Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

有出入口的线性车流问题

考虑线性车流方程 $q_t + \bar{u} q_x = D\delta(x - x_0)$, 其中 $\bar{u}$ 为车速 (为常数), $q \in [0, 1]$ 为车流密度 (平均车辆数/单位车长度), D 是单位时间在 x_0 处进入车流的车辆数 (入口 $D > 0$, 出口 $D < 0$).

考虑黎曼初值 q_l $(x < x_0)$, q_r $(x > x_0)$.

用分步法 (常系数线性方程的叠加原理) 求解:

- $q_t + \bar{u} q_x = 0$, 黎曼问题的解
  $q^*(x, t) = q_l + (q_r - q_l)H((x - x_0) - \bar{u}t)$.
- 奇性源的贡献: 车流密度的增量$= D/\bar{u}$, $0 < x - x_0 < \bar{u}t$.
- 黎曼问题的解: $q(x, t) = q^*(x, t) + \frac{D}{\bar{u}} H(x_0)H(\bar{u}t - (x - x_0))$.

注: 该解(比较(16.33))也可通过在§16.3.1 中令 $v = 0$, $u = \bar{u}$, $-\beta = \bar{u}$, 由 (16.28) 及 $\psi(x, t) = -\beta \mathring{q}^2_x(x) = D\delta(x - x_0)$ 得到.

带运动奇性源项平衡律方程的一般解法 —— 弱形式

考虑运动奇性源项平衡律方程 $q_t + f(q)_x = D\delta(x - X(t))$, 其中 $x = X(t)$ 是奇性源项的光滑运动轨迹, 运动速度为 $X'(t) = s(t)$.

设 $s(t) > 0$, 且点 (x_1, t_1), $(x_1+\Delta x, t_1+\Delta t)$ 都落在 $x=X(t)$ 上, 则由平衡律方程的弱形式有

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} q(x, t_1 + \Delta t)dx - \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} q(x, t_1)dx \\
&\quad = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} f(q(x_1, t))dt - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} f(q(x_1 + \Delta x, t))dt \\
&\qquad + \int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} D\delta(x - X(t))dxdt.
\end{aligned}$$

带运动奇性源项平衡律方程的一般解法 —— R-H 条件

设 $x = X(t)$ 是弱解的孤立的间断曲线，且弱解在 $x = X(t)$ 的邻域中光滑. 注意 $\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} D\delta(x - X(t))dx \equiv D$, 在以上弱形式中令 $\Delta t \to 0$ 取极限得 $s(q_r - q_l) = f(q_r) - f(q_l) - D$.

类似地可以分析 $s(t) < 0$ 和 $s = 0$ 的情形. 结果总结为带运动奇性源项平衡律方程弱解的 Rankine-Hugoniot 跳跃间断条件

$$s(q_r - q_l) = f(q_r) - f(q_l) - D.$$

注: 以上分析过程还表明，若源项中还包含非奇异部分，非奇异部分的源项不会改变 Rankine-Hugoniot 跳跃间断条件.

有出入口的线性车流方程黎曼问题的解

仍考虑黎曼初值为 q_l $(x < x_0)$, q_r $(x > x_0)$ 的线性车流方程 $q_t + \bar{u}q_x = D\delta(x - x_0)$ 的黎曼问题, 其中 $\bar{u}$ 为车速 (为正常数), $q \in [0, 1]$ 为车流密度 (平均车辆数/单位车长度), D 是单位时间在 x_0 处进入车流的车辆数 (入口 $D > 0$, 出口 $D < 0$).

这里 $s = 0$, $f(q) = \bar{u}q$. 设 $D > 0$, 由 Rankine-Hugoniot 跳跃间断条件得中间状态 q_m 满足 $q_m - q_l = D/\bar{u}$. 因此黎曼问题的解为

$$q(x,t) = \begin{cases} q_l, & (x - x_0)/t < 0; \\ q_l + D/\bar{u}, & 0 < (x - x_0)/t < \bar{u}; \\ q_r, & (x - x_0)/t > \bar{u}. \end{cases}$$

有出入口的非线性车流方程黎曼问题的解

考虑黎曼初值为 q_l $(x<0)$, q_r $(x>0)$ 的非线性车流方程 $q_t + f(q)_x = D\delta(x)$ 的黎曼问题，其中 $f(q) = u_{\max} q(1-q)$.

一般来说，以上黎曼问题的解可能有两个中间状态 $q_{m,l}$, $q_{m,r}$. q_l 和 $q_{m,l}$ 之间的黎曼问题解包含一个波速 ≤ 0 的波，$q_{m,r}$ 和 q_r 之间的黎曼问题解包含一个波速 ≥ 0 的波，$f(q_{m,r}) - f(q_{m,l}) = D$.

例 1: $q_l = q_r = 0.4$, $D = 0.008 u_{\max}$. 则 $q_{m,l} = 0.4$, $q_{m,r} = \frac{1-\sqrt{0.008}}{2}$ $\approx 0.45527864 > 0.4 = q_r$, 所以$q_{m,r}$ 和 q_r 之间的黎曼问题解是一中心稀疏波，其波速分布在 $[u_{\max}(1-2\times q_{m,r}), u_{\max}(1-2\times q_r)]$ $\approx [0.089442719 u_{\max}, 0.2 u_{\max}]$. (见图 17.6(a), $u_{\max} = 1$, $t = 20$).

即当 $f(q_l) + D \leq 0.25 u_{\max}$ (最大通量)时，取 $q_{m,l} = q_l$, 并取 $q_{m,r} \leq 0.5$ 满足 $f(q_{m,r}) = f(q_{m,l}) + D$.

