Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

$f'(q)$ 有重特征值时给问题求解带来的一些新困难

对于非线性双曲型方程组

- 当 $f'(q)$ 可实对角化, 且无重特征值时, Hugoniot 点集与积分曲线至少给出了一个局部“坐标系”, 即任意两个 (相隔不太远的) 状态 q_l 和 q_r 间可通过 p-波顺序连接起来, 从而给出相应黎曼问题的相似性解.

- 当 $f'(q)$ 可实对角化, 但有重特征值时, 在状态空间中, 重特征值所对应的特征向量的方向有无穷多个. 因此, 将有无穷多条对应于该特征值的Hugoniot 点集与积分曲线汇聚于 q 点. 这使系统失去了内在的局部“坐标系”, 从而给黎曼问题求解带来困难.

$f'(q)$ 有重特征值时给问题求解带来的一些新困难

- 有重特征值时，常常会出现物理激波不满足 Lax-熵条件 (即 p-族激波应该有 $m-p+1$ 族特征线从左侧，p 族特征线从右侧进入该激波) 的现象，常会见到欠压缩 (undercompressive) 和过压缩 (overcompressive) 激波，即进入激波的总特征线族的数目少于或多于 $m+1$. 这给判别物理激波带来困难. 另外，难以分辨激波是哪一族的，也会给计算带来困难.
-
-

我们通过几个简单的例子来初步地认识一下其中的一些困难.

$f'(q)$ 有重特征值的例 —— 非耦合的线性对流方程组

考虑非耦合的线性对流方程组 $\begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \bar{u} & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix}_x = 0.$

对任给的黎曼初值 q_l, q_r, 都可以取 $\mathcal{W}^1 = q_r - q_l$, $s^1 = s^2 = \bar{u}$, $\mathcal{W}^2 = 0$. 这不会带来实质的困难或问题. 不过, 这样处理, 其中一个分量的跳跃间断将使另一个光滑分量的计算损失精度 (高分辨率方法在解光滑处有高阶精度, 但在跳跃间断处由于使用限制器而逼近精度下降).

最好的办法是取 $\begin{bmatrix} q_r^1 - q_l^1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ q_r^2 - q_l^2 \end{bmatrix}$, $s^1 = s^2 = \bar{u}$.

而在非线性耦合的有重特征值的问题中, 应该怎样定义波以减少不必要的精度损失并不显然.

$f'(q)$ 有重特征值的例 —— 非耦合的 Burgers 方程组

考虑非耦合的 Burgers 方程组 $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \end{bmatrix}_x = 0.$

其中 $q = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, $f(q) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \end{bmatrix}$, $f'(q) = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$. 由此知

$\lambda^1 = \min\{u, v\}, \quad \lambda^2 = \max\{u, v\}$, 相应的

$$r^1 = \begin{cases} (1,0)^T, & u < v, \\ (0,1)^T, & u > v, \end{cases} \qquad r^2 = \begin{cases} (0,1)^T, & u < v, \\ (1,0)^T, & u > v. \end{cases}$$

由此可见, 在相空间中沿 $u = v$, 1-族和 2-族特征向量场都有跳跃间断 (见图 16.6(a)). 在 $u = v$ 这条线上, 每个方向都是特征方向, 而跨过这条线两族特征向量都会旋转90度. 这自然会给利用积分曲线和 Hugoniot 点集求解黎曼问题带来困难.

$f'(q)$ 有重特征值的例 —— 非耦合的 Burgers 方程组

例如, 若 $q_l = (1,0)^T$, $q_r = (3,2)^T$ (见图 16.6(b)).

通过解 u 和 v 各自的 Burgers 方程黎曼问题, 我们知解 $u(x,t)$ 是连接 $u_l = 1$, $u_r = 3$ 的中心稀疏波 $(1 \le x/t \le 3)$, 而解 $v(x,t)$ 是连接 $v_l = 0$, $v_r = 2$ 的中心稀疏波 $(0 \le x/t \le 2)$. 在相空间中, 该解有两个中间状态 $q_l^* = (1,1)^T$, $q_r^* = (2,2)^T$ 和三段积分曲线组成的三个中心稀疏波 (见图 16.6(b))

- 对 $0 \le x/t \le 1$, 解沿 1-积分曲线由 q_l 连到 q_l^*. 仅 v 增;
- 对 $1 \le x/t \le 2$, 解沿 $u = v$-积分曲线由 q_l^* 连到 q_r^*. u, v 同增.
- 对 $2 \le x/t \le 3$, 解沿 2-积分曲线由 q_r^* 连到 q_r. 仅 u 增.

注: 对于 $m = 2$ 的严格双曲型方程组黎曼问题, 只会有一个中间状态 q^*, q_l 与 q^* 之间为 1-S(R), q^* 与 q_r 之间为 2-S(R). 上例表明, 对非严格双曲型方程组黎曼问题, 解则可能复杂得多.

欠压缩激波的例 —— 非耦合 Burgers 方程组黎曼问题

仍考虑非耦合的 Burgers 方程组 $$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \end{bmatrix}_x = 0.$$

取黎曼初值 $q_l = (2,0)^T$, $q_r = (0,2)^T$. 其解由一个 u 的速度 $s = \frac{\frac{1}{2}2^2 - 0}{2-0} = 1$ 的激波和一个 v 的波速由 0 到 2 的中心稀疏波组成.

注意, 这里激波速度位于中心稀疏波波速的范围内. 激波左右两侧的状态分别为 $q_l^* = (2,1)^T$ 和 $q_r^* = (0,1)^T$. 因此 $\lambda^1(q_l^*) = 1$, $\lambda^2(q_l^*) = 2$, $\lambda^1(q_r^*) = 0$, $\lambda^2(q_r^*) = 1$. 由此知, 只有 2-族特征线从左侧, 1-族特征线从右侧这两族特征线进入激波, 而不是严格双曲型 $m = 2$ 时应有的 3 族. 这是一个典型的欠压缩激波.

另一个问题是, 我们无从得知该激波是 1-激波还是 2-激波.

