Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

非线性车流问题

简化假设:

1. 车流密度 $q(x,t)$ (车辆数/一辆车的长度), $0 \leq q(x,t) \leq 1$;
2. 单车道, 车速 $u = U(q)$ 仅依赖于车流密度;
3. 因而车流量为 $f(q) = U(q)q$ (通过车辆数/单位时间);
4. 由此推得 $q(x,t)$ 满足的守恒律方程: $q_t + (U(q)q)_x = 0$.

注1: 对线性车流问题 $u = u(x)$, 质点运动轨迹与特征线重合, 而非线性时则不然. 当车的行驶速度依赖于车流密度时, 则给出更符合实际的非线性车流模型.

注2: 在本章, 我们考虑非线性守恒律方程式 $q_t + f(q)_x = 0$, 其中 $f(q)$ 是 q 的非线性函数, 即 $f''(q) \neq 0$. 进一步假定 $f''(q)$ 不变号, 即恒正或者恒负. 此时统称 $f(q)$ 为凸通量(当结论与凸凹无关时).

非线性车流问题的例

- 取 $U(q) = u_{\max}(1-q)$, $0 \le q \le 1$, 最高车速为 $u_{\max}$.
- $f(q) = u_{\max}q(1-q)$, $f'(q) = u_{\max}(1-2q)$.
- $f''(q) = -2u_{\max} < 0$.
- 第 k 辆车的车速 $X_k'(t) = U(q(X_k(t),t)) = U((X_{k+1}(t) - X_k(t))^{-1})$.
- 特征线方程 $X'(t) = f'(q(X(t),t)) < U(q(X(t),t))$.
- 由前两条可见, 当且仅当 $f(q)$ 为线性时, 轨迹是特征线.
- 由守恒律, 沿特征线, q 为常数, 因此, 特征线是直线.
- 而每辆车在行驶过程中会穿越特征线($f'(q) < U(q)$), 车速也会因此而不断变化.

非线性车流问题的例 —— 中间较密两端逐渐变稀的光滑初始分布

- 设车流密度初始分布为中间较密，往两端逐渐变稀趋于常值.
- 则从远处驶来的车辆会首先由于前面的车流密度越来越大而逐渐减速($U(q) = u_{\max}(1-q) > u_{\max}(1-2q) = f'(q)$).
- 对于我们目前的模型问题，一段时间后会产生激波. 激波前后的密度和车速会有跳跃间断.
- 车辆穿过激波后，由于前面的车流密度逐渐变小，车速逐渐增加，从而形成稀疏波.
- 解的示意图见图 11.1 （p. 205）.

非线性车流的例 —— 初始时 $x<0,\ q=q_0<\frac{1}{2},\ x>0,\ q=q_1>\frac{1}{2}$

- 车流密度初始分布: $x<0,\ q=q_0<\frac{1}{2};\ x>0\ q=q_1>\frac{1}{2}$.
- 后端的特征速度 $f'(q_0)=u_{\max}(1-2q_0)>0$, 前端的特征速度 $f'(q_1)=u_{\max}(1-2q_1)<0$.
- 形成速度为 $s=\dfrac{f(q_1)-f(q_0)}{q_1-q_0}=1-(q_0+q_1)$ 的激波解.
- 车辆穿过激波后, 前面的车流密度陡然增加, 车速迅即减小.
- $q_0+q_1>1$ 时, 高密度起始点后移, 路况恶化; 反之则改善.
- 解的示意图见图 11.2 （p. 206）.

非线性车流的例 —— 初始时 $x<0,\ q=q_0>\frac{1}{2},\ x>0,\ q=q_1<\frac{1}{2}$

- 车流密度初始分布: $x<0,\ q=q_0>\frac{1}{2};\ x>0\ q=q_1<\frac{1}{2}$.
- 后端的特征速度 $f'(q_0)=u_{\max}(1-2q_0)<0$, 前端的特征速度 $f'(q_1)=u_{\max}(1-2q_1)>0$.
- 由于黎曼问题的解沿过零点的射线为常数, 因此在锥形区域 $f'(q_0)<x/t<f'(q_1)$ 上解可表示为 $q(x,t)=\tilde{q}(x/t)=\tilde{q}(\xi)$.
- 由特征线方程 $X'(t)=f'(\tilde{q}(\xi))$, 沿特征线有 $x=f'(\tilde{q}(\xi))t$.
- 由此得中心稀疏波解 $\tilde{q}(\xi)=(f')^{-1}(\xi)$ $(\because f$ 凸, $\therefore f'$ 可逆). 对我们的例有 $\tilde{q}(\xi)=\frac{1}{2}(1-\frac{\xi}{u_{\max}})$, 即 $q(x,t)=\frac{1}{2}(1-\frac{x}{u_{\max}t})$.
- 解的示意图见图 11.3 （p. 207）.