有出入口的非线性车流方程黎曼问题的解

例 2: $q_l = q_r = 0.4$, $D = 0.012u_{\max}$. 则 $q_{m,r} = 0.5$, $q_{m,l} = \frac{1+\sqrt{0.048}}{2} \approx 0.60954451 > 0.4 = q_l$. 所以$q_{m,r}$ 和 q_r 之间的黎曼问题解是一中心稀疏波，其波速分布在 $[u_{\max}(1-2\times q_{m,r}), u_{\max}(1-2\times q_r)] \approx [0, 0.2u_{\max}]$. q_l 和 $q_{m,l}$ 之间是一波速为 $s = \frac{f(q_{m,l})-f(q_l)}{q_{m,l}-q_l} \approx -0.00954451u_{\max}$ 的左传激波. (见图 17.6(b), $u_{\max} = 1$, $t = 20$).

即当 $f(q_l) + D > 0.25u_{\max}$ 时，取 $q_{m,r} = 0.5$, 并取 $q_{m,l} > 0.5$ 满足 $f(q_{m,r}) = f(q_{m,l}) + D$, i.e. $f(q_{m,l}) = 0.25u_{\max} - D$. 特别地，当 $D = 0.25u_{\max}$ 时，$f(q_{m,l}) = 0$, $x < 0$ 部分路段已被完全堵死.

注 1: 一般来说，使q_l 和 $q_{m,l}$ 之间的黎曼问题解包含一个波速 ≤ 0 的波，$q_{m,r}$ 和 q_r 之间的黎曼问题解包含一个波速 ≥ 0 的波，同时 $f(q_{m,r}) - f(q_{m,l}) = D$ 的中间状态对 $q_{m,l}$, $q_{m,r}$ 并不唯一. 例如，$q_{m,r} = 0.495$, $q_{m,l} \approx 0.60965856$ 也满足要求.

有出入口的非线性车流方程黎曼问题的熵解

注 2: 弱解的 $q_{m,l}$ 和 $q_{m,r}$ 之间的跳跃间断不满足 Lax-熵条件, 甚至不满足 Oleinik 熵条件. 例如, $q_l = q_r = 0.4$, $D = 0.012u_{\max}$ 时, 所有弱解都有 $f'(q_{m,l}) < 0 \leq f'(q_{m,r})$. 例 2 给出的解是所有弱解中最接近于满足 Lax-熵条件的, 即使 $(f'(q_{m,r}) - f'(q_{m,l}))$ 达到最小的 (特殊意义下的熵解).

注 3: 若 $q_{m,l}$ 和 $q_{m,r}$ 是所有使 q_l 和 $q_{m,l}$ 之间黎曼问题解含一满足 Lax 熵条件且波速 ≤ 0 的波, $q_{m,r}$ 和 q_r 之间黎曼问题解含一满足 Lax 熵条件且波速 ≥ 0 的波, 且满足 $f(q_{m,r}) - f(q_{m,l}) = D$ 的弱解中 $q_{m,l}$ 和 $q_{m,r}$ 之间的跳跃间断使 $(f'(q_{m,r}) - f'(q_{m,l}))$ 达到最小, 则称该弱解为有出入口的非线性车流方程黎曼问题的熵解.

拟静态问题的高分辨率解法

分步法一般不太适用于拟静态, 即 $f(q)_x$ 与 $\psi(q)$ 都比较大, 但 $\psi(q)-f(q)_x\approx 0$ 的问题. 此时, 可考虑使用以下非分裂型方法:

- 将源项离散化成集中在各单元界面处的 delta-函数之和.
- 方程近似表示为 $q_t + f(q)_x = \sum_i \Delta x \Psi_{i-1/2}(t)\delta(x - x_{i-1/2})$.
- 在 t_n, $x_{i-1/2}$ 处考虑初值为 Q_{i-1}, Q_i 的以下方程的黎曼问题

$$q_t + f(q)_x = \Delta x \Psi_{i-1/2}(t)\delta(x - x_{i-1/2}).$$

- 该黎曼问题的解除了含向两边传播的波之外, 还包含一个在 $x_{i-1/2}$ 处的跳跃间断.

拟静态问题的高分辨率解法

以上黎曼问题通常需要近似求解. 例如, 用 $\hat{A}_{i-1/2}q$ 代替 $f(q)$ 的黎曼问题线性化近似求解方法, 其中 $\hat{A}_{i-1/2}$ 是由 Q_{i-1}, Q_i 决定的近似 Jacobi 矩阵.

- 在 t_n, $x_{i-1/2}$ 处考虑初值为 Q_{i-1}, Q_i 的以下方程的黎曼问题

$$q_t + \hat{A}_{i-1/2}q_x = \Delta x \Psi^n_{i-1/2}\delta(x - x_{i-1/2}).$$

- 该黎曼问题的解一般由以 $\hat{A}_{i-1/2}$ 的特征速度 $s^p_{i-1/2} = \hat{\lambda}^p_{i-1/2}$ 传播的特征波 $\mathcal{W}^p_{i-1/2} = \alpha^p_{i-1/2}\hat{r}^p_{i-1/2}$, 和一个由 delta-源项产生的满足 R-H 跳跃间断条件 $\hat{A}_{i-1/2}(Q^{\downarrow}_r - Q^{\downarrow}_l) = \Delta x \Psi_{i-1/2}$ 的两个中间状态 $Q^{\downarrow}_l$, $Q^{\downarrow}_r$.

拟静态问题的高分辨率解法

- 两个中间状态 $Q_l^{\downarrow}$, $Q_r^{\downarrow}$ 和特征波满足关系式

$$\hat{A}_{i-1/2}Q_l^{\downarrow} - \hat{A}_{i-1/2}Q_{i-1} = \sum_{p:s_{i-1/2}^p<0} s_{i-1/2}^p \mathcal{W}_{i-1/2}^p,$$

$$\hat{A}_{i-1/2}Q_i - \hat{A}_{i-1/2}Q_r^{\downarrow} = \sum_{p:s_{i-1/2}^p>0} s_{i-1/2}^p \mathcal{W}_{i-1/2}^p,$$

- 于是得

$$\hat{A}_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1}) - \Delta x \Psi_{i-1/2} = \sum_{p=1}^{m} s_{i-1/2}^p \mathcal{W}_{i-1/2}^p,$$