过压缩激波的例 —— 非耦合的 Burgers 方程组黎曼问题

同样考虑非耦合的 Burgers 方程组 $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t + \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \end{bmatrix}_x = 0.$

若取黎曼初值 $q_l = (5,4)^T$, $q_r = (1,2)^T$, 则其解由一个 u 的速度 $s = \frac{\frac{1}{2}5^2 - \frac{1}{2}1^2}{5-1} = 3$ 的激波和一个 v 的速度 $s = \frac{\frac{1}{2}4^2 - \frac{1}{2}2^2}{4-2} = 3$ 的激波组成. 因此由 $\lambda^1(q_l) = 4$, $\lambda^2(q_l) = 5$, $\lambda^1(q_r) = 1$, $\lambda^2(q_r) = 2$ 知从激波左右两侧各有两族特征线进入该激波.

这是一个典型的过压缩激波, 共有 4族而不是 3族特征线进入激波. 我们同样无从得知该激波是 1-激波还是 2-激波.

弱双曲型方程组 —— $f'(q)$ 特征值均为实数, 但不可实对角化

我们知道, 当 $f'(q)$ 特征值均为实数, 有重特征值 λ, 但关于 λ 的几何重数小于其代数重数时, $f'(q)$ 不可实对角化. 相应的方程组称为弱双曲型方程组. 前面所研究的所有理论和方法都不适用于弱双曲型方程组.

另一方面, 一个特征值均为实数, 但不可实对角化的矩阵可以通过任意小的扰动变换成一个特征值互异的可实对角化的矩阵.

因此可以想象, 当一个强双曲型方程组的几乎不可实对角化的矩阵收敛于一个不可实对角化的矩阵时, 相应系统的解在此过程中应该会表现出某种奇性. 我们希望由此可以了解相应弱双曲型方程组的解的某些性质.

几乎不可实对角化强双曲型方程组黎曼问题解的性质

考虑方程组 $\begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} u & \beta \\ 0 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix}_x = 0$. 记 $A := \begin{bmatrix} u & \beta \\ 0 & v \end{bmatrix}$.

其中 $\beta \neq 0$, $v < u$. 我们要考察 $u \to v$ 时解的性态. 首先, 系数矩阵的特征值为 $\lambda^1 = v$, $\lambda^2 = u$, $r^1 = (\beta, v-u)^T$, $r^2 = (1, 0)^T$.

$$R = \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ v-u & 0 \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{u-v} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ u-v & \beta \end{bmatrix}, \quad R^{-1}AR = \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}.$$

令 $u = v + \epsilon$, $\epsilon > 0$. 任给黎曼初值 q_l, q_r, 令 $\alpha = R^{-1}(q_r - q_l)$, 则有

$$\alpha^1 = -\frac{1}{\epsilon}(q_r^2 - q_l^2), \quad \alpha^2 = q_r^1 - q_l^1 + \frac{\beta}{\epsilon}(q_r^2 - q_l^2).$$

$$q_r - q_l = \alpha^1 r^1 + \alpha^2 r^2.$$

注: 当 $u \to v$ 时, r^1 与 r^2 平行, 波的强度仅当 $q_l^2 = q_r^2$ 时有限.

几乎不可实对角化强双曲型方程组黎曼问题解的极限性质

黎曼问题解的中间状态为(见图 16.7(a), $0<\epsilon\ll\beta$, $q_r^2<q_l^2$)

$$q_m=q_l+\alpha^1 r^1=\begin{bmatrix} q_l^1-\beta(q_r^2-q_l^2)/\epsilon \\ q_r^2 \end{bmatrix}.$$

可见, 当 $q_r^2\neq q_l^2$ 时, $\lim_{\epsilon\to 0} q_m^1=\infty$.

图 16.7(b) 在 x-t 平面显示了黎曼问题的解. 可见, 在 $x=\lambda^1 t$ $=vt$ 和 $x=\lambda^2 t=ut$ 之间的小锥形区域上取中间状态 q_m, 且 q_m 沿 $t=$ 常数积分当 $\epsilon\to 0$ 时为 $(-\beta t(q_r^2-q_l^2),0)^T$.

以上分析表明, 当 $\epsilon\to 0$ 时, 黎曼问题解的极限可以视为是一个以速度 v 传播的连接 q_l 与 q_r 的激波(跳跃间断) 和一个与激波处在同一个位置并以同样速度传播的具有 delta-函数奇性的波.

$u = v$ 时解含 delta-函数奇性波的 奇性源解释

1. 注意, 方程组的第二个方程 $q_t^2 + vq_x^2 = 0$ 可以独立求解:
$$q^2(x,t) = \mathring{q}^2(x - vt).$$
2. 将其代入第一个方程得一带已知源项的对流方程:
$$q_t^1 + uq_x^1 = -\beta\mathring{q}_x^2(x - vt)$$
3. 由 Duhamel 原理, 源为 $\psi(x,t)$ 时, 解的表达式为
$$q^1(x,t) = \mathring{q}^1(x - ut) + \int_0^t \psi(x - u(t-\tau), \tau)\,d\tau.$$
4. 由 $x - u(t-\tau) - v\tau = x - ut + (u-v)\tau$, 做积分变量替换 $s = x - ut + (u-v)\tau$, 若 $u \neq v$, 则得
$$\int_0^t \mathring{q}_x^2(x - u(t-\tau) - v\tau)\,d\tau = \frac{1}{u-v}\int_{x-ut}^{x-vt} \mathring{q}_x^2(s)\,ds.$$

$u=v$ 时解含 delta-函数奇性波的 奇性源解释

5. 由此得，当 $u\neq v$ 时，
$$q^1(x,t)=\mathring{q}^1(x-ut)-\frac{\beta}{u-v}\left[\mathring{q}^2(x-vt)-\mathring{q}^2(x-ut)\right].$$
6. 若 $u=v$，则 $\int_0^t \mathring{q}_x^2(x-u(t-\tau)-v\tau)d\tau=\int_0^t \mathring{q}_x^2(x-vt)d\tau$ $=t\mathring{q}_x^2(x-vt)$. 因此有 (也可在 (5) 中令 $u\to v$ 取极限得)
$$q^1(x,t)=\mathring{q}^1(x-vt)-\beta t\mathring{q}_x^2(x-vt).$$
7. 值得指出的是，(6) 给出的解(其中第二项强度随 t 变化) 并非一般线性双曲型方程初值问题所具有的行波解.
8. 将黎曼初值用 Heaviside 函数表示，则 $\mathring{q}^2(x)=q_l^2+(q_r^2-q_l^2)H(x)\ \Rightarrow\ \mathring{q}_x^2(x-vt)=(q_r^2-q_l^2)\delta(x-vt)$.
9. 因此黎曼问题的解的 q^1 分量为 (与强双曲解的极限相同)
$$q^1(x,t)=q_l^1+(q_r^1-q_l^1)H(x-vt)-\beta t(q_r^2-q_l^2)\delta(x-vt).$$

$u = v$ 时解含 delta-函数奇性波的物理解释

上例有一个简单的物理解释.

