Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

非线性守恒律方程组的真正非线性 p-族场 (p-th field)

Definition

若 $\lambda^p(\tilde{q}(\xi))$ 沿着每一条 p-族积分曲线都是 ξ 的严格单调函数, 则称该非线性守恒律方程组的 p-族场是真正非线性的.

由 $\frac{d}{d\xi}\lambda^p(\tilde{q}(\xi)) = \nabla\lambda^p(\tilde{q}(\xi)) \cdot \tilde{q}'(\xi) = \nabla\lambda^p(\tilde{q}(\xi)) \cdot r^p(\tilde{q}(\xi))$, 知

$$\nabla\lambda^p(q) \cdot r^p(q) \neq 0, \forall q \quad \Rightarrow \quad p\text{-族场是真正非线性的.}$$

对于非线性守恒律方程式, 只有一个特征值, 即 $\lambda^1(q) = f'(q)$, 不妨取相应的 1-维特征向量$r^1(q) \equiv 1$, 于是 $\nabla\lambda^1(q) \cdot r^1(q) = f''(q)$. 可见在方程式情形 $\nabla\lambda^p(q) \cdot r^p(q) \neq 0, \forall q \quad \Leftrightarrow \quad f''(q) \neq 0, \forall q$.

注: 真正非线性是非线性守恒律方程式通量凸性, 即 f'' 恒正或恒负, 的概念在非线性守恒律方程组中的推广.

非线性守恒律方程组的线性退化 p-族场

Definition

若 $\lambda^p(\tilde{q}(\xi))$ 沿着每一条 p-族积分曲线都是常数, 则称该非线性守恒律方程组的 p-族场是线性退化的.

由 $\frac{d}{d\xi}\lambda^p(\tilde{q}(\xi)) = \nabla\lambda^p(\tilde{q}(\xi)) \cdot \tilde{q}'(\xi) = \nabla\lambda^p(\tilde{q}(\xi)) \cdot r^p(\tilde{q}(\xi))$, 知

$$\nabla\lambda^p(q) \cdot r^p(q) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad p\text{-族场是线性退化的.}$$

注 1: 线性退化的 p-族场中的简波解上的特征线都是相互平行的. 此时, 简波解可以表示为 $q(x,t) = q^0(x - \lambda^p t)$.

注 2: p-族场线性退化时, $\lambda^p(q)$ 在不同的 p-族积分曲线上的取值一般并不相同. 只是此时 p-族积分曲线恰巧是 $\lambda^p(q)$ 的等值线 或者更确切地说, 是落在 $\lambda^p(q)$ 的等值面上.

注 3: 浅水方程的两个场都是真正非线性的（见图 13.13(a)(b)）.

真正非线性 p-族场中的中心稀疏波

Definition

一个真正非线性 p-族场中的简波解 $q(x,t)=\tilde{q}(\xi(x,t))$ 称为是一个中心稀疏波, 如果$\xi(x,t)=x/t$, 且存在 $\xi_1<\xi_2$ 使得

$$q(x,t)=\begin{cases} q_l \triangleq \tilde{q}(\xi_1), & x/t\le \xi_1, \\ \tilde{q}(x/t), & \xi_1\le x/t\le \xi_2, \\ q_r \triangleq \tilde{q}(\xi_2), & x/t\ge \xi_2, \end{cases}$$

其中 q_l 和 q_r 满足单调增条件 $\lambda^p(q_l)<\lambda^p(q_r)$.

注: 单调增条件 $\lambda^p(q_l)<\lambda^p(q_r)$ 是为了保证随着时间的增加特征线是渐行渐远的. 缺少该条件将导致多值解.

真正非线性 p-族场中的中心稀疏波的特征速度

将真正非线性 p-族场中的中心稀疏波 $q(x,t)=\tilde{q}(x/t)$ 代入守恒律方程组 $q_t+f(q)_x=0$ 得 $(-\frac{x}{t^2}+\frac{1}{t}\lambda^p(\tilde{q}(x/t)))\tilde{q}'(x/t)=0$, 即

$$\lambda^p(\tilde{q}(x/t))=\begin{cases}\xi_1, & x/t\le\xi_1,\\ x/t, & \xi_1\le x/t\le\xi_2,\\ \xi_2. & x/t\ge\xi_2,\end{cases}$$

这说明沿着每一条射线 $x/t=\xi\in[\xi_1,\xi_2]$, 特征速度恰为 ξ, 因此, 射线 $x=\xi t$, $\xi\in[\xi_1,\xi_2]$ 是中心稀疏波的特征线.