拟静态问题的高分辨率解法

- 回顾在 Roe 方法中，若弱解恰为一激波时，线性化方法也给出同样的激波. 这要求 $\hat{A}_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1}) = f(Q_i) - f(Q_{i-1})$.
- 这里我们提出类似的要求(以上分析表明这仍可通过 Roe 方法实现). 即

$$f(Q_i) - f(Q_{i-1}) - \Delta x \Psi_{i-1/2} = \sum_{p=1}^{m} s_{i-1/2}^{p} \mathcal{W}_{i-1/2}^{p}.$$

- 用 $\hat{A}_{i-1/2}$ 的特征向量组做通量差分解

$$f(Q_i) - f(Q_{i-1}) - \Delta x \Psi_{i-1/2} = \sum_{p=1}^{m} \beta_{i-1/2}^{p} \hat{r}_{i-1/2}^{p}.$$

并令

$$\mathcal{W}_{i-1/2}^{p} = \alpha_{i-1/2}^{p} \hat{r}_{i-1/2}^{p}, \quad \alpha_{i-1/2}^{p} = \begin{cases} \beta_{i-1/2}^{p} / s_{i-1/2}^{p}, & s_{i-1/2}^{p} \neq 0, \\ 0, & s_{i-1/2}^{p} = 0. \end{cases}$$

拟静态问题的高分辨率解法

- 令 (见p.315 (15.10))

$$\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-1/2} = \sum_{p=1}^{m}(s_{i-1/2}^p)^-\mathcal{W}_{i-1/2}^p, \quad \mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2} = \sum_{p=1}^{m}(s_{i-1/2}^p)^+\mathcal{W}_{i-1/2}^p.$$

- 便可定义高分辨率格式 (见p.362 363 (15.62), (15.63))

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathcal{A}^-\Delta Q_{i+1/2} + \mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2}) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{F}_{i+1/2} - \tilde{F}_{i-1/2}),$$

其中 $\tilde{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m}|s_{i-1/2}^p|\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|s_{i-1/2}^p|\right)\tilde{\mathcal{W}}_{i-1/2}^p.$

注: 以上方法一般不具有形式上的二阶精度, 在远离平衡态时可能不如分步法, 但对于拟静态问题却有其独特的优势. 因为, 它抓住了 $f(Q_i) - f(Q_{i-1}) - \Delta x \Psi_{i-1/2}$ (关键小量) 对解的贡献.

带非 delta-函数刚性源项的 Burgers 方程

- 考虑 $u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = \psi(u)$, 其中 $\psi(u) = \frac{1}{\tau}u(1-u)(u-\beta)$, 参数 $\tau > 0$ 通常很小, $0 < \beta < 1$.
- 考虑 ODE $u'(t) = \psi(u(t))$. 由于 $\psi(0) = \psi(1) = \psi(\beta) = 0$, $\psi'(0) < 0$, $\psi'(1) < 0$, $\psi'(\beta) > 0$, 因此, $u = 0, 1$ 是 ODE 的稳定的平衡点, 而 $u = \beta$ 则是 ODE 的不稳定的平衡点.
- 从任何初值 $\mathring{u} \neq \beta$ 出发, ODE 的解都将渐近收敛于 0 ($\mathring{u} < \beta$), 或 1 ($\mathring{u} > \beta$). τ 越小收敛越快.
- 当 τ 很小时, 方程 $u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = \psi(u)$ 的解会在很短的时间内演化成为近似的 0, 1 间的阶梯函数 (而在 $\mathring{u}$ 穿越 β 处发展出近乎跳跃间断的结构).

带非 delta-函数刚性源项的 Burgers 方程

- 当 τ 很小时, 以上演化过程的时间尺度远小于对流项的时间尺度. 因此, 对带上述源项的 Burgers 方程一般初值问题的解的演化过程的研究可近似简化为对黎曼初值为 $u_l=0$, $u_r=1$, 或 $u_l=1$, $u_r=0$ 的黎曼问题解的研究.
- 当黎曼初值为 $u_l=1$, $u_r=0$ 时, 无源项的 Burgers 方程黎曼问题的解是一个激波, 由 Rankine-Hugoniot 跳跃间断条件激波速度为 $s=1/2$. 而该激波也恰好是带上述源项的 Burgers 方程黎曼问题的解 (源项在该激波上取值为零).
- 当黎曼初值为 $u_l=0$, $u_r=1$ 时, 无源项的 Burgers 方程黎曼问题的解是一个中心稀疏波. 而源项此时起到的作用是将落在 $(0,\beta)$ 间的 u 往 0 拉, 同时将落在 $(\beta,1)$ 间的 u 往 1 拉.

带非 delta-函数刚性源项的 Burgers 方程

- 中心稀疏波将间断的磨光作用和源项将磨光的函数拉向间断的作用会在某个特殊位置相互平衡. 这个平衡位置就是我们要寻求的行波解: $u(x,t) = w(\frac{x-st}{\tau})$ (见p.402 图17.7(a)).
- 将行波解代入方程 $u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = \psi(u)$ 得 ODE

$$-sw' + ww' = w(1-w)(w-\beta), \quad \Rightarrow \quad w' = \frac{w(1-w)(w-\beta)}{w-s}.$$

- 由原问题的黎曼初值知 w 满足条件 $w(-\infty) = 0$, $w(\infty) = 1$.
- 若 $s < \beta$, 则对任意的 $\max\{0,s\} < w < \beta$, $w' < 0$, 因此, 满足 $w(-\infty) = 0$ 的解必满足 $w < \beta \;\Rightarrow\; w(\infty) < 1$.
- 若 $s > \beta$, 则对任意的 $\min\{1,s\} > w > \beta$, $w' > 0$, 因此, 满足 $w(\infty) = 1$ 的解必满足 $w > \beta \;\Rightarrow\; w(-\infty) > 0$.