- 取 $v = 0$, $u \geq 0$. 则 $q^2(x,t) = \overset{o}{q}{}^2(x - vt) = \overset{o}{q}{}^2(x)$.
- 令 $D = -\beta(q_r^2 - q_l^2)$, 则由 (2) 知 q^1 满足方程
$$q_t^1 + uq_x^1 = D\delta(x).$$
- 这是模拟流速为 u 在 $x = 0$ 处有一孤立的示踪剂源的管道流中的示踪剂的输运方程.
- 当 $u > 0$ 时, 因为示踪剂只往下游输运, q^1 在 $x = 0$ 处有一由 q_l^1 到 q_m^1 跳跃, 跳跃强度依赖于 D (源的强度) 和 u (往下游的流速). 跳跃强度随 u 的下降而上升.
- 当 $u \to 0$ 时, 由于新进入的示踪剂滞留在 $x = 0$ 处, q^1 在 $x = 0$ 处产生一个强度正比于 Dt 的 delta 函数.
- $v \neq 0$ 情形, 若孤立示踪剂源的位置为 vt, 则物理解释类似.

线性椭圆型方程组的例

某些物理问题中, $f'(q)$ 不可实对角化, 却有成对的共轭复特征值.

- 考虑线性方程组 (比较 (3.30) 中取 $K_0 = \rho_0 = 1$ $u_0 = 0$ 的声波方程):

$$\begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}_x = 0.$$

- 则方程组的矩阵有一对共轭复特征值 $\lambda^{1,2} = \pm \mathrm{i}$.

- 由 $p_{tt} = -u_{xt}$, $u_{tx} = p_{xx}$, $u_{tt} = p_{xt}$, $p_{tx} = -u_{xx}$ 知

$$p_{tt} + p_{xx} = 0, \quad u_{tt} + u_{xx} = 0.$$

- 可见此时, p 和 u 都是椭圆型方程的解. 因此当方程组的特征值都是成对的共轭复特征值时, 称其为椭圆型方程组.

非线性双曲与椭圆混合型方程组的例

某些物理问题中, $f'(q)$ 在状态空间中的某些区域中可实对角化, 但在另一些区域中却都是成对的共轭复特征值. 这时称该方程组为双曲与椭圆混合型方程组. 例如, 有气液相变的流体介质中的声波模型方程 (其中 v 是比容, u 是速度, $p(v)$ 见图 16.8)

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t + p(v)_x = 0, \end{cases} \qquad p(v) = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}. \quad f'(q) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{bmatrix}.$$

- $f'(q)$ 的特征值为 $\pm\sqrt{-p'(v)}$. 因此, 方程组在相空间中 $\alpha < v < \beta$ 的区域上是椭圆型的, 在 $v < \alpha$ 和 $v > \beta$ 的区域上是双曲型的. (见图 16.8)
- 考虑黎曼初值 $v_l, v_r > \beta$, $u_l > 0$, $u_r < 0$ (即两股气流相撞). 如果相撞足够剧烈, 则黎曼问题的解除了向左右两侧气体中转播的激波之外, 还会有两个气液边界分别向左右两侧运动.

守恒律方程 $q_t + f(q,x)_x = 0$ 近似黎曼问题解的结构

当守恒律方程 $q_t + f(q,x)_x = 0$ 的通量显式依赖于 x 时, 我们可以将其离散化成 $q_t + f_i(q)_x = 0, \forall x \in \mathcal{C}_i, \forall i$.

界面 $x_{i-1/2}$ 处守恒律方程 $q_t + f(q,x)_x = 0$ 的近似黎曼问题为:

$$\text{方程:}\begin{cases} q_t + f_{i-1}(q)_x = 0, & x < x_{i-1/2}, \\ q_t + f_i(q)_x = 0, & x > x_{i-1/2}, \end{cases} \quad \text{初值:}\begin{cases} Q_{i-1}, & x < x_{i-1/2}, \\ Q_i, & x > x_{i-1/2}. \end{cases}$$

其解一般仍为相似性解, 即 $q(x,t) = \tilde{q}(\frac{x-x_{i-1/2}}{t-t_n})$, 且满足

- 向左传播的波为与通量 $f_{i-1}(q)$ 相关的激波或稀疏波;
- 向右传播的波为与通量 $f_i(q)$ 相关的激波或稀疏波;
- 在 $\frac{x-x_{i-1/2}}{t-t_n} = 0$ 处有一静止的状态 $Q_l^{\downarrow}$, $Q_r^{\downarrow}$ 间的跳跃间断, 且有 $f_{i-1}(Q_l^{\downarrow}) = f_i(Q_r^{\downarrow})$.

守恒律方程 $q_t + f(q,x)_x = 0$ 近似黎曼问题的求解

因此, 求解 $q_t + f(q,x)_x = 0$ 的以上近似黎曼问题就是要

- 找状态 $Q_l^{\downarrow}$, $Q_r^{\downarrow}$, 使其满足 $f_{i-1}(Q_l^{\downarrow}) = f_i(Q_r^{\downarrow})$, 同时要求
- 方程 $q_t + f_{i-1}(q)_x = 0$ 的黎曼初值为 $q_l = Q_{i-1}$, $q_r = Q_l^{\downarrow}$ 的黎曼问题的解只含左行波;
- 方程 $q_t + f_i(q)_x = 0$ 的黎曼初值为 $q_l = Q_r^{\downarrow}$, $q_r = Q_i$ 的黎曼问题的解只含右行波;

近似黎曼问题的解正是由 $q_t + f_{i-1}(q)_x = 0$ 的以上黎曼问题解的左行波, $q_t + f_i(q)_x = 0$ 的以上黎曼问题解的右行波, 和 $Q_l^{\downarrow}$, $Q_r^{\downarrow}$ 间的静止激波构成(解也可基于通量差分裂 $f_i(Q_i) - f_{i-1}(Q_{i-1}) = \sum_{p=1}^{M_w} \mathcal{Z}_{i-\frac{1}{2}}^p$).