拟线性形式的非线性守恒律方程式的特征线为直线

- 拟线性形式的非线性守恒律方程式: $q_t + f'(q)q_x = 0$.
- 特征线方程: $X'(t) = f'(q(X(t), t))$.
- 解沿特征线满足 $\frac{d}{dt}q(X(t), t) = q_t + q_x X'(t) = 0$, 即解沿特征线为常数. 因此特征线是直线, 且解可表示为 $q(X(t), t) = q(X(0), 0) \triangleq \tilde{q}(X(0))$, 其中 $\tilde{q}(\xi)$ 为初始密度分布函数.
- 设过 (x, t) 点的特征线交 x-轴于 ξ, 则相应的特征线方程为 $x = \xi + f'(q(x, t))t = \xi + f'(q(\xi, 0))t = \xi + f'(\tilde{q}(\xi))t$.
- 在特征线互不相交的时段 $(0 \le t \le T)$ 内这给出了 ξ 作为自变量 (x, t) 的隐函数关系 $x = \xi + f'(\tilde{q}(\xi))t$.

拟线性形式的非线性守恒律方程式的特征线为直线

- 由隐函数定理, 若 $1+f''(\tilde{q}(\xi))\tilde{q}_\xi(\xi)t \neq 0$, 则 ξ 局部唯一可解.
- 令 $t_b = \frac{-1}{\min_\xi[f''(\tilde{q}(\xi))\tilde{q}_\xi(\xi)]}$, 则当 $t_b < 0$, $0 < t < \infty$, 或$t_b > 0$, $0 < t < t_b$ 时, 从 x-轴出发的特征线都互不相交.
- 因此当以上条件成立时,隐函数方程有唯一解 $\xi(x,t)$.
- 而当 $t > t_b > 0$ 时, 从 x-轴出发的特征线必然会产生相交现象. 此时解不再光滑 (见习题 11.1), 而是会出现激波.
- 特别地, 当 $f'' > 0$ 时, 若初始分布满足 $\tilde{q}_\xi \geq 0$, 则解光滑.
- 当 $f'' < 0$ 时, 若初始分布满足 $\tilde{q}_\xi \leq 0$, 则解光滑.
- 反之, 当 $f'' > 0$ 时, 若初始分布满足 $\tilde{q}_\xi < 0$, 有激波产生.
- 当 $f'' < 0$ 时, 若初始分布满足 $\tilde{q}_\xi > 0$, 有激波产生.

无粘 Burger's 方程

- 无粘 Burger's 方程: $u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0$. 简称 Burger's 方程.
- 拟线性形式的 Burger's 方程: $u_t + uu_x = 0$.
- 原始的带粘性项的 Burger's 方程: $u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = \epsilon u_{xx}$.
- 无粘 Burger's 方程（包括拟线性形式的）作为最简单的非线性守恒律方程在算法研究中占有重要的地位.
- 比较流体力学中的动量守恒方程 $(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0$, 可见无粘 Burger's 方程具有与其相似的非线性性.
- 同样, 带粘性项的 Burger's 方程与粘性流体的动量守恒方程也具有相似的非线性性.

车流问题的稀疏波解

以车流问题 $q_t + (u_{\max}(1-q)q)_x = 0$ 为例.

- 设初始车流密度分布满足 $q_x(x,0) < 0$, 即密度单调减.
- 于是特征线斜率 $X'(0) = u_{\max}(1-2q(x,0))$ 单调增.
- 特征线族为逐渐散开的直线族. 该现象称为稀疏化, 解的相应部分称为稀疏波 (见图 11.4(a), 11.5(a)(b) 波峰前).
- 由于车辆在行驶过程中会穿越特征线($f'(q) < U(q)$), 因此车辆在行驶过程中车速 $U(q) = u_{\max}(1-q)$ 单调增.
- 对给定的满足 $q_x(x,0) < 0$ 的光滑初始分布, 可以通过特征线法求得光滑稀疏波解 (见图 11.4(a), p. 209).
- 对 $q_l > q_r$ 的黎曼问题初始分布, 可以求得中心稀疏波解 $\tilde{q}(x/t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2u_{\max}} x/t$ (见图 11.3(b), p. 207).

车流问题的压缩波解

- 设初始车流密度分布满足 $q_x(x,0) > 0$, 即密度单调增.
- 于是特征线斜率 $X'(0) = u_{\max}(1 - 2q(x,0))$ 单调减.
- 当 t 较小时, 特征线族为逐渐靠近的直线族, 解的相应部分称为压缩波 (见图 11.5(a) 波峰后).
- 由于车辆在行驶过程中会穿越特征线($f'(q) < U(q)$), 因此车辆在行驶过程中车速 $U(q) = u_{\max}(1 - q)$ 单调减.
- 对给定的满足 $q_x(x,0) > 0$ 的光滑初始分布, 当 t 较小时, 可以通过特征线法求得光滑压缩波解 (见图 11.5(a)).
- 而当 t 较大, 即特征线相交后, 方程不再有光滑解. 此时, 特征线法将给出非物理解 (见图 11.4(b) 和11.5(b) 波峰后).