带非 delta-函数刚性源项的 Burgers 方程

- 因此，仅当 $s = \beta$ 时，才可能有我们需要的解.
- 此时 ODE 约化为 $w' = w(1-w)$，其满足无穷远条件的解为

$$w(\xi) = \frac{e^\xi}{1+e^\xi} = \frac{1}{2}[1 + \tanh(\xi/2)].$$

注 1：若将 $\frac{1}{2}u^2$ 换成一般的($f'' > 0$的)通量函数 $f(u)$，可证 $s = f'(\beta)$.

注 2：源项 $\psi(w((x-st)/\tau))$ 在宽度为 $O(\tau)$ 的区域之外的取值近乎为零，而在该区域之内的取值可达 $O(1/\tau)$ 量级 (见 图17.7(b)).

注 3：$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(w((x-st)/\tau))dx = \frac{1}{2} - \beta$　(见 (17.81), (17.82))
$\Rightarrow \quad \lim_{\tau\to 0} \psi(w((x-st)/\tau)) = (\frac{1}{2} - \beta)\delta(x-st)$.

注 4：行波解的速度 s 依赖于只在很小的尺度范围内有实质变化的源项的结构，这会给在较粗的网格上求近似解带来困难.

带刚性源项的双曲方程比刚性 ODE 的数值困难更严重

- 刚性 ODE 在一小段时间后, 解就完全落在了慢流形附近.
- 带刚性源项的双曲方程的解却总在一小区域内远离慢流形.
- 以方程 $q_t + f(q)_x = \psi(q)$ 的 Godunov 分裂法为例.

$$\begin{cases} \text{子问题 A:} & q_t + f(q)_x = 0, \\ \text{子问题 B:} & q_t = \psi(q). \end{cases}$$

- 若仅限于求解刚性 ODE 子问题 B, 隐式梯形公式 (见 (17.41)) $Q_i^{n+1} = Q_i^* + \frac{\Delta t}{2}[\psi(Q_i^*) + \psi(Q_i^{n+1})]$ 游刃有余 ($\because$ A-稳定).
- 但隐式梯形公式在解方程 $q_t + f(q)_x = \psi(q)$ 的 Godunov 分裂法中处理刚性源项子问题 B 时却力不从心 (见p.406 图17.8).

注: ODE 算法 $Q^{n+1} = R(z)Q^*$ 称作是 A-稳定的, 如果 $|R(z)| \le 1$, $\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \le 0\}$; 若还有 $\lim_{|z|\to\infty} R(z) = 0$, 则称作是 L-稳定的.

带刚性源项的双曲方程的数值困难

- 在解方程 $q_t + f(q)_x = \psi(q)$ 的 Godunov 分裂法中处理刚性源项子问题 B 时，必须采用 L-稳定的 ODE 数值方法.
- 图 17.9 显示了采用二阶 L-稳定的 TR-BDF 方法计算刚性源项子问题 B 的 Godunov 分裂法的数值结果. 可以看出，虽然消除了振荡和非物理状态，但在次分辨率网格上的数值行波解的速度明显不对. 事实上，此时速度完全由网格尺度决定 (p.408).
- 原因是 A-步的数值粘性会磨光间断 (远大于真解的过渡区域)，这造成 B-步中刚性源项的过度反应，而源项贡献的变化意味着波速的变化 (参考p.404, $s = \frac{1}{2} - D$).
- 本质困难在于方程 $q_t + f(q)_x = \psi(q) + \epsilon q_{xx}$ 的解有性质

$$\lim_{\tau\to 0}\left(\lim_{\epsilon\to 0} q^{\tau,\epsilon}\right) \neq \lim_{\epsilon\to 0}\left(\lim_{\tau\to 0} q^{\epsilon,\tau}\right).$$ 例子见p.409 (17.92), (17.93)

- 当上述极限可交换顺序时，则可设计某些方程的松弛化算法.

平衡态和平衡关系式

- 在许多物理问题中，一组状态变量有若干平衡态．当状态变量偏离平衡态时，系统会将它们迅即拉回到某个平衡态．
- 更有许多物理问题，其处于平衡态的一组状态变量满足唯一的平衡关系式．
- 考虑以下两个方程的模型问题 $(0 < \tau \ll 1,\ a > 0)$:

$$\begin{cases} u_t + v_x = 0, \\ v_t + a u_x = \frac{f(u) - v}{\tau}. \end{cases}$$

- 平衡态关系为 $v = f(u)$．当 $v \neq f(u)$ 时，第二个方程会迅即将其拉回至平衡态附近 (除了在 u_x 非常大的一个很窄的反应区内)．

松弛系统 —— 次特征条件

- 设状态变量始终处于平衡态, 因而满足平衡关系 $v = f(u)$. 则模型问题约化为特征速度为 $f'(u)$ 的非线性守恒律方程式
$$u_t + f(u)_x = 0.$$
- 模型问题也称为是其约化方程的松弛系统.
- 注意, 若约化方程的特征 $|f'(u)| > \sqrt{a}$, 则松弛系统, 其特征速度为 $\lambda^{\pm} = \pm\sqrt{a}$ (与源项无关), 的解当 $\tau \to 0$ 时, 不可能收敛于约化方程的解 (由CFL 条件).
- 由此引出次特征条件: $|f'(u)| \leq \sqrt{a}$. 或更一般地, 约化方程的特征速度囿于齐次模型方程的特征速度.
- 当模型问题满足次特征条件, 且 $0 < \tau \ll 1$ 时, 约化方程可以在次分辨率网格上给出模型问题较好的近似解.
- 模型问题满足次特征条件时, 可用于近似计算约化方程的解.