特别地, 我们有

$$\tilde{q}(\xi_1)=q_l,\ \lambda^p(q_l)=\xi_1,$$

$$\tilde{q}(\xi_2)=q_r,\ \lambda^p(q_r)=\xi_2.$$

真正非线性 p-族场中中心稀疏波满足的常微分方程

为了给出一个真正非线性 p-族场中的中心稀疏波, 我们必须给出函数 $\tilde{q}(x/t)$. 由以上分析知 $\tilde{q}(x/t)$ 满足关系式 $\xi = \lambda^p(\tilde{q}(\xi))$.

两边对 ξ 求导得 $1 = \nabla\lambda^p(\tilde{q}(\xi)) \cdot \tilde{q}'(\xi)$. 又由 $\tilde{q}(x/t)$ 是 p 族简波解, 知 $\tilde{q}(\xi)$ 是 p 族积分曲线, 因此有 $\tilde{q}'(\xi) = \alpha(\xi) r^p(\tilde{q}(\xi))$. 于是得

$$\alpha(\xi) = \frac{1}{\nabla\lambda^p(\tilde{q}(\xi)) \cdot r^p(\tilde{q}(\xi))}.$$

将此代入 $\tilde{q}'(\xi) = \alpha(\xi) r^p(\tilde{q}(\xi))$ 得 $\tilde{q}(\xi)$ 所应满足的常微分方程

$$\tilde{q}'(\xi) = \frac{r^p(\tilde{q}(\xi))}{\nabla\lambda^p(\tilde{q}(\xi)) \cdot r^p(\tilde{q}(\xi))}.$$

注: 方程式时该方程退化为 $f''(\tilde{q}(\xi))\tilde{q}'(\xi) = 1$ ($\Leftarrow f'(\tilde{q}(\xi)) = \xi$). 此时, 中心稀疏波也可由 $\tilde{q}(x/t) = (f')^{-1}(x/t)$ 给出.

真正非线性 p-族场中中心稀疏波的常微分方程初值问题

对于守恒律方程组, 一个真正非线性 p-族场中的中心稀疏波 $\tilde{q}(\xi)$ 是以下常微分方程初值问题的解:

$$\begin{cases} \tilde{q}'(\xi) = \frac{r^p(\tilde{q}(\xi))}{\nabla\lambda^p(\tilde{q}(\xi))\cdot r^p(\tilde{q}(\xi))}, \\ \tilde{q}(\xi_1) = q_l, \end{cases} \quad \text{以及} \quad \begin{cases} \tilde{q}'(\xi) = \frac{r^p(\tilde{q}(\xi))}{\nabla\lambda^p(\tilde{q}(\xi))\cdot r^p(\tilde{q}(\xi))}, \\ \tilde{q}(\xi_2) = q_r, \end{cases}$$

其中 q_l, q_r 同属一条 p-积分曲线, 且 $\lambda^p(q_l) = \xi_1 < \lambda^p(q_r) = \xi_2$.

注: 给定 q_l, 令 $\xi_1 = \lambda^p(q_l)$, 若 p-族场是真正非线性的, 则相应常微分方程初值问题存在唯一解 $\tilde{q}(\xi)$. $\forall\xi_2 > \xi_1$, 令 $q_r = \tilde{q}(\xi_2)$, 则

$$q(x,t) = \begin{cases} q_l, & x/t \le \xi_1, \\ \tilde{q}(x/t), & \xi_1 \le x/t \le \xi_2, \\ q_r, & x/t \ge \xi_2, \end{cases}$$

是连接 q_l 和 q_r 的 p-中心稀疏波 (见 (13.42)).

浅水方程的 1-中心稀疏波

对于浅水方程, $\lambda^1 = u - \sqrt{gh} = q^2/q^1 - \sqrt{gq^1}$,

$$r^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ q^2/q^1 - \sqrt{gq^1} \end{bmatrix}, \quad \nabla\lambda^1 = \begin{bmatrix} -q^2/(q^1)^2 - \frac{1}{2}\sqrt{g/q^1} \\ 1/q^1 \end{bmatrix}.$$

$\nabla\lambda^1 \cdot r^1 = -\frac{3}{2}\sqrt{g/q^1} < 0$. 所以 1-中心稀疏波满足的常微分方程是

$$\tilde{q}' = -\frac{2}{3}\sqrt{\tilde{q}^1/g}\begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{q}^2/\tilde{q}^1 - \sqrt{g\tilde{q}^1} \end{bmatrix}.$$