注: 以上近似黎曼问题不一定适定, 两侧必须分别有足够多的左行波和右行波, 且静止激波应满足适当的相容性条件（熵条件）.

模型问题例: 变限速车流方程及其黎曼问题的解

- 考虑 $f(q,x) = u_{\max}(x)q(1-q)$ 的守恒律方程式黎曼问题:
- 其中 $u_{\max}(x) = \begin{cases} u_{\max,l} = 2, & x < 0, \\ u_{\max,r} = 1, & x > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} q_l = 0.13, \\ q_r = 0.1. \end{cases}$

  (见p.369 图16.9(a))
- $f_l(q_l) = 2 \times 0.13(1-0.13) = 0.2262 < f_r(0.5) = 0.25.$
- 令 $Q_r^{\downarrow} < 0.5$, s.t. $f_r(Q_r^{\downarrow}) = 0.2262 \quad \Rightarrow \quad Q_r^{\downarrow} \approx 0.3457275138.$
- $f_r(q) = q(1-q)$, 黎曼初值为 $\tilde{q}_l = Q_r^{\downarrow} > \tilde{q}_r = 0.1$ 的黎曼问题的解是一中心稀疏波 $(f_r'(q) = 1 - 2q,\ f_r'(Q_r^{\downarrow}) < f_r'(q_r))$.

模型问题例: 变限速车流方程及其黎曼问题的解

- 由此得以上变限速车流方程黎曼问题的解为 (见p214 (11.28), (11.29), p369 图16.9(b) 显示的是 $t = 40$ 的结果)

$$q(x,t) = \begin{cases} q_l = 0.13, & x < 0, \\ Q_r^{\downarrow}, & 0 < x/t < f_r'(Q_r^{\downarrow}) \approx 0.3085449724, \\ \frac{1}{2}(1 - x/t), & f_r'(Q_r^{\downarrow}) \le x/t \le f_r'(q_r), \\ q_r = 0.1, & x/t > f_r'(q_r) = 0.8 \end{cases}$$

注: 在以上问题的解中, $Q_l^{\downarrow} = q_l = 0.13$. 因此, 没有左行波.

模型问题例: 变限速车流方程及其黎曼问题的解

- 现考虑 $u_{\max}(x) = \begin{cases} u_{\max,l} = 2, & x < 0, \\ u_{\max,r} = 1, & x > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} q_l = 0.2, \\ q_r = 0.1. \end{cases}$

  (见p370 图16.10(a))
- $f_l(q_l) = 2 \times 0.2(1 - 0.2) = 0.32 > f_r(0.5) = 0.25$.
- 取 $Q_r^{\downarrow} = 0.5$, 令 $Q_l^{\downarrow} > 0.5$ s.t. $f_l(Q_l^{\downarrow}) = f_r(Q_r^{\downarrow}) = 0.25 \quad \Rightarrow$ $2Q_l^{\downarrow}(1 - Q_l^{\downarrow}) = 0.25 \quad \Rightarrow \quad Q_l^{\downarrow} \approx 0.8535533906$.
- $f_l(q) = 2q(1 - q)$, 黎曼初值为 $\hat{q}_l = 0.2 < \hat{q}_r = Q_l^{\downarrow}$ 的黎曼问题的解是速度为 $s = \frac{f_l(Q_l^{\downarrow}) - f_l(q_l)}{Q_l^{\downarrow} - q_l} \approx -0.1071067812$ 的激波.
- $f_r(q) = q(1 - q)$, 黎曼初值为 $\tilde{q}_l = Q_r^{\downarrow} > \tilde{q}_r = 0.1$ 的黎曼问题的解是一中心稀疏波 ($f_r'(q) = 1 - 2q$, $f_r'(Q_r^{\downarrow}) < f_r'(q_r)$).

模型问题例: 变限速车流方程及其黎曼问题的解

- 由此得此时变限速车流方程黎曼问题的解为 (见 (11.28), (11.29), 图 16.10(b) 显示的是 $t = 40$ 的结果)

$$q(x,t) = \begin{cases} q_l = 0.2, & x/t < s = -0.1071067812, \\ Q_l^{\downarrow} \approx 0.8535533906, & s \le x/t < 0, \\ \frac{1}{2}(1 - x/t), & 0 \le x/t \le f_r'(q_r) = 0.8, \\ q_r = 0.1, & x/t > f_r'(q_r) = 0.8 \end{cases}$$

注 1: 在以上问题的求解过程中, 若取任意 $Q_r^{\downarrow} < 0.5$, 也可以求得相应的弱解. 与取 $Q_r^{\downarrow} = 0.5$ 的结果相比, 此解在 $x = 0$ 的左侧密度增加, 右侧密度下降. 与实际车流现象不符.

注 2: 静止激波非 Lax-激波. $Q_r^{\downarrow} = 0.5$ 时, $f_l'(Q_l^{\downarrow}) < 0$, $f_r'(Q_r^{\downarrow}) = 0$. 但在 $Q_r^{\downarrow} \le 0.5$ 的弱解" 非 Lax性" 最弱 ($f_l'(Q_l^{\downarrow}) = \max$, $f_r'(Q_r^{\downarrow}) = \min$).

守恒律方程 $q_t + f(q,x)_x = 0$ 近似黎曼问题的求解

以上例子提示, 当求解守恒律方程 $q_t + f(q,x)_x = 0$ 近似黎曼问题, 若 $Q_l^\downarrow$, $Q_r^\downarrow$ 的解不唯一时, 应该取使得静止激波"非 Lax性"相对最弱(即使 $[f_r'(Q_r^\downarrow) - f_l'(Q_l^\downarrow)]$ 达到最小)的作为问题的解.

练习: 求以上车流方程黎曼初值 $q_l = 0.2$, $q_r = 0.6$; $q_l = 0.8$, $q_r = 0.4$ 和 $q_l = 0.6$, $q_r = 0.2$ 的解.