松弛系统及其约化方程的例 —— 一个简单的数值算例

- 气体动力学欧拉方程可视为是包含由分子间碰撞引起的振荡或化学非平衡态的物理上更精确的模型的约化方程.
- 前面建立的车流方程则假定司机能在瞬间将车速控制到理论上指定的平衡速度, 因此, 也是更复杂系统的约化方程.
- 考虑松弛系统
$$\begin{cases} u_t + v_x = 0, \\ v_t + u_x = \dfrac{\frac{1}{2}u^2 - v}{\tau}, \end{cases}$$
初值为 $u_l = 1$, $u_r = 0$, $v_l = f(u_l) = 1/2$, $v_r = f(u_r) = 0$ 的黎曼问题的解, 并将其与约化方程 (Burgers 方程) 相应黎曼问题解做比较. p.412 图17.10 显示了分步法给出的数值结果. 可见 $\tau \to 0$ 时, 松弛系统的解收敛于 Burgers 方程的解.
- 值得注意, 在 $\tau = 0.001$ 时, 虽然以上数值结果是在次分辨率网格上得到的, 但数值解很好地逼近了 Burgers 方程的解.

约化变量、松弛变量与 Chapman-Enskog 展开

1. 在松弛系统 $$\begin{cases} u_t + v_x = 0, \\ v_t + au_x = \frac{f(u)-v}{\tau}, \end{cases}$$ 中, 通常称 u 为约化变量, v 为松弛变量.
2. 由于 $\lim_{\tau\to 0} v = f(u)$, 可以设有以下 Chapman-Enskog 展开 $$v(x,t) = f(u(x,t)) + \tau v_1(x,t) + \tau^2 v_2(x,t) + \cdots .$$
3. 将 Chapman-Enskog 展开代入松弛系统的第一个方程得 $$u_t + f(u)_x = -(\tau v_1 + \tau^2 v_2 + \cdots)_x.$$
4. 将 Chapman-Enskog 展开代入松弛系统的第二个方程得 $$f'(u)u_t + [\tau v_1 + \tau^2 v_2 + \cdots]_t + au_x = -(v_1 + \tau v_2 + \cdots).$$

松弛变量的 Chapman-Enskog 展开与高阶约化方程

5. 将 (4) 中的 u_t 用 (3) 替换, 并合并 τ 的幂的同类项得
$$(v_1 - f'(u)f(u)_x + au_x) + \tau[v_2 - f'(u)v_{1x} + v_{1t}] + \cdots = 0.$$
6. 因此有 $v_1 = -[a - f'(u)^2]u_x$. 将其代入 (3) 得一阶约化方程
$$u_t + f(u)_x = \tau(\beta(u)u_x)_x,$$
其中 $\beta(u) = a - f'(u)^2$. 同理, 可推出更高阶的约化方程.
7. 一阶约化方程适定的充要条件是松弛系统满足次特征条件. 此时, $\tau(\beta(u)u_x)_x$ 给 (零阶) 约化方程加上了粘性项. 注意, 当给松弛系统加上额外的粘性项 ϵu_{xx} 后, 极限过程 $\lim_{\tau\to 0}$, $\lim_{\epsilon\to 0}$ 可交换顺序 $\Rightarrow$ 用松弛系统近似计算约化系统可行.
8. 当不满足次特征条件时, 松弛系统可能不稳定. 不过 $f(u)$ 的非线性性质有时可能会起到稳定化的作用（p.413）.

松弛格式

- 许多守恒律方程都是更精确的松弛系统的约化方程. 一般约化方程相比原松弛问题变量较少, 解的结构通常也更简单, 而且, 由于没有刚性源项和变化剧烈的反应区域, 计算难度通常也较低.
- 约化方程在近似计算实际松弛系统时起到十分重要的作用.
- 另一方面, 在求解守恒律方程组 $u_t + f(u)_x = 0$ 时, 可以考虑人为地引入松弛变量 v 和松弛系统

$$\begin{cases} u_t + v_x = 0, \\ v_t + Au_x = \frac{f(u)-v}{\tau}, \end{cases}$$

  其中矩阵 A 正定对称, $|\lambda(f'(u))| \leq \max \lambda(A)$ (次特征条件).
- 为易于计算, 可取 $A = \mathrm{diag}(\lambda^1, \cdots, \lambda^m)$, $0 < \lambda^i < \lambda^j$, $i < j$. 取值应该基于对守恒律方程组最快与最慢波速的估计, 以确保满足次特征条件.

松弛格式的例

对许多实际问题, 甚至可以在 $\tau \to 0$ 的意义下应用松弛格式. 例如, 下面给出的一个时间步中分步法形式的松弛格式:

1. 以 U^n, V^n 为初值, 解齐次线性双曲方程
$$\begin{cases} u_t + v_x = 0, \\ v_t + Au_x = 0, \end{cases}$$
结果记为 U^*, V^*.

2. 以 U^*, V^* 为初值, 解仅含源项的 ODE $u_t = 0$, $v_t = \frac{f(u)-v}{\tau}$. 取其在 $\tau \to 0$ 意义下的解为下一时间步的近似解:
$$\begin{cases} U^{n+1} = U^*, \\ V^{n+1} = f(U^{n+1}). \end{cases}$$

注: 以上格式仅适用于刚性源项不会对松弛系统在次分辨率网格上的计算带来数值困难的问题(即: $\lim_{\tau\to 0}$, $\lim_{\epsilon\to 0}$ 可交换顺序, 其中 ϵ 为数值粘性).

高维守恒律与双曲型方程的形式

实际问题中的守恒律和双曲系统中的空间变量通常都高于一维.

- 二维守恒律有以下形式: $q_t + f(q)_x + g(q)_y = 0$, 其中 $q(x, y, t)$ 是由 m 个守恒量组成的向量, $f(q)$, $g(q)$ 分别为 x-和 y-方向的守恒量向量 q 的通量（向量）函数.
- 二维拟线性双曲型方程组一般有以下形式 $q_t + A(q, x, y, t)q_x + B(q, x, y, t)q_y = 0$.
- 三维守恒律有以下形式: $q_t + f(q)_x + g(q)_y + h(q)_z = 0$.
- 三维拟线性双曲型方程组一般有以下形式 $q_t+A(q, x, y, z, t)q_x+B(q, x, y, z, t)q_y+C(q, x, y, z, t)q_z = 0$.

注: 矩阵 $\nabla_q f$, $\nabla_q g$, $\nabla_q h$, A, B, C 须满足双曲型条件 (见 § 18.5).