用粘性消失法求解非线性守恒律方程式

- 对于一般的初始车流密度分布, 应该考虑其积分形式的守恒律方程式, 并考虑求满足积分形式的守恒律方程式的弱解.
- 也可以考虑加粘性的方程式: $q_t + f(q)_x = \epsilon q_{xx}$.
- 加粘性的方程式不再是双曲型的, 而是抛物型的. 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 其解是全局光滑的.
- 当 $\epsilon \to 0^+$ 时, 相应的解族 q^ϵ 将在一定意义下收敛于非线性守恒律方程式的弱解, 它一般是原问题的物理解.
- 粘性消失法源自求解气体动力学方程组. 在 q_{xx} 小处, 粘性对解的影响可以忽略不计, 于是得模型问题 $q_t + f(q)_x = 0$.
- 但在激波附近, ϵq_{xx} 的作用不可忽略.

特征线法 ＋ 等面积法则 ⇒ 物理压缩激波解

- 在特征线相交之前，特征线法给出守恒律方程式的光滑解.
- 在特征线相交之后，特征线法则给出守恒律方程式的多值的非物理解 (见图 11.4(b), 11.5(b)).
- 在特征线相交之后形成的守恒律方程式的物理压缩激波解可由特征线法 ＋ 等面积法则得到 (见图 11.6(a), (b)).
- 等面积法则: 被激波剪掉的波的面积恰好与需要填补以形成激波的面积相等 (见见图 15(b)). 事实上，由守恒律有

$$\int_{x_l}^{x_r} q_s dx = \int_{x_l}^{x_r} q_m dx.$$

- 等面积法则的几何解释: 激波在解多值区域内形成的位置恰使压缩激波解所围的面积与多值解所围的有向面积相等.

激波传播速度及其 Rankine-Hugniot 条件

- 尽管利用等面积法则可以计算激波在给定时刻的位置，但却无法直接计算激波传播速度 $s(t)$.
- 对于守恒律方程式孤立的光滑激波解，即解在激波的两侧邻域内分别光滑，且有光滑的激波传播速度 $s(t)$，则可由守恒律推得 s 的简单计算公式.
- 事实上，设激波过 $(x_1+\Delta x, t_1)$ 和 $(x_1, t_1+\Delta t)$ 两点，则由守恒律有 (见图 11.7, 对应于激波速度 $s(t)<0$)

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} q(x, t_1+\Delta t)dx - \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} q(x, t_1)dx$$
$$= \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} f(q(x_1, t))dt - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} f(q(x_1+\Delta x, t))dt$$

激波传播速度及其 Rankine-Hugniot 条件

- 将解及其通量在激波两侧分别做 Taylor 展开，则上式化为

$$\Delta x q_r - \Delta x q_l = \Delta t f(q_l) - \Delta t f(q_r) + O(\Delta t^2).$$

- 注意，在所设情形，$\Delta x = -s(\xi)\Delta t$. 上式两端同除以 $-\Delta t$，令 $\Delta t \to 0$ 得 Rankine-Hugniot 跳跃间断条件:

$$s(q_r - q_l) = f(q_r) - f(q_l).$$

- 对激波过 (x_1, t_1) 和 $(x_1 + \Delta x, t_1 + \Delta t)$ 两点的情形，类似的推导可以得到相同的结论: $s[\![q]\!] = [\![f]\!]$. (可推广至方程组)

例 1: 车流问题，$f(q) = u_{\max} q(1-q)$，$s = u_{\max}[1 - (q_l + q_r)]$.

例 2: Burger's 方程，$f(q) = \frac{1}{2}q^2$，$s = \frac{q_l + q_r}{2}$.

注: 当$f(q)$是q的二次多项式时，总有$s = \frac{f'(q_l)+f'(q_r)}{2} = f'(\frac{q_l+q_r}{2})$.

黎曼问题的物理解是相似性解

- 考虑黎曼初值: $q(x,0) = \begin{cases} q_l, & x < 0, \\ q_r, & x > 0. \end{cases}$.

- 设 $q(x,t)$ 是满足方程和黎曼初值, 且满足熵条件的解, 称为物理解. 则 $\tilde{q}(x,t;a) \triangleq q(ax,at)$, $a \neq 0$, 也同样满足方程、黎曼初值和熵条件. 因此, $\tilde{q}(x,t;a)$ 也是物理解.

- 由物理解的唯一性知 $q(x,t) \equiv q(ax,at) \equiv q(\frac{x}{t},1)$, $\forall a \neq 0$.

- 结论: 守恒律方程式黎曼问题的物理解是相似性解, 即可以写成 $q(x,t) = \tilde{q}(x/t)$.