关于非守恒型非线性双曲方程组 $q_t + A(q,x)q_x = 0$

决定非守恒型非线性双曲方程组 $q_t + A(q,x)q_x = 0$ 黎曼问题解的结构往往比较复杂。间断解没有相应的R-H 跳跃间断条件.

注 1: 非守恒型非线性双曲方程组可能与若干不同的守恒律方程组相容. 而不同的守恒律方程组黎曼问题解的结构一般是不同的. 因此应该尽可能将问题化为有物理意义的守恒律方程组.

注 2: 对无法化为有物理意义的守恒律方程组的非守恒型非线性双曲方程组，一般需要利用物理过程细致的结构性关系分析给出黎曼问题解的结构.

注 3: 当黎曼问题解有间断时, $A(q,x)q_x$ 是没有明确定义的Heaviside-函数与δ-函数的乘积. 不同的光滑化方法给出的解的极限往往大相径庭。

源项与平衡律 —— 源项的类型

考虑平衡律方程 $q_t + f(q)_t = \psi(q)$, 其中 $\psi(q)$ 称为源项. 源项可由许多不同方式产生, 常见的有以下类型:

- **化学源**: 例如, 反应流. 流体中含有会产生化学反应的物质, 化学反应会改变物质的密度分布和总量, 也常常会影响流体的动力学行为 (燃烧, 爆炸等产生大量的热). 相比于对流方程, 化学反应的时间尺度通常要小得多, 相应的源项被称为刚性源项.
- **物理源**: 例如, 在磁流体中考虑重力、电磁力等等的影响.
- **几何源**: 在一个坐标系下的守恒律方程, 通过坐标变换, 在另一个坐标系下则可能表现为带源项的平衡律方程.
- **(模型) 高阶项**: 例如, 在建立输运问题时考虑粘性或扩散效应的影响, 则得 $q_t + \bar{u} q_x = \mu q_{xx}$.

平衡律方程的分步法

设源项 $\psi(q)$ 只是 q 的函数. 设初值为 $\mathring{q}(x)$. 则平衡律方程 $q_t + f(q)_x = \psi(q)$ 初值问题的分步法由以下步骤构成:

1. 取时间步长 $\Delta t > 0$. 令 $t_n = n\Delta t$.
2. 设已知 $q(x,t)$ 在 t_n 的近似解 $q(x,t_n) \approx q^n(x)$.
3. 解初值为 $q^n(x)$ 的齐次方程 $q_t + f(q)_x = 0$ 的初值问题. 设解为 $\hat{q}^n(x,t)$. 令 $\bar{q}^n(x) = \hat{q}^n(x,\Delta t)$.
4. 解初值为 $\bar{q}^n(x)$ 的常微分方程 $q_t = \psi(q)$ 的初值问题. 设解为 $\tilde{q}^n(x,t)$. 令 $q^{n+1}(x) = \tilde{q}^n(x,\Delta t)$.

注: 分步法也称为算子分裂法. 后面我们会看到这种称呼的原因.

对流-反应方程及其数值方法 —— 非分裂型方法

作为例子, 考虑方程 $q_t + \bar{u} q_x = -\beta q$, ($\bar{u}$, $\beta > 0$ 为常数).

- 解 $q(x,t)$ 沿特征线 $dx/dt = \bar{u}$ 满足方程 $dq/dt = -\beta q$.
- 设初值为 $\mathring{q}(x)$. 则初值问题的解为 $q(x,t) = e^{-\beta t}\mathring{q}(x - \bar{u}t)$.

设 $\bar{u} > 0$, 对对流部分应用迎风格式得对流-反应方程的一阶格式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}(Q_i^n - Q_{i-1}^n) - \Delta t \beta Q_i^n.$$

为构造二阶格式, 首先做关于时间步长 Δt 的 Taylor 展开

$$q(x, t+\Delta t) \approx q(x,t) + \Delta t q_t(x,t) + \frac{1}{2}\Delta t^2 q_{tt}(x,t).$$

对流-反应方程及其数值方法 —— 非分裂型方法

注意, 由方程有 $\partial_t q = (-\bar{u}\partial_x - \beta)q$, 因此有

$$\partial_t^2 q = (-\bar{u}\partial_x - \beta)^2 q = (\bar{u}^2\partial_x^2 + 2\bar{u}\beta\partial_x + \beta^2)q.$$

将 $\partial_t q$, $\partial_t^2 q$ 的表达式代入 Taylor 展开式得

$$q(x, t+\Delta t) \approx (1-\Delta t\beta+\frac{1}{2}\Delta t^2\beta^2)q-\Delta t\bar{u}(1-\Delta t\beta)q_x+\frac{1}{2}\Delta t^2\bar{u}^2 q_{xx}.$$

由此导出二阶格式

$$\begin{aligned} Q_i^{n+1} = (1 - \Delta t\beta + \frac{1}{2}\Delta t^2\beta^2)Q_i^n - \frac{\bar{u}\Delta t}{2\Delta x}(1 - \Delta t\beta)(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) \\ + \frac{\bar{u}^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}(Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i-1}^n). \end{aligned}$$

对流-反应方程及其数值方法 —— 非分裂型方法

注 1: 利用方程 $\partial_t q = (-\bar{u}\partial_x - \beta)q$ 可将 Taylor 展开式写为

$$q(x, t+\Delta t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Delta t^j}{j!}\partial_t^j q(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Delta t^j}{j!}(-\bar{u}\partial_x - \beta)^j q(x,t).$$

所以形式上有: $q(x, t+\Delta t) = \exp(-\Delta t(\bar{u}\partial_x + \beta))q(x,t).$

注 2: 由 (1) 知对流-反应方程的解算子为 $\exp(-\Delta t(\bar{u}\partial_x + \beta))$.

注 3: 对于更复杂的方程, q_{tt} (更一般地, 近似解算子) 可能难于计算, 因此构造二阶或更高阶的非分裂型格式会有困难.

注 4: 当解有间断时, 一般并不清楚应该如何在对流-反应方程的二阶非分裂型格式中有效地引入限制器.