二维和三维空间双曲型方程的定义

Definition

常系数一阶线性偏微分方程组 $q_t + Aq_x + Bq_y = 0$ 称为是(强)双曲型的, 如果对任意的单位向量 $\vec{n} = (n^x, n^y)$, $\check{A} = (n^x A + n^y B)$ 可实对角化. 偏微分方程组 $q_t + f(q)_x + g(q)_y$ 称为是(强) 双曲型的, 如果 $\check{f}'(q) = (n^x f'(q) + n^y g'(q))$ 对任意的单位向量 $\vec{n} = (n^x, n^y)$ 可实对角化.

Definition

常系数一阶线性偏微分方程组 $q_t + Aq_x + Bq_y + Cq_z = 0$ 称为是(强) 双曲型的, 如果 $\check{A} = (n^x A + n^y B + n^z C)$ 对任意的单位向量 $\vec{n} = (n^x, n^y, n^z)$ 可实对角化.

偏微分方程组 $q_t + f(q)_x + g(q)_y + h(q)_z = 0$ 称为是(强) 双曲型的, 如果 $\check{f}'(q) = (n^x f'(q) + n^y g'(q) + n^z h'(q))$ 对任意的单位向量 $\vec{n} = (n^x, n^y, n^z)$ 可实对角化.

注：类似地可定义严格双曲型.

二维守恒律方程的推导

- 任取守恒量 q 定义域中的光滑区域 Ω, 则 Ω 中总守恒量的变化完全来自于穿过光滑边界 $\partial\Omega$ 的通量. 即
$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} q(x,y,t)dx\,dy = \text{穿过 } \partial\Omega \text{ 进入 } \Omega \text{ 的净通量}.$$
- 记 $\vec{f}(q) = (f(q), g(q))$, 记 $\vec{n}(s) = (n^x(s), n^y(s))$ 为 $\partial\Omega$ 上点 $(x(s), y(s))$ 处 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.
- 则在 $(x(s), y(s))$ 点处沿方向 $\vec{n}(s)$ 的通量为
$$\vec{n}(s)\cdot\vec{f}(q(x(s),y(s),t)) = n^x(s)f(q) + n^y(s)g(q).$$
- 由此知 “穿过 $\partial\Omega$ 进入 Ω 的净通量” $= -\int_{\partial\Omega}\vec{n}\cdot\vec{f}(q)ds$.

二维守恒律方程的推导

- 记 $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(q) = f(q)_x + g(q)_y$, 则由散度定理有 $\int_{\partial\Omega}\vec{n}\cdot\vec{f}(q)ds = \int_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(q)dx\,dy$.
- 综合以上分析得积分形式的守恒律方程

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} q(x,y,t)dx\,dy = -\int_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(q)dx\,dy.$$

$$\int_{\Omega} q(x,y,t_2) = \int_{\Omega} q(x,y,t_1) - \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega}\vec{n}\cdot\vec{f}(q)ds\,dt.$$

- 若 q, $\vec{f}$ 充分光滑, 则由 Ω 的任意性, 即导出微分形式的守恒律方程

$$q_t + \vec{\nabla}\cdot\vec{f}(q) = 0.$$

三维守恒律方程

- 任取 q 定义域中的光滑区域 Ω, 记 $\vec{f}(q) = (f(q), g(q), h(q))$, 记 $\vec{n}(s) = (n^x(s), n^y(s), n^z(s))$ 为 $\partial\Omega$ 上点 $(x(s), y(s), z(s))$ 处 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. 记

$$\breve{f}(q) = \vec{n} \cdot \vec{f}(q, t) = n^x f(q) + n^y g(q) + n^z h(q),$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(q) = f(q)_x + g(q)_y + h(q)_z.$$

- 则可类似地推出积分形式和微分形式的守恒律方程

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega q(x, y, t) dx\, dy = -\int_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(q) dx\, dy.$$

$$\int_\Omega q(x, y, t_2) = \int_\Omega q(x, y, t_1) - \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \vec{f}(q) ds\, dt.$$

$$q_t + \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(q) = 0.$$

二维空间的对流方程

- 设已知二维空间中流体的流速 $\vec{u} = (u(x,y,t), v(x,y,t))$.
- 设 $q(x,y,t)$ 是流体中某物质的密度 (质量/面积).
- 则该物质的通量函数为 $\vec{f}(q) = (f(q), g(q)) = \vec{u}q$, 即

$$f = u(x,y,t)q(x,y,t), \quad g = v(x,y,t)q(x,y,t).$$

- 因此得特殊的守恒律方程: 对流方程

$$q_t + (uq)_x + (vq)_y = 0.$$

- 特别地, 常流速 $(\bar{u}, \bar{v})$ 的对流方程为

$$q_t + \bar{u}q_x + \bar{v}q_y = 0.$$

该方程初值问题的解为 $q(x,y,t) = \mathring{q}(x - \bar{u}t, y - \bar{v}t)$.

二维空间的可压缩流

- 考虑建立状态方程为 $p = P(\rho)$ 的二维可压缩流方程.
- 守恒量为质量和动量. 记 $q^1 = \rho$ 为质量密度 (质量/面积), (u, v) 为速度向量, $(q^2, q^3) = (\rho u, \rho v)$ 为动量密度.
- x-方向通量 $f(q) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u \cdot u + p \\ \rho v \cdot u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^2 \\ (q^2)^2/q^1 + P(q^1) \\ q^2 q^3/q^1 \end{bmatrix}$,
- y-方向通量 $g(q) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u \cdot v \\ \rho v \cdot v + p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^3 \\ q^2 q^3/q^1 \\ (q^3)^2/q^1 + P(q^1) \end{bmatrix}$.

