
- 在$x_{i-1/2}$附近, 通量$\hat{f}(\cdot)$是线性的, 斜率$s_{i-1/2} = \frac{f(Q_i^n)-f(Q_{i-1}^n)}{Q_i^n-Q_{i-1}^n}$ 恰为高分辨率修正项（12.22）在该点的波速(对比守恒律方程分片常数离散后各单元的方程式 $q_t + s_{i-1/2} q_x = 0$).

使用TVD 限制器得到的格式是 TVD 的(证明思路)

- 从斜率限制器的角度理解带高分辨率修正项（12.22）的格式（12.21），则发展步给出的数值解在 $x_{i-1/2}$ 处的数值通量恰为以通量 $\hat{f}(\cdot)$ 的守恒律方程在一个时间步中的真解在 $x_{i-1/2}$ 处的通量。

- 因此，带高分辨率修正项（12.22）的格式（12.21）在发展步给出的数值解做单元平均得到的恰为以通量 $\hat{f}(\cdot)$ 的守恒律方程的真解在新时间步的单元平均值. 因此格式是 TVD 的.

- 其它情况下格式的 TVD 性也可由类似的分析得到.

采用守恒型格式的重要性

考虑 Berger's 方程 $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0$. 设 u 恒正.

则守恒型迎风格式为

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{1}{2}(U_i^n)^2 - \frac{1}{2}(U_{i-1}^n)^2\right) = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{U_{i-1}^n + U_i^n}{2}(U_i^n - U_{i-1}^n).$$

而基于拟线性方程 $u_t + uu_x = 0$ 的迎风格式为

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}U_i^n(U_i^n - U_{i-1}^n).$$

或等价的 $U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{U_{i-1}^n + U_i^n}{2}(U_i^n - U_{i-1}^n) - \frac{\Delta t \Delta x}{2}(\frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x})^2$.
其中最后一项$\frac{1}{2}\nu(U_i^n - U_{i-1}^n)^2$当 $\Delta t, \Delta x \to 0$ 时在解间断处一般并不趋于零. 这可以视为后者比前者多了一个负的奇性的源项, 因此会造成激波速度减慢 (见§17.12). 两者对初值为 $u_l = 2$, $u_r = 1$ 的黎曼问题的数值结果 ($t = 2$) 见图 12.5.

Lax-Wendroff 定理

设给定了一族网格 $\Delta t^{(j)}, \Delta x^{(j)}, j = 1, 2, \cdots$, 当 $j \to \infty$ 时, $\Delta t^{(j)} \to 0$, $\Delta x^{(j)} \to 0$. 设数值通量 $F_{i-1/2}^{(j)n} = \mathcal{F}(Q_{i-1}^{(j)n}, Q_i^{(j)n})$ 与 $f(q)$ 相容. 设 $Q^{(j)n}$ 为数值解. 定义 $Q^{(j)}(x,t) = Q_i^{(j)n}$, $\forall (x,t) \in \Omega_i^{(j)n} = (x_{i-1/2}^{(j)}, x_{i+1/2}^{(j)}) \times [t_n^{(j)}, t_{n+1}^{(j)})$. 称 $Q^{(j)}(x,t)$ 是 TV 稳定的, 若对任取的 $T > 0$, 存在 $R > 0$, 使得

$$TV(Q^{(j)}(\cdot,t)) < R, \quad \forall t \in [0,T], \quad j = 1, 2, \cdots .$$

我们有以下 Lax-Wendroff 定理:

Theorem

设有相容数值通量的守恒型格式的数值解序列 $Q^{(j)}$ 是 TV 稳定的. 若存在局部可积函数 $q(x,t)$, 使得对 $\forall \Omega = [a,b] \times [0,T]$, 有

$$\lim_{j\to\infty} \|Q^{(j)} - q\|_{1,\Omega} = 0.$$

则 $q(x,t)$ 是守恒律方程的一个弱解.