该方程组的第一个方程是 $\tilde{h}'(\xi) = -\frac{2}{3}\sqrt{\tilde{h}(\xi)/g}$, 其通解为

$$\tilde{h}(\xi) = \frac{1}{9g}(A - \xi)^2.$$

浅水方程的 1-中心稀疏波

作为一种特殊的 1-族简波解 $\tilde{q}(\xi) = \begin{bmatrix} \tilde{h}(\xi) \\ \tilde{h}(\xi)\tilde{u}(\xi) \end{bmatrix}$ 全部落在某一条 1-积分曲线上. 另一方面, 浅水方程的 1-黎曼不变量 $w^1(q) = u + 2\sqrt{gh}$ 在每一条 1-积分曲线上均为常数. 因此,

$$\tilde{u}(\xi) + 2\sqrt{g\tilde{h}(\xi)} = u_l + 2\sqrt{gh_l} = u_r + 2\sqrt{gh_r}.$$

其中后一等式相当于要求所提供的初值 (h_l, u_l), (h_r, u_r) 必须落在同一条 1-积分曲线上. 另外, 作为 1-中心稀疏波所提供的初值还应满足 $\lambda^1(q_l) < \lambda^1(q_r)$, 即 $u_l - \sqrt{gh_l} < u_r - \sqrt{gh_r}$.

作为过 (h_l, u_l) 的中心稀疏波, $\tilde{q}(\xi)$ 必须满足初始条件: $\tilde{q}(\xi_1) = q_l$ 和 $\xi_1 = \lambda^1(q_l) = u_l - \sqrt{gh_l}$. 由此得 $\frac{1}{9g}(A - (u_l - \sqrt{gh_l}))^2 = h_l$, 即 $A = u_l + 2\sqrt{gh_l}$. 再由初值计算 $\xi_2 = \lambda^1(q_r) = u_r - \sqrt{gh_r}$. 最后, 根据 (13.42) 写出连接 (h_l, u_l), (h_r, u_r) 的 1-中心稀疏波.

注: 容易验证取 A 的另一个根给出的是同一 1-中心稀疏波解.

自治非线性双曲型方程组黎曼问题的全中心稀疏波解

对于一个真正非线性严格双曲型方程组的黎曼问题, 如果存在 $q_0 = q_l$, $q_1, \cdots, q_{m-1}$, $q_m = q_r$, 满足 q_{p-1} 和 q_p 落在同一条 p-积分曲线上, 且满足 $\lambda^p(q_{p-1}) < \lambda^p(q_p)$, $p = 1, \cdots, m$, 则 q_l 和 q_r 之间的黎曼问题的解由 m 个中心稀疏波组成:

$$q(x,t) = \begin{cases} q_l, & x/t \le \lambda^1(q_l), \\ \tilde{q}_p(x/t), & \lambda^p(q_{p-1}) \le x/t \le \lambda^p(q_p),\ p = 1, \cdots, m, \\ q_p, & \lambda^p(q_p) \le x/t \le \lambda^{p+1}(q_p),\ p = 1, \cdots, m-1, \\ q_r, & x/t \ge \lambda^m(q_r). \end{cases}$$

其中 $\tilde{q}_p(x/t)$ 是连接 q_{p-1} 和 q_p 的 p-中心稀疏波.

浅水方程黎曼问题的全中心稀疏波解

考虑浅水方程的黎曼问题, 黎曼初值为:

$$h(x,0) \equiv h_0 > 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} -u_r, & x < 0, \\ u_r, & x > 0, \end{cases} \quad u_r > 0.$$

由于初值是关于中心对称的, 所以解也有同样的对称性. 由此得 $u_m = 0$. 又由于水往两边流, 因此必有 $h_m < h_0$. 所以相似性解只能是中心稀疏波(激波熵解必有 $h_m > h_r = h_l = h_0$).