黎曼问题相似性解所满足的方程

- 守恒律方程式黎曼问题的物理解在解光滑的区域有 $q_t(x,t) = -\frac{x}{t^2}\tilde{q}'(x/t)$, 以及 $f(q)_x = \frac{1}{t}f'(\tilde{q}(x/t))\tilde{q}'(x/t)$.
- 由此得 $\tilde{q}(x/t)$ 满足方程 $\tilde{q}'(x/t)[x/t - f'(\tilde{q}(x/t))] = 0$.
- 于是有 $\begin{cases} \text{或} \quad \tilde{q}'(x/t) = 0, & \text{即在相应区域内 } \tilde{q} \text{ 为常数;} \\ \text{或} \quad f'(\tilde{q}(x/t)) = x/t. & \end{cases}$
- 结论: 存在 $\xi_l \le \xi_r$, 守恒律方程式黎曼问题的物理解满足

$$\tilde{q}(x/t) = q_l, \quad x/t < \xi_l; \quad \tilde{q}(x/t) = q_r, \quad x/t > \xi_r;$$

$$f'(\tilde{q}(x/t)) = x/t, \quad \xi_l < x/t < \xi_r.$$

特别地, 当 f 凸时有 $\quad \tilde{q}(\xi) = (f')^{-1}(\xi), \quad \xi_l \le \xi \le \xi_r.$

守恒律方程式黎曼问题的中心稀疏波解

- 以车流问题为例，$f(q) = u_{\max} q(1-q)$，$1 \geq q_l > q_r \geq 0$.
- 此时有 $f'(q_l) = u_{\max}(1-2q_l) < u_{\max}(1-2q_r) = f'(q_r)$.
- $(f')^{-1}(\xi) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi}{u_{\max}}\right)$，所以 $\tilde{q}(x/t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{u_{\max} t}\right)$.
- 当 $1 \geq q_l > q_r \geq 0$ 时，车流黎曼问题的物理解为中心稀疏波

$$\tilde{q}(x/t) = \begin{cases} q_l, & x/t < f'(q_l); \\ q_r, & x/t > f'(q_r); \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{u_{\max} t}\right), & f'(q_l) \leq x/t \leq f'(q_r). \end{cases}$$

非线性守恒律方程式的积分形式与弱解

- 守恒律方程式的积分形式, $\forall x_1 < x_2,\ t_1 < t_2$,

$$\int_{x_1}^{x_2} q(x,t_2)dx = \int_{x_1}^{x_2} q(x,t_1)dx - \left[\int_{t_1}^{t_2} f(q(x_2,t))dt - \int_{t_1}^{t_2} f(q(x_1,t))dt\right].$$

- 当 q 充分光滑时这等价于 $\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}[q_t + f(q)_x]dxdt = 0$, 或 $\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[q_t + f(q)_x]\chi_{[x_1,x_2]\times[t_1,t_2]}dxdt = 0$ (其中χ 为特征函数).

- 将上式中的导数视为弱导数, 将χ 替换为$\phi \in \mathbb{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$, 则得弱解的定义

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[q\phi_t + f(q)\phi_x]dxdt = \int_{-\infty}^{\infty} q(x,0)\phi(x,0)dx.$$

- 可以证明满足以上定义的弱解也必然是积分形式守恒律方程式的解. 反之亦然.

非线性守恒律方程式弱解的不唯一性

- 以上弱解定义的引入使得非线性守恒律方程式在一定意义下保证了初值问题解的存在性, 并给进一步的分析带来了许多方便. 但弱解问题的提法仍然是不适定的.
- 例如, 当 $1 \geq q_l > q_r \geq 0$ 时, 车流黎曼问题的弱解有两个.
- 物理解是中心稀疏波

$$\tilde{q}(x/t) = \begin{cases} q_l, & x/t < f'(q_l); \\ q_r, & x/t > f'(q_r); \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{u_{\max} t}\right), & f'(q_l) \leq x/t \leq f'(q_r). \end{cases}$$

- 非物理解是一速度为 $s = \frac{1}{2}[f'(q_l) + f'(q_r)]$ 的扩张激波.

非线性守恒律方程式弱解的不唯一性

- 弱解的不唯一性还表现在将非线性守恒律方程式转化为弱形式的方式上.
- 考虑 Burger's 方程 $u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0$, 以及当解光滑时与其等价的方程 $(u^2)_t + \left(\frac{2}{3}u^3\right)_x = 0$.
- Burger's 方程的守恒量为 u, 通量函数为 $f_1(u) = \frac{1}{2}u^2$.
- 而后一方程的守恒量为 u^2, 通量函数为 $f_2(u^2) = \frac{2}{3}(u^2)^{\frac{3}{2}}$.
- 对于给定的黎曼初值 $u_l > u_r$, 两方程的弱解均为激波.
- Burger's 方程的激波速度 $s_1 = \frac{[\![f_1]\!]}{[\![u]\!]} = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$.
- 而后者的激波速度 $s_2 = \frac{[\![f_2]\!]}{[\![u]\!]} = \frac{2}{3}\frac{u_r^3 - u_l^3}{u_r^2 - u_l^2} = s_1 + \frac{1}{6}\frac{(u_r - u_l)^2}{u_r + u_l}$.
- 要找到物理解, 首先要明确物理的守恒量和相应的通量, 其次必须要排除非物理的扩张激波.

物理解的特征结构与相容性条件、熵条件的引入

- 物理解关于小扰动应该是稳定的，而扩张激波不是小扰动稳定的（见图 11.4(a)），因此扩张激波不是物理解.
- 加粘性的守恒律方程式的解当粘性趋于零时，只会导致压缩激波和稀疏波. 可以证明粘性消失解是物理解.
- 粘性消失解在分析上具有重要作用，但很难直接将粘性消失解应用于非线性双曲守恒律方程物理解的近似计算.
- 在气体动力学等物理问题中，物理解的熵增加，而非物理解的熵减小，由此给出了判别物理解的熵条件. 在没有熵的问题中，具有类似功能的相容性条件也称为熵条件.
- 压缩激波条件很容易验证. 据此发展出了直接与特征结构相关的相容性条件，或熵条件.