Lax-Wendroff 定理的证明

1. 我们要证明 $q(x,t)$, 对 $\forall \phi \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$, 满足
$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi_t q + \phi_x f(q)]dxdt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,0)q(x,0)dx.$$
2. 令 $\Phi_i^{(j)n} = \phi(x_i^{(j)}, t_n^{(j)})$, 定义 $\Phi^{(j)}$ (与 $Q^{(j)}$ 类似). 由格式有
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\Phi_i^{(j)n}(Q_i^{(j)(n+1)}-Q_i^{(j)n}) = -\frac{\Delta t^{(j)}}{\Delta x^{(j)}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\Phi_i^{(j)n}(F_{i+1/2}^{(j)n}-F_{i-1/2}^{(j)n}).$$
3. 省略上标 j, 由 ϕ 具有紧支集, 并利用分部求和格式 $\sum_{i=1}^m a_i(b_i-b_{i-1}) = a_m b_m - a_1 b_0 - \sum_{i=1}^{m-1}(a_{i+1}-a_i)b_i$, 得
$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Phi_i^n-\Phi_i^{n-1}}{\Delta t}\right)Q_i^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Phi_{i+1}^n-\Phi_i^n}{\Delta x}\right)F_{i-1/2}^n\right]\Delta x\Delta t$$
$$= -\Delta x\sum_{i=-\infty}^{\infty}\Phi_i^0 Q_i^0.$$

Lax-Wendroff 定理的证明 (续)

4. 由 $\phi \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ 知 $\Phi^{(j)} \rightrightarrows \phi(x,t)$, 又 $Q^{(j)}$ 有界且 $\mathbb{L}^1_{loc}$ 收敛于 $q(x,t)$, 得

$$\lim_{j\to\infty} -\Delta x \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Phi_i^0 Q_i^0 = -\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,0)q(x,0)dx.$$

5. 由 $\left(\frac{\Phi_i^n-\Phi_i^{n-1}}{\Delta t}\right)Q_i^n\Delta x\Delta t = \int_{\Omega_{ni}} \phi_t(x_i,t)Q_i^n dtdx$, $Q^{(j)}$ 有界且 $\mathbb{L}^1_{loc}$ 收敛于 $q(x,t)$, $\phi_t(x_i,t) \rightrightarrows \phi_t(x,t)$, 得

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Phi_i^n-\Phi_i^{n-1}}{\Delta t}\right)Q_i^n\Delta x\Delta t = \int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_t q dxdt.$$

Lax-Wendroff 定理的证明 (续)

6. $\left(\frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{\Delta x}\right) F_{i-1/2}^n \Delta x \Delta t = \int_{\Omega_{ni}} \phi_x(\xi_{ni}, t_{ni}) \mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n) dxdt.$
7. 由数值通量的相容性有

$$|\mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n) - f(q)| \le L(|Q_{i-1}^n - q| + |Q_i^n - q|) \le L(2|Q_i^n - q| + |Q_i^n - Q_{i-1}^n|).$$

8. 由 $Q^{(j)}$ 有一致的有界变差, 有

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} L|\phi_x(\xi_{ni}, t_{ni})||Q_i^n - Q_{i-1}^n|\Delta x \le L \max_{(x,t)} |\phi_x| TV(Q(\cdot, t))\Delta x.$$

9. 因此, 由 $Q^{(j)}$ 有界且 $\mathbb{L}_{loc}^1$ 收敛于$q(x,t)$, $\phi_x(x_i, t)$ 有紧支集, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_{ni}} \phi_x(\xi_{ni}, t_{ni}) |\mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n) - f(q)| dxdt \to 0.$$

Lax-Wendroff 定理的证明 (续)

10. 由 $Q^{(j)}$ 有界且 $\mathbb{L}^1_{loc}$ 收敛于 $q(x,t)$, $\phi_x(\xi_{ni}, t_{ni}) \rightrightarrows \phi_x(x,t)$, 结合 (6)-(9), 得

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n}{\Delta x} \right) F_{i-1/2}^n \Delta x \Delta t = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x f(q) dx dt.$$

11. 由 (4), (5) 和 (10), 即得 (1). ■

注: Lax-Wendroff 定理只说明数值解在一定意义下的极限是弱解, 但并没有说明数值解在什么条件下会有极限.