(h_m, u_m) 必须即在过 (h_l, u_l) 的 1-积分曲线上, 也在过 (h_r, u_r) 的 2-积分曲线上 (本例情形见图 13.15(a)). 即

$$u_m + 2\sqrt{gh_m} = u_l + 2\sqrt{gh_l}, \quad u_m - 2\sqrt{gh_m} = u_r - 2\sqrt{gh_r}.$$

浅水方程黎曼问题的全中心稀疏波解

由此得 h_m 满足 $4\sqrt{gh_m} = (u_l - u_r) + 2(\sqrt{gh_l} + \sqrt{gh_r})$, 即

$$h_m = \frac{1}{16g}\left[(u_l - u_r) + 2(\sqrt{gh_l} + \sqrt{gh_r})\right]^2.$$

当 $u_l = -u_r$, $h_l = h_r = h_0$ 时有

$$h_m = \frac{1}{16g}\left[-2u_r + 4\sqrt{gh_0}\right]^2 = \frac{1}{4g}\left[2\sqrt{gh_0} - u_r\right]^2.$$

又 $\lambda^1(q_l) = -u_r - \sqrt{gh_0} < \frac{1}{2}u_r - \sqrt{gh_0} = 0 - \sqrt{gh_m} = \lambda^1(q_m)$
$< \lambda^2(q_m) = 0 + \sqrt{gh_m} = \frac{1}{2}u_l + \sqrt{gh_0} < u_r + \sqrt{gh_0} = \lambda^2(q_r)$.

注1：第二和第五个等式是由过 q_m 的第二和第一黎曼不变量和 $u_m = 0$ 得到的.
注2：物理解要求 $h_m \geq 0$, 由第一行知这等价于 $2(\sqrt{gh_l} + \sqrt{gh_r}) \geq (u_r - u_l)$.

浅水方程黎曼问题的全中心稀疏波解

由以上分析, 浅水方程黎曼问题的全中心稀疏波解为

$$q(x,t)=\begin{cases}(h_0,-u_r), & x/t<-u_r-\sqrt{gh_0},\\ \tilde{q}_1(x/t), & -u_r-\sqrt{gh_0}\le x/t\le \frac{1}{2}u_r-\sqrt{gh_0},\\ (\frac{1}{4g}\left[2\sqrt{gh_0}-u_r\right]^2,0), & \frac{1}{2}u_r-\sqrt{gh_0}\le x/t\le -\frac{1}{2}u_r+\sqrt{gh_0},\\ \tilde{q}_2(x/t), & -\frac{1}{2}u_r+\sqrt{gh_0}\le x/t\le u_r+\sqrt{gh_0},\\ (h_0,u_r), & x/t>u_r+\sqrt{gh_0}.\end{cases}$$

其中 $\tilde{q}_1(x/t)$ 是连接 $(h_0,-u_r)$ 和 $(h_m,0)$ 的 1-中心稀疏波.
$\tilde{q}_2(x/t)$ 是连接 $(h_m,0)$ 和 (h_0,u_r) 的 2-中心稀疏波.

注： 物理解对初值提出的条件: $-\frac{1}{2}u_r+\sqrt{gh_0}\ge\frac{1}{2}u_r-\sqrt{gh_0}$, 既 $u_r\le 2\sqrt{gh_0}$.

真正非线性严格双曲型方程组黎曼问题的全中心稀疏波解

在真正非线性严格双曲型方程组的相空间中任给两点 $q_0 = q_l$, $q_m = q_r$, (由反函数定理) 不妨设存在中间状态 $q_1, \cdots, q_{m-1}$, s.t. q_{p-1} 和 q_p 同落在一条 p-积分曲线上。由此可以定义由这 m 个中心稀疏波 (可能是多值的非物理解) 组成的黎曼问题的弱解.

要这些 p-中心稀疏波都是物理解, 则要求 $\lambda^p(q_{p-1}) < \lambda^p(q_p)$, $p = 1, \cdots, m$. 即 q_p 必须落在过 q_{p-1} 且 $\lambda^p(q) > \lambda^p(q_{p-1})$ 的半条 p-积分曲线上.

注 1: 对比非线性严格双曲守恒律方程组的全激波解 —— q_p 必须落在过 q_{p-1} 且 $\lambda^p(q) < \lambda^p(q_{p-1})$ 的半条 p-Hugoniot 点集上.

注 2: 可以证明过 q_{p-1} 的 p-积分曲线和 p-Hugoniot 点集（曲线）在 q_{p-1} 点相切且有相同的曲率.

非线性双曲守恒律方程组黎曼问题解的结构

在真正非线性严格双曲守恒律方程组的相空间中任给一点 q_*, 有过该点的 p-积分曲线和 p-Hugoniot 点集（曲线）, 它们在 q 点相切且有相同的曲率. 取 $\lambda^p(q) > \lambda^p(q_*)$ 的半条 p-积分曲线和 $\lambda^p(q) < \lambda^p(q_*)$ 的半条 p-Hugoniot 点集拼成一条过 q_* 点的 p-波曲线.