注 5: 不过在某些情况下, 仍可将基于黎曼问题求解器的高分辨率方法的思想推广至带源项的方程的非分裂型格式.

对流-反应方程及其数值方法 —— 分裂型方法: 分步法

将对流-反应方程 $q_t + \bar{u} q_x = -\beta q$, ($\bar{u} > 0$, $\beta > 0$ 为常数) 分裂为两个子问题:

问题 A: $q_t + \bar{u} q_x = 0$, 解算子为 $\exp(-\bar{u}\Delta t \partial_x)$;

问题 B: $q_t = -\beta q$, 解算子为 $\exp(-\beta \Delta t)$.

离散计算时, 每一时间步分为 A, B 两子步, 分别近似解算子为 $\exp(-\bar{u}\Delta t \partial_x)$ 和 $\exp(-\beta \Delta t)$ 的两个子问题. 例如:

A-步 (采用一阶迎风格式): $Q_i^* = Q_i^n - \dfrac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}(Q_i^n - Q_{i-1}^n)$;

B-步 (采用向前欧拉格式): $Q_i^{n+1} = Q_i^* - \beta \Delta t Q_i^*$.

注: 以上子问题 A, B 的解算子之乘积 $\exp(-\bar{u}\Delta t \partial_x) \cdot \exp(-\beta \Delta t)$ 等于原问题的解算子 $\exp(-\Delta t(\bar{u}\partial x + \beta))$. 一般称子问题解算子之乘积（约）等于原问题的解算子的方法为算子分裂型方法.

对流-反应方程及其数值方法 —— 分裂型方法: 分步法

以上格式的单步等效格式为 (比较非分裂一阶迎风差分格式 (17.9))

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}(Q_i^n - Q_{i-1}^n) - \Delta t \beta Q_i^n + \frac{\bar{u}\beta\Delta t^2}{\Delta x}(Q_i^n - Q_{i-1}^n).$$

容易验证这仍是一个一阶格式.

如果在 A-步采用 Lax-Wendroff 格式等二阶格式, 在 B-步采用两级 Runge-Kutta 方法等二阶方法, 则可得到原问题局部截断误差为二阶的格式.

注: 但当 $\bar{u}$, β 不是常数函数时, 即便 A, B 两步都采用二阶方法, 其单步等效格式仍可能只有一阶. 即分裂型方法可能会引入分裂误差.

子问题解算子的可交换性与分裂误差

- 当 $\bar{u}$, $\beta > 0$ 均为常数时, 子问题 A, B 的解算子是可交换的, 即 $\exp(-\bar{u}\Delta t\partial_x)\cdot\exp(-\beta\Delta t) = \exp(-\beta\Delta t)\cdot\exp(-\bar{u}\Delta t\partial_x)$.
- 事实上, 对于任给的初值 $\mathring{q}(x)$, 容易验证先解问题 A, 然后以得到的解为初值再解问题 B, 得 $q(x,t) = \exp(-\beta t)\mathring{q}(x-\bar{u}t)$. (见 p.381, 第三、四段)
- 对于同样的初值 $\mathring{q}(x)$, 容易验证先解问题 B, 然后以得到的解为初值再解问题 A, 同样得 $q(x,t) = \exp(-\beta t)\mathring{q}(x-\bar{u}t)$.

子问题解算子的可交换性与分裂误差

- 这说明, 当 $\bar{u}$, $\beta > 0$ 均为常数时, 过程 (1) 先反应再对流; (2) 先对流再反应; (3) 对流和反应同时进行, 结果是同样的. 此即过程的可交换性. 反映到方程上就是解算子的可交换性. (见p382 图17.1)

- 当 $\bar{u}$, $\beta > 0$ 均为常数时, 子问题 B 的解算子 $\exp(-\beta \Delta t)$ 是解的 Taylor 展开式的算子形式 (见 (17.25)); 而子问题 A 的解算子 $\exp(-\bar{u}\Delta t \partial_x)$ 则是在解的 Taylor 展开式的基础上将 ∂_t 替换成 $-\bar{u}\partial_x$ 后得到的算子形式 (见 (17.24)).

子问题解算子的可交换性与分裂误差

- 以上利用 Taylor 展开式做法具有一般性, 可以用来检验解算子的可交换性.
- 例如, 当 $\beta(x)$ 是 x 的函数时, 容易验证

  $$\exp(-\bar{u}\Delta t\partial_x)\cdot\exp(-\beta(x)\Delta t) \neq \exp(-\beta(x)\Delta t)\cdot\exp(-\bar{u}\Delta t\partial_x).$$

  事实上, 前者展开后除了有后者所有项之外还包含如下级数 $\sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{(-\Delta t)^{j+k}\bar{u}^j}{k!j!} \sum_{l=1}^{j} C_j^l \partial_x^l(\beta^k(x))\, \partial_x^{j-l}$.
- 一般情况下, 过程 (1) 先反应再对流; (2) 先对流再反应; (3) 对流和反应同时进行, 结果互异. 即过程具有不可交换性. 反映到方程上就是解算子的不可交换性. (见p384 图17.2)

线性问题分步法的一般形式及其分裂误差

- 考虑形如 $q_t = (\mathcal{A}+\mathcal{B})q$ 的线性发展型偏微分方程, 其中 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 为关于 x 的微分算子. 为简单起见, 设 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 不显式依赖于 t.
- 于是有 $q_{tt} = (\mathcal{A}+\mathcal{B})q_t = (\mathcal{A}+\mathcal{B})^2 q, \cdots \partial_t^j q = (\mathcal{A}+\mathcal{B})^j q$.
- 由此及 $q(x,\Delta t)$ 关于 Δt 在 0 点的 Taylor 展开式得

$$q(x,\Delta t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Delta t^j}{j!} \partial_t^j q(x,0) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Delta t^j}{j!} (\mathcal{A}+\mathcal{B})^j q(x,0) = e^{\Delta t(\mathcal{A}+\mathcal{B})} q(x,0).$$