用熵函数与离散熵通量表示的离散熵条件

Definition

设 $(\eta(q), \psi(q))$ 是守恒律方程 $q_t + f(q)_x = 0$ 的凸熵对 (§11.14), 称 $\Psi^n_{i-1/2} = \Psi(Q^n_{i-1}, Q^n_i)$ 是与 $\psi(q)$ 相容的数值熵通量, 如果

1. $\Psi(q, q) = \psi(q), \quad \forall q;$
2. 存在常数$L > 0$, s.t. 对任意的 Q^n_{i-1}, Q^n_i 和 q 都有$|\Psi(Q^n_{i-1}, Q^n_i) - \psi(q)| \le L(|Q^n_{i-1} - q| + |Q^n_i - q|)$.

Definition

设 $(\eta(q), \psi(q))$ 是守恒律方程 $q_t + f(q)_x = 0$ 的凸熵对, $\Psi^n_{i-1/2} = \Psi(Q^n_{i-1}, Q^n_i)$ 是与 $\psi(q)$ 相容的数值熵通量, 称有相容数值通量的守恒型格式的数值解 Q 满足离散熵条件, 如果

$$\eta(Q^{n+1}_i) \le \eta(Q^n_i) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\Psi^n_{i+1/2} - \Psi^n_{i-1/2}), \quad \forall n, i.$$

离散熵条件 —— 加 Lax-Wendroff 定理条件 $\Rightarrow$ 熵解

设 $(\eta(q), \psi(q))$ 是守恒律方程 $q_t + f(q)_x = 0$ 的凸熵对 (§11.14), 设 $\Psi^n_{i-1/2} = \Psi(Q^n_{i-1}, Q^n_i)$ 是与 $\psi(q)$ 相容的数值熵通量. 则有

Theorem

设有相容数值通量的守恒型格式的数值解序列 $Q^{(j)}$ 是 TV 稳定的, 且满足离散熵条件

$$\eta(Q_i^{n+1}) \le \eta(Q_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\Psi^n_{i+1/2} - \Psi^n_{i-1/2}).$$

若存在局部可积函数 $q(x,t)$, 使得对 $\forall \Omega = [a,b] \times [0,T]$, 有

$$\lim_{j\to\infty} \|Q^{(j)} - q\|_{1,\Omega} = 0.$$

则 $q(x,t)$ 是守恒律方程的熵解.

注: 定理的证明与Lax-Wendroff 定理的证明类似, 只需将 Q 换为 $\eta(Q)$, F 换为 Ψ, 同时注意 $\phi \ge 0$ 的条件. 证明细节留作习题.

熵相容性格式 —— Godunov 格式具有熵相容性

Definition

称一个守恒律的相容的守恒型数值格式具有熵相容性, 如果: 当用于定义其数值通量的每个黎曼子问题的(近似)解均满足熵条件时, 相应的数值解就满足离散熵条件.

Godunov 格式具有熵相容性:

1. 设 $\tilde{q}^n(x,t)$ 在 $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (t_n, t_{n+1})$ 上满足熵条件

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \eta(\tilde{q}^n(x,t_{n+1}))dx \le \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \eta(\tilde{q}^n(x,t_n))dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\psi(\tilde{q}^n(x_{i+1/2},t)) - \psi(\tilde{q}^n(x_{i-1/2},t)))dt.$$