Lax 熵条件

Definition

对于凸的守恒律方程式，一个间断的传播速度 $s = \frac{[\![f]\!]}{[\![q]\!]}$ 称为是满足 Lax 熵条件的，如果 $f'(q_l) > s > f'(q_r)$.

注意，对于凸通量，即 f'' 恒正或恒负，R-H 速度 s 必然介于 $f'(q_l)$ 与 $f'(q_r)$ 之间. 因此，Lax 熵条件可以化简为 $f'(q_l) > f'(q_r)$，或

- 当 $f'' > 0$ 时，Lax 熵条件简化为 $q_l > q_r$.
- 当 $f'' < 0$ 时，Lax 熵条件简化为 $q_l < q_r$.

注：与气体动力学中的熵条件类似，Lax 熵条件根据某个量通过间断时单方向的单调性来甄别物理间断.

Lax 熵条件难以判别数值解的某些间断是否物理

即便真解是光滑的, 数值解一般也不连续, 例如分片常数或分片多项式逼近. 因此, 数值解的间断未必反映真解的间断. Lax 熵条件给出的是真解间断处的条件, 而对数值解中那些并非反映真解间断的间断则无法做出判断.

考察 $f'' > 0$, $q_x^0 \geq 0$, 此时真解为稀疏波, 因此无间断. 由特征线方程及解沿特征线为常数得 $X(0) = X(t) - tf'(q(X(t), t))$. 所以

$$q(x,t) = q^0(x - tf'(q(x,t))) \Rightarrow q_x = \frac{q_x^0}{1 + q_x^0 f''(q)t}.$$

若 $q_x^0(x - tf'(q(x,t))) = 0$, 则 $q_x = 0$; 若 $q_x^0(x - tf'(q(x,t))) > 0$, 则 $q_x \leq 1/(f''(q)t)$. 记 $E = (\inf f'')^{-1}$, 则知真解满足不等式

$$q_x(x,t) \leq E/t, \quad \forall\, t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

而当 $q_x^0(X(0)) < 0$ 时, 则 $t \to \frac{-1}{q_x^0(X(0)) f''(q^0(X(0)))} \Rightarrow q_x(X(t), t) \to -\infty$ (激波).

Oleinik 熵条件

另一方面, 物理解的间断要求 $q_l > q_r$. 于是引出了以下更方便应用于数值计算的 Oleinik 熵条件:

Definition

设 $f'' > 0$, 设 $q(x,t)$ 是 $q_t + f(q)_x = 0$ 的弱解. 如果存在常数 $E > 0$ 使得

$$\frac{q(x+a,t) - q(x,t)}{a} < \frac{E}{t}, \quad \forall a > 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

则称 $q(x,t)$ 是守恒律的熵解.

注: 当 $f'' > 0$ 时, 在解的跳跃间断处, 由 Oleinik 熵条件可以推出 $q_l > q_r$, 因而有 $f'(q_l) > f'(q_r)$, 即 Lax 熵条件成立.

习题: 导出 $f'' < 0$ 时的 Oleinik 熵条件.

Oleinik 熵条件的推论 —— 物理解具有局部有界变差

Oleinik 熵条件也可以视为物理解的正则性条件. 事实上, 设 $q(x,t)$ 为熵解, 取常数 $C_1 > E$, 令 $u(x,t) = q(x,t) - C_1 x/t$, 则有

$$\begin{aligned} u(x+a,t) - u(x,t) &= q(x+a,t) - q(x,t) - C_1 a/t \\ &< a(E - C_1)/t < 0, \qquad\qquad \forall a > 0. \end{aligned}$$

即 $u(x,t)$ 关于 x 是单调的, 从而对任意给定的 $t > 0$, $q(x,t)$ 关于 x 具有局部有界的变差.

由此知, 即便初值只是 L^∞ 的, 当 $t > 0$ 时, 熵解最多只能有可数多个跳跃间断, 且几乎处处可微. 这是非线性特有的现象. 另外, 可以证明熵解是存在唯一的.

适用于非凸非线性守恒律方程式的 Oleinik 熵条件

Oleinik 还给出了以下更简单且易于推广至非凸非线性守恒律方程式的 Oleinik 熵条件:

Definition

非凸非线性守恒律方程式的粘性消失解（熵解）在间断处满足

$$\frac{f(q)-f(q_l)}{q-q_l} \geq s \geq \frac{f(q)-f(q_r)}{q-q_r},$$

$$\forall \text{ 落在 } q_l \text{ 和} q_r \text{ 定义的闭区间上的 } q.$$

注: 当 f 凸时, 即 $f''>0$ 或 $f''<0$ 时, 由该 Oleinik 熵条件可以推出 Lax 熵条件.