- 分步法中, 若先解 $q_t = \mathcal{A}q$ 得 $q^*(x,\Delta t) = e^{\Delta t\mathcal{A}} q(x,0)$; 再解 $q_t = \mathcal{B}q$ 得 $q^{**}(x,\Delta t) = e^{\Delta t\mathcal{B}} q^*(x,\Delta t) = e^{\Delta t\mathcal{B}} e^{\Delta t\mathcal{A}} q(x,0)$.
- 因此, 以上分步法在一个时间步中产生的分裂误差为

$$q(x,\Delta t) - q^{**}(x,\Delta t) = \left(e^{\Delta t(\mathcal{A}+\mathcal{B})} - e^{\Delta t\mathcal{B}} e^{\Delta t\mathcal{A}}\right) q(x,0).$$

线性问题分步法的一般形式及其分裂误差

- 分别将 $q^{**}(x,\Delta t)$ 和 $q(x,\Delta t)$ Taylor 展开至二阶得

$$
\begin{aligned}
q^{**}(x,\Delta t) &= \Big(I+\Delta t\mathcal{B}+\frac{\Delta t^2}{2}\mathcal{B}^2\Big)\Big(I+\Delta t\mathcal{A}+\frac{\Delta t^2}{2}\mathcal{A}^2\Big)q(x,0)+O(\Delta t^3)\\
&= \Big(I+\Delta t(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\frac{\Delta t^2}{2}(\mathcal{A}^2+2\mathcal{B}\mathcal{A}+\mathcal{B}^2)\Big)q(x,0)+O(\Delta t^3).
\end{aligned}
$$

$$
q(x,\Delta t) = \Big(I+\Delta t(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\frac{\Delta t^2}{2}(\mathcal{A}^2+\mathcal{A}\mathcal{B}+\mathcal{B}\mathcal{A}+\mathcal{B}^2)\Big)q(x,0)+O(\Delta t^3).
$$

- 因此, 以上分步法 (又称 Godunov 分裂法) 的分裂误差为

$$
q(x,\Delta t) - q^{**}(x,\Delta t) = \frac{\Delta t^2}{2}(\mathcal{A}\mathcal{B}-\mathcal{B}\mathcal{A})q(x,0) + O(\Delta t^3).
$$

线性问题分步法的一般形式及其分裂误差

- 由此知, 当交换子 $\mathcal{AB}-\mathcal{BA}\neq 0$, 即算子 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 不可交换时, Godunov 分裂法每个时间步会产生一个二阶的分裂误差.
- 而当交换子 $\mathcal{AB}-\mathcal{BA}=0$, 即算子 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 可交换时, 易证 Godunov 分裂法不产生分裂误差.

例 1: 对 $\mathcal{A}=-\bar{u}\partial_x$, $\mathcal{B}=-\beta$ (常数). $\mathcal{AB}q=\mathcal{BA}q=\bar{u}\beta q_x$. 因此, 相应问题的 Godunov 分裂法没有分裂误差.

例 2: 对 $\mathcal{A}=-\bar{u}\partial_x$, $\mathcal{B}=-\beta(x)$. $\mathcal{AB}q-\mathcal{BA}q=\bar{u}\beta'(x)q$. 因此, Godunov 分裂法的分裂误差为 $\frac{\Delta t^2}{2}\bar{u}\beta'(x)q(x,0)+O(\Delta t^3)$.

注 1: 当交换子 $\mathcal{AB}-\mathcal{BA}\neq 0$ 时, 分裂误差在每一个时间步产生 $O(\Delta t^2)$ 的误差. 所以, 以上分析表明即便每个子问题都采用高阶离散格式计算 (甚至用真解), 整体误差可能仍然只是一阶的.

线性问题分步法的一般形式及其分裂误差

注 2: 以上分析用到了 Taylor 展开式, 因此仅适用于光滑解. 事实上, 对一般问题, 当解有间断时, 数值计算的结果的确精度更低.

注 3: 另一方面, 当解有间断时, 分步法的优势之一是可以利用已知的高分辨率方法, 尽管缺乏充分的理论支撑 (有关的收敛性结果可参考 汤涛, 滕振寰等的工作).

注 4: 有意思的是, 对于光滑解, Godunov 分裂法数值解的实际精度一般都能基本上达到二阶. 这表明以上分析还有改进的余地.

Strang 分裂法及其分裂误差

Strang 对 Godunov 分裂法提出了以下改进方案: 每个时间步含三个分步

$$\begin{cases} \tfrac{1}{2}\text{A-步} & q^*(x,t) = e^{\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{A}}q(x,0); \\ \text{B-步} & q^{**}(x,t) = e^{\Delta t\mathcal{B}}q^*(x,\Delta t); \\ \tfrac{1}{2}\text{A-步} & q^{***}(x,t) = e^{\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{A}}q^{**}(x,0). \end{cases}$$

- 直接做 Taylor 展开不难验证

$$\exp\left(\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{A}\right)\exp\left(\Delta t\mathcal{B}\right)\exp\left(\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{A}\right)$$
$$=\left(I+\Delta t(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\frac{\Delta t^2}{2}(\mathcal{A}^2+\mathcal{A}\mathcal{B}+\mathcal{B}\mathcal{A}+\mathcal{B}^2)\right)q(x,0)+O(\Delta t^3).$$

- 由此知对于光滑解, Strang 分裂法的分裂误差为 $O(\Delta t^3)$.

Strang 分裂法的近似实现形式

注 1: 由 $\left(e^{\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{A}}e^{\Delta t\mathcal{B}}e^{\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{A}}\right)^n = e^{\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{A}}e^{\Delta t\mathcal{B}}\left(e^{\Delta t\mathcal{A}}e^{\Delta t\mathcal{B}}\right)^{n-1}e^{\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{A}}$, 比较 Godunov 分裂法的 n 步算子 $\left(e^{\Delta t\mathcal{A}}e^{\Delta t\mathcal{B}}\right)^n$, 知 Strang 分裂法与 Godunov 分裂法的区别仅在于前者前面少了一个 $e^{\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{A}}$, 而后面多了一个 $e^{\frac{1}{2}\Delta t\mathcal{A}}$. 因此, 不难理解 Godunov 分裂法的整体误差本质上也有二阶精度.

注 2: 若 $\begin{cases} \text{奇数步} & q^*(x,t) = e^{\Delta t\mathcal{A}}e^{\Delta t\mathcal{B}}q(x,0); \\ \text{偶数步} & q^{**}(x,t) = e^{\Delta t\mathcal{B}}e^{\Delta t\mathcal{A}}q^*(x,\Delta t), \end{cases}$ 则其等价于步长 $2\Delta t$ 的 Strang 分裂法. 因此, 整体误差本质上也是二阶.