Godunov 格式具有熵相容性

2. 由 $\eta'' > 0$, $Q_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{q}^n(x, t_{n+1})dx$ 和 Jensen 不等式得 $\eta(Q_i^{n+1}) \le \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \eta(\tilde{q}^n(x, t_{n+1}))dx$.
3. 又 $\tilde{q}^n(x, t_n) = Q^n$, $\tilde{q}^n(x_{i-1/2}, t) = q^{\downarrow}(Q_{i-1}^n, Q_i^n) =: Q_{i-1/2}^{\downarrow}$.
4. 若定义数值熵通量 $\Psi_{i-1/2}^n = \psi(Q_{i-1/2}^{\downarrow})$, 则由 (1)-(3) 得

$$\eta(Q_i^{n+1}) \le \eta(Q_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\Psi_{i+1/2}^n - \Psi_{i-1/2}^n).$$

易证 Ψ 是与 ψ 相容的数值通量, 因此 Godunov 格式产生的数值解满足离散熵不等式.

注: 以上分析表明 Godunov 格式产生的数值解在一定意义下的极限是熵解, 但我们还不知道数值解是否在该意义下有极限.

单调格式及其非线性稳定性和收敛性

非线性问题数值方法的稳定性和收敛性一般来说是一个十分困难的问题. 一个特例是压缩算子 (见§8.3.1). 单调格式等一些数值格式可利用压缩算子的方法证明非线性稳定性和收敛性.

Definition

数值格式 $Q_j^{n+1} = \mathcal{N}(Q^n; j) = \mathcal{N}(Q_{j-p}^n, \cdots, Q_{j+r}^n)$ 称为是单调格式, 如果 $\frac{\partial}{\partial Q_i^n}\mathcal{N}(Q^n; j) \geq 0,\ \forall i, j, Q^n$.

Theorem

守恒型的单调格式是 $\mathbb{L}^1$-压缩的.

注 1: 守恒型的单调格式是 $\mathbb{L}^1$-稳定的和收敛的.

注 2: Godunov 格式是单调格式 (习题), 因此是 $\mathbb{L}^1$-稳定和收敛的.

注 3: 单调格式都是一阶的, 其分析方法不适用于高分辨率格式.

守恒型单调格式 $\mathbb{L}^1$-压缩性的证明

1. 设 $U_j^{n+1}=\mathcal{N}(U^n;j)$, $V_j^{n+1}=\mathcal{N}(V^n;j)$. 记 $W^n=\max\{U^n,V^n\}$.
2. 由单调性和 $U_j^{n+1}=\mathcal{N}(U^n;j)$ 有
$$U_j^{n+1}\le\mathcal{N}((U\vee V)^n;j),\quad U_j^{n+1}\ge\mathcal{N}((U\wedge V)^n;j),$$
其中 $(U\vee V)_i^n=\max\{U_i^n,V_i^n\}$, $(U\wedge V)_i^n=\min\{U_i^n,V_i^n\}$.
3. 同理, V_j^{n+1} 也满足以上不等式. 因此有
$$\begin{aligned}\sum_j|U_j^{n+1}-V_j^{n+1}|&=\sum_j[(U\vee V)_j^{n+1}-(U\wedge V)_j^{n+1}]\\&\le\sum_j[\mathcal{N}((U\vee V)^n;j)-\mathcal{N}((U\wedge V)^n;j)].\end{aligned}$$

守恒型单调格式 $\mathbb{L}^1$-压缩性的证明 (续)

4. 令 $W_j^{n,k} = \begin{cases} (U \vee V)_j^n, & j \geq k, \\ (U \wedge V)_j^n, & j < k. \end{cases}$ 则有

$$(W_j^{n,k} - W_j^{n,k+1}) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ |U_k^n - V_k^n|, & j = k; \end{cases}$$ 以及

$$\sum_k (\mathcal{N}(W^{n,k};j) - \mathcal{N}(W^{n,k+1};j)) = \mathcal{N}((U \vee V)^n;j) - \mathcal{N}((U \wedge V)^n;j)$$

得

$$\sum_j |U_j^{n+1} - V_j^{n+1}| \leq \sum_k \sum_j (\mathcal{N}(W^{n,k};j) - \mathcal{N}(W^{n,k+1};j)).$$