二维空间的可压缩流

- 由此可写出二维可压缩流方程: $q_t + f(q)_x + g(q)_y = 0$:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x + (\rho uv)_y = 0, \\ (\rho v)_t + (\rho v)_x + (\rho v^2 + P(\rho))_y = 0. \end{cases}$$

- 方程的拟线性形式: $q_t + f'(q)q_x + g'(q)q_y = 0$, 其中

$$f'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + P'(\rho) & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}, \quad g'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + P'(\rho) & 0 & 2v \end{bmatrix}.$$

二维线性声波方程

二维线性声波方程就是二维可压缩流方程在给定的常状态 $q_0 = (\rho_0, u_0, v_0)$ 处的线性化方程 $q_t + f'(q_0)q_x + g'(q_0)q_y = 0$.

- 应用中常将二维线性声波方程写为变量 (p, u, v) 的方程.
- 这时二维线性声波方程的一般形式为: $q_t + Aq_x + Bq_y = 0$, 其中
$$q = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} u_0 & K_0 & 0 \\ 1/\rho_0 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} v_0 & 0 & K_0 \\ 0 & v_0 & 0 \\ 1/\rho_0 & 0 & v_0 \end{bmatrix},$$
$K_0 = \rho_0 P'(\rho_0)$ 为可压流体的体压缩模量.
- 特别地，当流体的背景流速 $u_0 = v_0 = 0$ 时有
$$q = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & K_0 & 0 \\ 1/\rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\rho_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

二维空间双曲型方程的定义

- 一维双曲型方程组 $q_t + Aq_x = 0$ 要求 A 可实对角化, 因而任何行波解$q(x - \lambda^p t)$ 必满足 $Aq' = \lambda^p q'$.
- 在二维空间, 沿 $\vec{n} = (n^x, n^y)$ 传播的平面波 $q(x, y, t) = \breve{q}(\vec{n} \cdot \vec{x} - st) = \breve{q}(n^x x + n^y y - st)$ 如果是二维双曲型方程组 $q_t + Aq_x + Bq_y = 0$ 的解, 则应该有 $(n^x A + n^y B)\breve{q}' = s\breve{q}'$.
- 因此, 对任意的单位向量 $\vec{n} = (n^x, n^y)$, $\breve{A} = (n^x A + n^y B)$ 应该可实对角化.

Definition

常系数一阶线性偏微分方程组 $q_t + Aq_x + Bq_y = 0$ 称为是(强)双曲型的, 如果对任意的单位向量 $\vec{n} = (n^x, n^y)$, $\breve{A} = (n^x A + n^y B)$ 可实对角化. 偏微分方程组 $q_t + f(q)_x + g(q)_y$ 称为是(强) 双曲型的, 如果 $\breve{f}'(q) = (n^x f'(q) + n^y g'(q))$ 对任意的单位向量 $\vec{n} = (n^x, n^y)$ 可实对角化.

二维声波方程组的双曲性

- 对二维声波方程，记 $\breve{u}_0 = \vec{n} \cdot \vec{u}_0$，$c_0 = \sqrt{K_0/\rho_0}$，$Z_0 = \rho_0 c_0$ 则

$$\breve{A} = \begin{bmatrix} \breve{u}_0 & n^x K_0 & n^y K_0 \\ n^x/\rho_0 & \breve{u}_0 & 0 \\ n^y/\rho_0 & 0 & \breve{u}_0 \end{bmatrix}, \breve{r}^1 = \begin{bmatrix} -Z_0 \\ n^x \\ n^y \end{bmatrix}, \breve{r}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -n^y \\ n^x \end{bmatrix}, \breve{r}^3 = \begin{bmatrix} Z_0 \\ n^x \\ n^y \end{bmatrix},$$

$$\breve{\lambda}^1 = \breve{u}_0 - c_0,\ \breve{\lambda}^2 = \breve{u}_0,\ \breve{\lambda}^3 = \breve{u}_0 + c_0.$$

- 当且仅当 $AB = BA$ 时，强双曲型方程组 $q_t + Aq_x + Bq_y = 0$ 在变换 $w = R^{-1}q$ 下对角化为 $w_t + \Lambda^x w_x + \Lambda^y w_y = 0$.

- 二维声学方程组不可化为对角方程组. 因此，二维声学方程组的解的结构应该比一维声学方程组的解的结构更丰富: 第二族特征波 $W^2 = \alpha_2 \breve{r}^2$ 代表与 $\vec{n}$ 方向正交的剪切波.

三维空间双曲型方程的定义 — 三维声波方程的双曲性

Definition

常系数一阶线性偏微分方程组 $q_t + Aq_x + Bq_y + Cq_z = 0$ 称为是 (强) 双曲型的, 如果 $\breve{A} = (n^x A + n^y B + n^z C)$ 对任意的单位向量 $\vec{n} = (n^x, n^y, n^z)$ 可实对角化.

偏微分方程组 $q_t + f(q)_x + g(q)_y + h(q)_z = 0$ 称为是 (强) 双曲型的, 如果 $\breve{f}'(q) = (n^x f'(q) + n^y g'(q) + n^z h'(q))$ 对任意的单位向量 $\vec{n} = (n^x, n^y, n^z)$ 可实对角化.

- 对三维声波方程, 记 $\breve{u}_0 = \vec{n} \cdot \vec{u}_0$, $c_0 = \sqrt{K_0/\rho}$, $Z_0 = \rho_0 c_0$ 则

$$\breve{A} = \begin{bmatrix} \breve{u}_0 & n^x K_0 & n^y K_0 & n^z K_0 \\ n^x/\rho & \breve{u}_0 & 0 & 0 \\ n^y/\rho & 0 & \breve{u}_0 & 0 \\ n^z/\rho & 0 & 0 & \breve{u}_0 \end{bmatrix}, \breve{r}^1 = \begin{bmatrix} -Z_0 \\ n^x \\ n^y \\ n^z \end{bmatrix}, \breve{r}^4 = \begin{bmatrix} Z_0 \\ n^x \\ n^y \\ n^z \end{bmatrix},$$

$\breve{\lambda}^1 = \breve{u}_0 - c_0$, $\breve{\lambda}^2 = \breve{\lambda}^3 = \breve{u}_0$, $\breve{\lambda}^4 = \breve{u}_0 + c_0$, $\breve{r}^2$, $\breve{r}^3$ 是第一个分量为0, 与 $\breve{r}^1$ 正交, 且线性无关的两个向量 (代表剪切波).