熵函数与熵通量

给出熵条件的另一类方法是定义熵函数与熵通量.

Definition

设 $\eta''(q) > 0, \forall q$. 称 $\eta(q), \psi(q)$ 为守恒律方程式 $q_t + f(q)_x = 0$ 的熵函数和熵通量（简称熵对），如果对该守恒律方程式的任何光滑解 $q(x,t)$ 和任意的 $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ 都有

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(q(x,t_2))dx = \int_{x_1}^{x_2} \eta(q(x,t_1))dx + \int_{t_1}^{t_2} \psi(q(x_1,t))dt - \int_{t_1}^{t_2} \psi(q(x_2,t))dt.$$

注: 定义中的式子可视作守恒律 $\eta(q)_t + \psi(q)_x = 0$ 的积分形式. 若 $q_t + f(q)_x = 0$ 的任意光滑解都是 $\eta(q)_t + \psi(q)_x = 0$ 的弱解, 则称 $(\eta(q), \psi(q))$ 为 $q_t + f(q)_x = 0$ 的熵对.

熵函数 $\eta(q)$, 熵通量 $\psi(q)$ 与通量 $f(q)$ 的关系

- 当 q, f, η, ψ 光滑时, 由 $\eta(q)_t + \psi(q)_x = 0$ 得
$$\eta'(q)q_t + \psi'(q)q_x = 0.$$
- 由此以及 $q_t + f(q)_x = 0$ 得 $-\eta'(q)f'(q)q_x + \psi'(q)q_x = 0.$
- 因此, 光滑的熵函数与熵通量必满足关系式
$$\psi'(q) = \eta'(q)f'(q).$$
- 反之, 设 f, η, ψ 光滑, $\eta'' > 0$, 且上式成立, 则 $(\eta(q), \psi(q))$ 为 $q_t + f(q)_x = 0$ 的熵对. 熵对一般不唯一.

注: 要求 $\eta''(q) \neq 0$ 是必要的. 否则, $\eta(q) = q$, $\psi(q) = f(q)$ 按定义是熵对. 而这样的熵对显然无助于甄别非物理解.

用熵对表出的守恒律方程式弱解的熵条件

Definition

守恒律方程式 $q_t + f(q)_x = 0$ 的弱解 $q(x,t)$ 称为是熵解，如果存在严格凸的熵函数和熵通量（熵对）$\eta(q)$, $\psi(q)$, 使得对任意的 $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ 都有

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(q(x,t_2))dx \le \int_{x_1}^{x_2} \eta(q(x,t_1))dx + \int_{t_1}^{t_2} \psi(q(x_1,t))dt - \int_{t_1}^{t_2} \psi(q(x_2,t))dt,$$

或等价地

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [\phi_t \eta(q) + \phi_x \psi(q)]dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x,0)\eta(q(x,0))dx \ge 0, \quad \forall \phi \in \mathbb{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+), \ \ \phi \ge 0.$$

(注: 即熵不等式 $\eta(q)_t + \psi(q)_x \le 0$ 在弱形式意义下成立.)

注: 对方程组, 物理问题通常有物理熵函数, 对称组总有熵函数 $\eta(q) = q^T q$.

具有凸熵对的守恒律方程的粘性消失解满足熵不等式

- 设 $q^\epsilon(x,t)$ 是粘性方程 $q_t^\epsilon + f(q^\epsilon)_x = \epsilon q_{xx}^\epsilon$ 的解 (总是光滑的).
- 方程两端同乘以 $\eta'(q^\epsilon)$ 得 $\eta(q^\epsilon)_t + \psi(q^\epsilon)_x = \epsilon\eta'(q^\epsilon)q_{xx}^\epsilon \Leftrightarrow$
$$\eta(q^\epsilon)_t + \psi(q^\epsilon)_x = \epsilon[\eta(q^\epsilon)]_{xx} - \epsilon\eta''(q^\epsilon)(q_x^\epsilon)^2.$$
- 上式乘以 $\phi \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$, $\phi \geq 0$, 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ 分部积分得

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}[\phi_t\eta(q^\epsilon) + \phi_x\psi(q^\epsilon)]dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,0)\eta(q^\epsilon(x,0))dx$$
$$= -\epsilon\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\eta(q^\epsilon)\phi_{xx}dxdt + \epsilon\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\eta''(q^\epsilon)(q_x^\epsilon)^2\phi dxdt.$$

- 现设 q^ϵ 一致有界, $\lim_{\epsilon\to 0} q^\epsilon(x,t) = q(x,t)$, in $L_{loc}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$.
- 由 $\eta(q^\epsilon)$ 的有界性, 上式右端第一项 $\epsilon \to 0$ 时极限是零.
- 由 $\eta''(q^\epsilon) > 0$, 上式右端第二项 ≥ 0.