守恒型单调格式 $\mathbb{L}^1$-压缩性的证明 (续)

5. 由 $W^{n,k}$ 的定义和格式的守恒性知
$$\sum_j (\mathcal{N}(W^{n,k};j) - \mathcal{N}(W^{n,k+1};j)) = (W_k^{n,k} - W_k^{n,k+1}) = |U_k^n - V_k^n|.$$

6. 因此得 $h\sum_j |U_j^{n+1} - V_j^{n+1}| \leq h\sum_j |U_j^n - V_j^n|.$ ■

守恒律方程初值问题弱解不唯一时格式收敛性的涵义

对给定的网格, 定义 $Q^{(\Delta t)}(x,t) = Q_i^n$, $\forall (x,t) \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times [t_n, t_{n+1})$. 记 $\mathcal{W} = \{q:\ q(x,t)$ 是守恒律方程初值问题弱解$\}$.

数值解的整体误差定义为

$$\mathrm{dist}(Q^{(\Delta t)}, \mathcal{W}) = \inf_{q\in\mathcal{W}} \|Q^{(\Delta t)} - q\|_{1,T} = \inf_{q\in\mathcal{W}} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |Q^{(\Delta t)} - q|\, dx dt.$$

数值方法在一定的加密路径条件下的收敛性是指

$$\lim_{\Delta t\to 0} \mathrm{dist}(Q^{(\Delta t)}, \mathcal{W}) = 0.$$

我们希望证明相容的守恒型格式在一定稳定性条件下有收敛性.

准紧性 (precompactness) 和紧性 (compactness)

Definition

在赋范空间中的集合 $\mathcal{K}$ 称为是准紧集, 如果 $\mathcal{K}$ 中的任一无穷序列存在收敛的子序列收敛于该赋范空间中某点.

Definition

在赋范空间中的集合 $\mathcal{K}$ 称为是紧集, 如果 $\mathcal{K}$ 中的任一无穷序列存在收敛于 $\mathcal{K}$ 中某点的子序列.

- 紧集一定是准紧集. 反之不然.
- $(0,1) \subset \mathbb{R}$ 准紧但不紧. $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin (0,1)$.
- $[0,\infty) \subset \mathbb{R}$ 不是准紧集.
- $\mathbb{R}^n$ 中的有界集合是准紧集. $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集是紧集.

函数空间的紧性

研究双曲守恒律时，常用函数空间 $\mathbb{L}_{1,T} = \{v : \|v\|_{1,T} < \infty\}$.

- $\mathbb{L}_1 = \{v : \|v\|_1 < \infty\}$ 中的有界闭集一般不是紧集. 例如

$$v_j(x) = \begin{cases} 1, & j < x < j+1, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

  则 $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset B_1 = \{v : \|v\|_1 \le 1\}$ 没有收敛子列.

- $\mathbb{L}_1$ 中有紧支集的函数的有界闭集一般不是准紧集. 例如

$$v_j(x) = \begin{cases} \sin(j\pi x), & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$
  不存在在 $\mathbb{L}_1$ 中收敛的子列.

注: 将后例中的 $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ 视为 $\mathbb{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$ 上的有界线性泛函序列, 则有 $v_j \xrightarrow{*} 0$, 即 $*$-弱收敛于零.

问题: 如何刻画 $\mathbb{L}_{1,T}$ 中的 (准) 紧集?

$\mathbb{L}_1$ 中有共同紧支集且总变差一致有界的集合是紧集

1. 任一有紧支集 $[-M, M]$ 的有界变差函数 $v(x)$ 可表示为 $v(x) = v^+(x) - v^-(x)$, 其中 $v^+(x) = \int_{-\infty}^{x} (v'(s))^+ ds$, $v^-(x) = v^+(x) - v(x)$ 为非负单调增函数, 且满足
$$v^+(-M) = v^-(-M) = 0, \quad v^+(M) = v^-(M) = TV(v)/2.$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|\, dx \le \int_{-M}^{M} \max\{v^+(x), v^-(x)\}\, dx \le M \cdot TV(v).$$
2. 有界区间上的一致有界非负单调函数集合在 $\mathbb{L}_1$ 中是紧集.
3. $\mathbb{L}_1$ 中有共同紧支集且总变差一致有界的集合是紧集. 即集合 $\{v \in \mathbb{L}_1 : TV(v) \le R,\ \mathrm{supp}(v) \subset [-M, M]\}$ 是 $\mathbb{L}_1$ 中的紧集.