二维浅水方程

- 在二维可压流方程中将 ρ 换为 h (体质量密度为1, 深度为 h 的流体的面质量密度即为 h), (由于深度为 h 处的压强为 gh, 所以深度从 0 到 h 截面上的总压力为 $\int_0^1 ghdh = \frac{1}{2}gh^2$) 将状态方程 $P(\rho)$ 换为 $P(h) = \frac{1}{2}gh^2$, 得二维浅水方程

$$h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0,$$

$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x + (huv)_y = 0,$$

$$(hv)_t + (huv)_x + (hv^2 + \frac{1}{2}gh^2)_y = 0.$$

$$q = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad f(q) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \quad g(q) = \begin{bmatrix} hv \\ hvu \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}.$$

二维浅水方程的双曲性

- 由此知

$$f'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}, \; g'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{bmatrix}.$$

- 对 $\vec{n} = (n^x, n^y)$, 记 $\breve{u} = \vec{n} \cdot \vec{u}$, $c = \sqrt{gh}$, 则

$$\breve{f}'(q) = \vec{n} \cdot \vec{f}'(q) = \begin{bmatrix} 0 & n^x & n^y \\ n^x gh - u\breve{u} & \breve{u} + n^x u & n^y u \\ n^y gh - v\breve{u} & n^x v & \breve{u} + n^y v \end{bmatrix},$$

$$\breve{r}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - n^x c \\ v - n^y c \end{bmatrix}, \; \breve{r}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -n^y \\ n^x \end{bmatrix}, \; \breve{r}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + n^x c \\ v + n^y c \end{bmatrix},$$

$$\breve{\lambda}^1 = \breve{u} - c, \; \breve{\lambda}^2 = \breve{u}, \; \breve{\lambda}^3 = \breve{u} + c.$$

二维浅水方程的平面波黎曼问题

- 设 (h, hu, hv) 仅是 (x, t) 的函数. 则有

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ hvu \end{bmatrix}_x = 0.$$

- 考虑黎曼初值 $h_l = 3,\ h_r = 1,\ u_l = u_r = 0,\ v_l \neq v_r$.
- 比较一维带失踪剂的浅水方程 (见 p.284 (13.63)), 知此处 v 的地位与前者中 ϕ 的地位相同. 前者的解见 图 13.20. 该解在后者中的物理解释见 p.431 图18.1 (v 的速度间断是一个接触间断, 体现为剪切波).

注: 如果流体有较大粘性, 则接触间断会被磨光, 但粘性较小时也可能出现 Kelvin-Helmholtz 不稳定性(物理现象). 由此知对于无粘流体数值粘性的大小也会影响接触间断的数值精度和稳定性.

高维双曲守恒律的有限差分法

- 首先限于考虑二维均匀分布的矩形网格. 差分法中 Q_{ij}^n 代表 q 在网格点 (x_i, y_j, t_n) 上的近似值, 而在有限体积法中 Q_{ij}^n 通常近似真解的网格平均值
$$Q_{ij}^n \approx \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, y, t)\,dx\,dy.$$
- 差分法一般可以应用 Taylor 展开和方程, 并将微商换成适当的差商的方法将方程离散为差分格式.
- 例如, 对二维线性双曲型方程组 $q_t + Aq_x + Bq_y = 0$, 当解充分光滑时, 由方程有 $\partial_t^j q = [-(A\partial_x + B\partial_y)]^j q$.
- 将其代入 Taylor 展开式 $q_{ij}^{n+1} = [q + \Delta t q_t + \frac{\Delta t^2}{2} q_{tt} + \cdots]_{ij}^n$ 得

$$\begin{aligned} q_{ij}^{n+1} = \Big[& q - \Delta t(Aq_x + Bq_y) \\ & + \frac{\Delta t^2}{2}(A(Aq_x)_x + A(Bq_y)_x + B(Aq_x)_y + B(Bq_y)_y) + \cdots \Big]_{ij}^n. \end{aligned}$$

二维常系数线性双曲型方程组的 Lax-Wendroff 格式

- 对二维常系数线性双曲型方程组 $q_t + Aq_x + Bq_y = 0$ 有

$$q_{ij}^{n+1} = \Big[q - \Delta t(Aq_x + Bq_y) + \frac{\Delta t^2}{2}(A^2 q_{xx} + (AB+BA)q_{xy} + B^2 q_{yy}) + \cdots\Big]_{ij}^n.$$

- 用中心差商代替相应微商得二阶精度的 Lax-Wendroff 格式

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{n+1} = {} & Q_{ij}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}A(Q_{i+1,j}^n - Q_{i-1,j}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta y}B(Q_{i,j+1}^n - Q_{i,j-1}^n) \\ & + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}A^2(Q_{i+1,j}^n - 2Q_{ij}^n + Q_{i-1,j}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta y^2}B^2(Q_{i,j+1}^n - 2Q_{ij}^n + Q_{i,j-1}^n) \\ & + \frac{\Delta t^2}{8\Delta x\Delta y}(AB+BA)[(Q_{i+1,j+1}^n - Q_{i-1,j+1}^n) - (Q_{i+1,j-1}^n - Q_{i-1,j-1}^n)]. \end{aligned}$$

高维双曲守恒律的有限体积法

- Lax-Wendroff 格式在解的间断或梯度很大处由于数值色散会导致数值振荡.
- 许多一维有限体积法的方法都可以推广到高维. 例如, 迎风通量, 通量限制器, 高分辨率校正等. 最常见的有限体积法可归结为以下三类:

1. 全离散通量差方法 (有限体积上积分形式的守恒律).
2. 半离散+ Runge-Kutta 方法 (ENO, WENO).
3. 维数分裂 (分步法, 交替方向法).

作业: 17.6，17.9，18.3，18.4

Thank You!