具有凸熵对的守恒律方程的粘性消失解满足熵不等式

- 由 η 和 ψ 的光滑性和控制收敛定理知上式左端两项的极限为 $\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}[\phi_t\eta(q)+\phi_x\psi(q)]dxdt$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,0)\eta(q(x,0))dx$.
- 因此 $q(x,t)$ 满足熵不等式

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}[\phi_t\eta(q)+\phi_x\psi(q)]dxdt+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,0)\eta(q(x,0))dx\geq 0,$$

$$\forall\phi\in\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+),\quad \phi\geq 0.$$

注: 用推导 R-H 跳跃间断条件的方法, 由等价的积分形式的熵不等式

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta(q(x,t_2))dx\leq\int_{x_1}^{x_2}\eta(q(x,t_1))dx+\int_{t_1}^{t_2}\psi(q(x_1,t))dt-\int_{t_1}^{t_2}\psi(q(x_2,t))dt$$

可以类似地得到熵解的跳跃间断条件 $s(\eta(q_r)-\eta(q_l))\geq\psi(q_r)-\psi(q_l)$

利用熵对和熵不等式甄别熵解的例

- 对 Burger's 方程: $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0$, 取 $\eta(u) = u^2$, $\psi(u) = \frac{2}{3}u^3$. 由 R-H 条件 $s = \frac{u_l+u_r}{2}$.
- 由熵不等式 $s(\eta(u_r) - \eta(u_l)) \geq \psi(u_r) - \psi(u_l)$ 应有

$$\frac{u_l + u_r}{2}(u_r^2 - u_l^2) \geq \frac{2}{3}(u_r^3 - u_l^3).$$

- 由此推得条件 $u_l > u_r$. 这与 Lax 熵条件得到的结果一致.

注: 事实上, 在一般的情况下可以证明若 q 满足熵不等式, 则其必满足 Lax 熵条件.

非线性凸守恒律方程式解的长时间行为与 N-波衰减

- 对任意给定的具有紧支集的光滑初值 $u^0(x)$, 考虑 Burger's 方程 $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0$ 初值问题的熵解.
- 在最初阶段, 问题的熵解在 $u_x^0 > 0$ 处形成稀疏波, 而在 $u_x^0 < 0$ 处形成压缩波.
- 一段时间之后, 各段压缩波依次最终形成若干个激波.
- 此时熵解由若干速度不同的激波与相间其中的稀疏波构成.
- 由于各激波速度的不同, 有些激波之间的距离会逐渐减小并最终合并为更强的激波. 另一些激波间则渐行渐远.
- 渐行渐远的激波间是逐渐拉直的稀疏波 (渐近斜率 $1/t$, $t \gg 1$).
- 最终熵解发展为中间是一段渐近线性的稀疏波, 两端为渐行渐远的激波的 N-波 (也可能只有一个激波和一段稀疏波).

非线性凸守恒律方程式解的长时间行为与 N-波衰减

- N-波是非线性凸守恒律方程式初值问题熵解的普遍现象.
- N-波现象表明非线性凸守恒律方程式熵解的初始信息在发展过程中几乎丢失殆尽.
- 事实上, 每一次激波合并伴随着一次不可逆的信息丢失. 最终从任意初值出发的熵解都发展成为几乎无法区别的 N-波.
- 稀疏波的极限形状与通量 f 有关, 只有当 f 是二次函数时最终的稀疏波是渐近线性的 (一般由 $q(x,t) = q^0(x - tf'(q(x,t)))$ 有 $q_x = \frac{q_x^0}{1+q_x^0 f''(q^0)t}$, 因此 $t \gg 1$ 时刻的斜率约为 $1/(f''(q^0)t)$).

由非线性给数值求解带来的新的困难

与线性问题相比,

- 数值格式的稳定性和收敛性的理论分析更加困难.
- 数值方法必须考虑有间断的解, 求弱解是必须的.
- 弱解一般不唯一, 需要数值方法与适当的数值熵条件相容.
- 为保证求得非线性守恒律方程式的近似解, 必须采用守恒型的差分格式 (有限体积格式)

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n\right).$$

尽管如此, 求线性问题的一些方法和思想仍有重要的指导意义. 例如, REA 算法结合黎曼问题求解器的思路.

由非线性给数值求解带来的新的困难

与线性问题相比,

- 数值格式的稳定性和收敛性的理论分析更加困难.
- 数值方法必须考虑有间断的解, 求弱解是必须的.
- 弱解一般不唯一, 需要数值方法与适当的数值熵条件相容.
- 为保证求得非线性守恒律方程式的近似解, 必须采用守恒型的差分格式 (有限体积格式)

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n\right).$$

尽管如此, 求线性问题的一些方法和思想仍有重要的指导意义. 例如, REA 算法结合黎曼问题求解器的思路.

Godunov 方法 — 通过解黎曼问题计算数值通量 $F^n_{i-1/2}$

- REA 算法首先计算当前时刻守恒量的单元平均值，然后通过解黎曼问题计算下一时间步守恒量的单元平均值.
- 记 $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = q^{\downarrow}(Q^n_{i-1}, Q^n_i)$ 为 $x_{i-1/2}$ 处相应黎曼问题的熵解.
- 黎曼问题的熵解是相似性解，因此解沿射线 $x_{i-1/2}$ 为常数.
- 当 Δt 满足 CFL 条件时，一个单元界面上黎曼问题的解所产生的波在一个时间步内不会传播到其它单元交界面.
- 令 $F^n_{i-1/2} = f(Q^{\downarrow}_{i-1/2})$ 则得到 Godunov 格式.
- 当 f 严格凸 (凹) 时，黎曼问题的熵解是激波或中心稀疏波.