$\mathbb{L}_{1,T}$ 中有共同紧支集且总变差一致有界的集合是紧集

我们定义 $q(x,t)$ 在区域 $\mathbb{R} \times [0,T]$ 上的总变差为

$$\begin{aligned} TV_T(q) = & \overline{\lim}_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |q(x+\epsilon, t) - q(x,t)| \, dxdt \\ & + \overline{\lim}_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |q(x, t+\epsilon) - q(x,t)| \, dxdt. \end{aligned}$$

$\mathbb{L}_{1,T}$ 中有共同紧支集且总变差一致有界的集合是紧集, 即

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(R,M) = \{ q \in \mathbb{L}_{1,T} : \; & TV_T(q) \le R, \\ & \operatorname{supp}(q(\cdot,t)) \subset [-M,M], \forall t \in [0,T] \} \end{aligned}$$

是 $\mathbb{L}_{1,T}$ 中的紧集.

网格函数的总变差和数值方法的 TV 稳定性

按定义, 均匀网格上定义的函数 $Q^{(\Delta t)}(x,t)$ 的总变差为

$$\begin{aligned} TV_T(Q^{(\Delta t)}) &= \sum_{n=0}^{T/\Delta t} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\Delta t |Q_{j+1}^n - Q_j^n| + \Delta x |Q_j^{n+1} - Q_j^n|] \\ &= \sum_{n=0}^{T/\Delta t} [\Delta t TV(Q^n) + \|Q^{n+1} - Q^n\|_1]. \end{aligned}$$

Definition

称一个数值方法是 TV-稳定的, 如果对任意给定的凸通量函数 $f(q)$, 具有紧支集且 TV 有界的初值 q^0, 和 $T > 0$, 存在 $\Delta t_0 > 0$, $R > 0$ 和 $M > 0$, 使得, 当 $\Delta t < \Delta t_0$ 时, 由该方法产生的数值解都满足 $Q^{(\Delta t)} \in \mathcal{K}(R, M)$.

相容的守恒型格式的 TV-稳定性

对相容的守恒型格式, 以下定理给出了其 TV-稳定性的更易于验证的条件.

Theorem

设具有局部 Lipschitz 连续数值通量 $F^n_{i-1/2}$ 的守恒型格式满足: 对任一有紧支集 TV 有界的初值 q^0, 和 $T>0$, $\exists \Delta t_0>0$, $R>0$, s.t.

$$TV(Q^n)\le R,\quad \forall \Delta t<\Delta t_0,\ n\Delta t\le T.$$

则其必为 TV-稳定的.

证明: 由初值具有紧支集和数值解传播速度有限知 $\{Q^{(\Delta t)}\}_{t\le T}$ 具有紧支集. 由 $TV(Q^{(\Delta t)})$ 的表达式 (12.52), 只需证明 $\exists \alpha>0$, s.t. $\|Q^{n+1}-Q^n\|_1\le \alpha\Delta t,\quad \forall \Delta t<\Delta t_0,\ n\Delta t\le T$, 就有

$$TV_T(Q^{(\Delta t)})=\sum_{n=0}^{T/\Delta t}[\Delta t TV(Q^n)+\|Q^{n+1}-Q^n\|_1]\le (R+\alpha)T.$$

相容的守恒型格式的 TV-稳定性 —— 证明(续)

另一方面, 由 $Q^{(\Delta t)}$ 具有紧支集和 $TV(Q^n) \le R$ 知 $|Q_i^n| \le R/2$. 因而由守恒型格式 $Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n)$ 及其数值通量 $F_{i-1/2}^n = \mathcal{F}(Q_{i-p}^n, \cdots, Q_{i+r}^n)$ 具有局部 Lipschitz 连续性知 $|Q_i^{n+1} - Q_i^n| = \frac{\Delta t}{\Delta x}|F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n| \le \frac{\Delta t}{\Delta x} K \sum_{j=-p}^{r} |Q_{i+j+1}^n - Q_{i+j}^n|$.