注 3: 与 Strang 分裂法每步由两个半时间步长子步和一个全时间步长子步相比, 以上方法本质上每步只含两个全时间子步. 因此后者整体计算代价较低. 但为达到二阶精度, 后者必须两两时间步成对匹配, 配对的奇数步与偶数步的时间步长必须相同 (在二阶精度意义下), 尤其在变步长情形需特别注意.

Godunov 分裂法和 Strang 分裂法的精度

以上分析表明, 在等时间步长条件下, 更简单且计算量更小的 Godunov 分裂法与 Strang 分裂法一样具有二阶的整体分裂误差. 因此, 在与 Lax-Wendroff 格式和两级二阶 Runge-Kutta 格式配合使用时, 数值精度应该也都是二阶的.

考虑 对流-反应方程初值问题, 其中 $\bar{u} = 1$, $\beta(x) = 1 - x$, 初值是均值$= 0.25$ 的高斯分布函数. 取空间步长$\Delta x = 0.02$, 在分裂法的反应步中均采用两级二阶 Runge-Kutta格式 (见p388 例17.5).

图 17.3 比较了在 $t = 0.5$ 处, Strang 分裂法分别配合迎风格式和 Lax-Wendroff 格式, 以及 Godunov 分裂法配合 Lax-Wendroff 格式, 这三种方法的数值表现.

结果显示, 两种分裂法在配合 Lax-Wendroff 格式时的数值精度的确非常接近且明显优于 Strang 分裂法配合迎风格式的数值精度.

反应步中 ODE 数值方法及时间步长的选取

ODE 数值方法选取的几个注意事项.

- 所选取的 ODE 数值方法应该至少有二阶精度.
- 一般不能用多步法: Q_i^* 是由 Q^n 经求解另一偏微分方程 (例如对流方程) 得到的, 而上一时间步的相应值与此毫无关系.
- 显式 Runge-Kutta 方法常常效率较高. 但一定要注意时间步长必须能保证格式的稳定性. 必要时可采用较小的时间步长 $\Delta t/N$ 计算 N 步由 Q_i^* 得 Q_i^{n+1}.
- 当 ODE 部分是刚性时, 有必要采用隐式格式, 如梯形公式.
- 当源项 ψ 含高阶导数 (如粘性) 时, 也应该采用隐式格式.

分步法求定常解时可能会遇到收敛性困难

分步法求定常解时可能会遇到收敛性困难 (见p.391 §17.8).

- 例如对 $q_t + \bar{u}q_x = -\beta q$, 若 $q_t = 0$, 则有 $\bar{u}q_x = -\beta q$. 但用分步法数值上很难使两项的作用完全抵消.
- 用分步法求定常解，作为一种迭代法, 一般效率并不高.
- 用分步法求定常解，有时可能出现在定常解附近振荡但不收敛的情况，特别是在对流步使用了带限制器的高分辨率格式时 (见 p.393, 2段).
- 用分步法求定常解，有时可能出现用不同的时间步长数值解收敛到不同的数值定常解 (见 p.393, 3段).

分步法中的边界条件处理

考虑对流-反应方程初边值问题 ($\bar{u} > 0$):

$$\begin{cases} q_t + \bar{u} q_x = -\beta q, & x \in (0,1), t > 0, \\ q(x,0) = \overset{o}{q}(x), & x \in (0,1), \\ q(0,t) = g_0(t), & t > 0. \end{cases}$$

- 取 $\overset{o}{q}(x) = e^{-(\beta/\bar{u})x}$, $g_0(t) \equiv 1$. 则解为 $q(x,t) = e^{-(\beta/\bar{u})x}$.
- 在分步法中采用 Godunov 分裂法. 取 $\Delta x = 1/N$, $\bar{u}\Delta t = \Delta x$. 则 A步 $Q_i^* = Q_{i-1}^n$ 给出对流方程 $q_t + \bar{u} q_x = 0$ 的精确解. B步 $Q_i^{n+1} = e^{-\beta\Delta t} Q_i^*$ 给出 ODE $q_t = -\beta q$ 初值问题的精确解.
- 由于无分裂误差, 若初值取单元平均值, 若还能适当给出精确边界条件, 则算法 $Q_i^{n+1} = e^{-\beta\Delta t} Q_{i-1}^n$ 将给出解 $q(x, t_{n+1}) = e^{-(\beta/\bar{u})x}$ 的精确单元平均值.

分步法中的边界条件处理

- 真解第一单元平均值是

$$\frac{1}{\Delta x}\int_0^{\Delta x} e^{-(\beta/\bar{u})x}dx = -\frac{\bar{u}}{\beta\Delta x}(e^{-(\beta/\bar{u})\Delta x}-1) = 1-\frac{1}{2}(\beta/\bar{u})\Delta x+O(\Delta x^2).$$

- 若离散边界条件取 $Q_0^n = g_0(t_n) = 1$, 则有

$$Q_1^{n+1} = e^{-\beta\Delta t} = e^{-(\beta/\bar{u})\Delta x} = 1-(\beta/\bar{u})\Delta x + O(\Delta x^2).$$

- 若离散边界条件取 $Q_0^n = \frac{\bar{u}}{\beta\Delta x}(e^{(\beta/\bar{u})\Delta x}-1)$, 则有

$$Q_1^{n+1} = e^{-\beta\Delta t}Q_0^n = -\frac{\bar{u}}{\beta\Delta x}(e^{-(\beta/\bar{u})\Delta x}-1),$$

  这与真解的第一单元平均值精确相等.

注: 一般可令 $q^*(0,t)=e^{\beta(t-t_n)}g_0(t)$, 取 $Q_0^n = \frac{\bar{u}}{\Delta x}\int_{t_n}^{t_n+\frac{\Delta x}{\bar{u}}} q^*(0,\tau)d\tau$, 或其二阶近似 $Q_0^n = e^{\beta\frac{\Delta x}{2\bar{u}}}g_0(t_n+\frac{\Delta x}{2\bar{u}})$.

作业: 16.5，17.1, 17.4

Thank You!