Godunov 方法 — f 严格凸时黎曼问题的熵解

以 $f'' > 0$ 为例, $q_l > q_r$ 时是激波; $q_l < q_r$ 时是中心稀疏波.

$Q^{\downarrow}_{i-1/2}$ 的取值分为 5 种情况 (见图 12.1(a)—(e)).

- (a). $Q_{i-1} > Q_i$, 激波; 激波速度 $s = \frac{[\![f]\!]}{[\![q]\!]} < 0$, $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = Q_i$.
- (b). $Q_{i-1} < Q_i$, 中心稀疏波; $f'(Q_i) < 0$, $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = Q_i$.
- (c). $Q_{i-1} < Q_i$, 中心稀疏波; $f'(Q_{i-1}) < 0 = f'(q_s) < f'(Q_i)$,
  $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = q_s$. $q_s = (f')^{-1}(0)$ 称为声速点.
- (d). $Q_{i-1} < Q_i$, 中心稀疏波; $f'(Q_{i-1}) > 0$, $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = Q_{i-1}$.
- (e). $Q_{i-1} > Q_i$, 激波; 激波速度 $s = \frac{[\![f]\!]}{[\![q]\!]} > 0$, $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = Q_{i-1}$.

Godunov 方法 — f 严格凸时数值通量 $F^n_{i-1/2}$ 的计算

由于我们只需要计算黎曼问题的熵解在 $x_{i-1/2}$ 处的值 $Q^{\downarrow}_{i-1/2}$, 以上分析可进一步简化. 考虑稀疏波(b), (d) 的非物理激波解.

- 由 $f'(Q_{i-1}) < f'(Q_i) < 0$, 知 $s = \frac{[\![f]\!]}{[\![q]\!]} < 0$, 得 $\tilde{q}^{\downarrow}_{i-1/2} = Q_i$.
- 由 $0 < f'(Q_{i-1}) < f'(Q_i)$, 知 $s = \frac{[\![f]\!]}{[\![q]\!]} > 0$, 得 $\tilde{q}^{\downarrow}_{i-1/2} = Q_{i-1}$.

由此可见, 除了跨声速稀疏波情形 $f'(Q_{i-1}) < 0 = f'(q_s) < f'(Q_i)$, 此时 $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = q_s$, 其余情形均可按激波 (无论是否物理) 处理. 即

$$F^n_{i-1/2} = \begin{cases} f(Q_{i-1}), & Q_{i-1} > q_s, \quad s > 0; \\ f(Q_i), & Q_i < q_s, \quad s < 0; \\ f(q_s), & Q_{i-1} < q_s < Q_i. \end{cases}$$

Godunov 方法 — f 严格凸时熵解通量 $F^n_{i-1/2}$ 的计算

以上分析表明, 当 $f'(Q_{i-1})$ 与 $f'(Q_i)$ 同号时, 熵解的数值通量恰为迎风通量. 而当 $f'(Q_{i-1})$ 与 $f'(Q_i)$ 异号时, 信息同时向两个方向传播, 通量的计算则略微复杂. 不过注意到

- $f'(q_s) = 0$, $f'' > 0$, 所以q_s 是 f 的全局最小值点;
- 在稀疏波的条件 (b), (c), (d) 下, $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = \min\limits_{Q_{i-1} \le q \le Q_i} f(q)$;
- 而在激波的条件 (a), (e) 下, $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = \max\limits_{Q_i \le q \le Q_{i-1}} f(q)$.

因此, f 严格凸 $(f'' > 0)$ 时熵解通量 $F^n_{i-1/2}$ 的取值又可表示为

$$F^n_{i-1/2} = \begin{cases} \min\limits_{Q_{i-1} \le q \le Q_i} f(q), & Q_{i-1} \le Q_i; \\ \max\limits_{Q_i \le q \le Q_{i-1}} f(q), & Q_i < Q_{i-1}. \end{cases}$$

Godunov 方法 — f 严格凸时熵解通量 $F^n_{i-1/2}$ 的计算

注: 由于 $f'' > 0$, 因此又有

- $\displaystyle\max_{Q_i \le q \le Q_{i-1}} f(q) = \max\{f(Q_{i-1}), f(Q_i)\};$

所以, f 严格凸 $(f'' > 0)$ 时熵解通量 $F^n_{i-1/2}$ 的取值又可简化为

$$F^n_{i-1/2} = \begin{cases} \displaystyle\min_{Q_{i-1} \le q \le Q_i} f(q), & Q_{i-1} \le Q_i; \\ \max\{f(Q_{i-1}), f(Q_i)\}, & Q_i < Q_{i-1}. \end{cases}$$

✠ f 严格凹 $(f'' < 0)$ 时熵解通量 $F^n_{i-1/2}$ 的取值公式留作习题.

作业: 11.4，11.5，11.8(c)，11.9.

Thank You!