所以

$$\|Q^{n+1} - Q^n\|_1 = \Delta t \sum_{i=-\infty}^{\infty} |F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n|$$

$$\le \Delta t K \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-p}^{r} |Q_{i+j+1}^n - Q_{i+j}^n| = \Delta t K \sum_{j=-p}^{r} TV(Q^n).$$

取 $\alpha = K(p+r+1)$, 即得 $\|Q^{n+1} - Q^n\|_1 \le \alpha \Delta t$. $\blacksquare$

相容的 TV-稳定的守恒型格式是收敛的

Theorem

设初值 q^0 有紧支集且 TV 有界. 设 $Q^{(\Delta t)}$ 是由具有局部 *Lipschitz* 连续数值通量 $F^n_{i-1/2}$ 的与某守恒律方程式相容的 *TV*-稳定的守恒型格式产生的数值解序列. 设 $\mathcal{W}$ 是该守恒律方程式相应初值问题的弱解集. 则

$$\lim_{\Delta t \to 0} dist(Q^{(\Delta t)}, \mathcal{W}) = 0.$$

即格式是收敛的.

证明: 反证法. 设 $\exists \epsilon > 0$, $\lim_{j\to\infty} \Delta t_j = 0$, s.t. $\mathrm{dist}(Q^{(\Delta t)}, \mathcal{W}) > \epsilon$.
由 TV-稳定性知 $\exists\, R,\ M > 0$, s.t. $Q^{(\Delta t_j)} \in \mathcal{K}(R, M)$, $\forall j$.
由 $\mathcal{K}(R, M)$ 紧, 不妨设存在 $v \in L_1$ s.t. $\lim_{j\to\infty} \|Q^{(\Delta t_j)} - v\|_{1,T} = 0$.
因而由 Lax-Wendroff 定理, $v \in \mathcal{W}$. 这与 $\mathrm{dist}(Q^{(\Delta t)}, \mathcal{W}) > \epsilon$ 矛盾

初值的紧支集假设可改为初值在紧支集外为 q_l 和 q_r

注 1: $\{v \in \mathbb{L}_1 : TV(v) \le R,\ v(x) = v_l,\ x < -M; v(x) = v_r,\ x > M\}$, $\{q \in \mathbb{L}_{1,T} : TV_T(q) \le R, q(x,t) = q_l,\ x < -M; q(x,t) = q_r,\ x > M; \forall t \in [0,T]\}$ 分别是 $\mathbb{L}_1$ 和 $\mathbb{L}_{1,T}$ 中的紧集.

注 2: 以上收敛性定理可推广至初值在紧支集外为 q_l 和 q_r 的情形.

注 3: 在应用中, 只需验证数值方法具有紧支集 TV-稳定性即可.

注 4: 不同序列可能收敛到不同弱解. 但只要 Δt 充分小, 则数值解总与某个弱解很近. 特别地, 当方法还满足离散熵条件时, $Q^{(\Delta t)}$ 收敛于熵解.

注 5: 由于非线性方程组的解一般不是 TV 有界的, 所以以上方法一般不能用于证明非线性方程组情形数值方法的收敛性.

注 6: 对于高维非线性方程式, 可以证明 TVD 方法一般只是一阶的.

注 7: 对于非线性方程式, 有其它不用 TV-稳定性的收敛性分析方法.

作业: 12.1，12.2，12.3.

Thank You!