对任给的相空间中两点 $q_0 = q_l$, $q_m = q_r$, 用反函数定理可证（至少当 $\|q_l - q_r\|$ 较小时）存在中间状态 $q_1, \cdots, q_{m-1}$, s.t. q_{p-1} 和 q_p 同落在一条 p-波曲线上. 根据这些中间状态对分别落在半条 p-积分曲线还是半条 p-Hugoniot 点集上, 可以定义相应的 p-中心稀疏波或 p-激波.

非线性双曲守恒律方程组黎曼问题的解就是由这些 p-中心稀疏波或 p-激波, $p = 1, \cdots, m$, 组成的.

浅水方程黎曼问题的求解

对于给定的黎曼初值 q_l, q_r,

- 计算浅水方程的 1-波曲线

$$\phi_l(h) = \begin{cases} u_l + 2(\sqrt{gh_l} - \sqrt{gh}), & h < h_l, \text{ (1-积分曲线)} \\ u_l - (h - h_l)\sqrt{\frac{g}{2}(\frac{1}{h} + \frac{1}{h_l})}, & h > h_l, \text{ (1-Hugoniot 点集)}. \end{cases}$$

- 计算浅水方程的 2-波曲线

$$\phi_r(h) = \begin{cases} u_r - 2(\sqrt{gh_r} - \sqrt{gh}), & h < h_r, \text{ (2-积分曲线)} \\ u_r + (h - h_r)\sqrt{\frac{g}{2}(\frac{1}{h} + \frac{1}{h_r})}, & h > h_r, \text{ (2-Hugoniot 点集)}. \end{cases}$$

- 计算 1-波和 2-波曲线的交点, 即求 h_m, s.t. $\phi_l(h_m) = \phi_r(h_m)$.
- 最后, 根据 h_m 与 h_l, h_r 的关系, 以及 $u_m = \phi_l(h_m)$ 计算出具体的 1-波和 2-波是中心稀疏波还是激波.

浅水方程溃坝问题的求解

考虑浅水方程溃坝问题的黎曼初值: $h_l > h_r > 0$, $u_l = u_r = 0$.

- 计算浅水方程的 1-波曲线 (1-积分曲线) 和 2-波曲线 (2-Hugoniot 点集) 的交点坐标满足的方程

$$u_l + 2(\sqrt{gh_l} - \sqrt{gh_m}) = u_r + (h_m - h_r)\sqrt{\frac{g}{2}(\frac{1}{h_m} + \frac{1}{h_r})}.$$

- 解方程得中间状态的水深 h_m, 令 $u_m = u_l + 2(\sqrt{gh_l} - \sqrt{gh_m})$.
- 由 $(h_l, 0)$, (h_m, u_m) 给出 1-中心稀疏波 $\tilde{q}_1(x/t)$, 由 (h_m, u_m), $(h_r, 0)$ 给出 2-激波的速度 $s = \frac{h_m u_m - h_r u_r}{h_m - h_r}$ (见 (13.16)).

$$q(x,t) = \begin{cases} (h_l, 0), & x/t \le \lambda_l^1 = 0 - \sqrt{gh_l}, \\ \tilde{q}_1(x/t), & \lambda_l^1 \le x/t \le \lambda_m^1 = u_m - \sqrt{gh_m}, \\ (h_m, h_m u_m), & \lambda_m^1 \le x/t \le s = \frac{h_m u_m}{h_m - h_r}, \\ (h_r, 0), & x/t \ge s. \end{cases}$$

激波碰撞问题

- 对于具有凸通量的方程式, 两个激波碰撞之后就会合并成一个更强的激波.
- 对于有 m 个分量的真正非线性严格双曲型方程组, 两个激波碰撞之后一般会生成一个由 m 个波 (激波或中心稀疏波) 组成的相似性解.
- 最简单的情形是两个同一族的激波相互碰撞, 一般碰撞之后, 除了产生同一族的一个更强的激波之外, 还会同时产生一些相对较弱的其它族的波 (激波或中心稀疏波).
- 事实上, 两个激波碰撞的瞬间就是一个新的黎曼问题的开始, 黎曼初值以左侧激波的左侧状态为新的左侧状态, 以右侧激波的右侧状态作为新的右侧状态. 新黎曼问题的解即为碰撞后的解.

浅水方程激波碰撞问题的例

考虑浅水方程的初值问题:

$$q(x,0)=\begin{cases} q_1, & x<x_1, \\ q_2, & x_1\le x\le x_2, \\ q_3, & x>x_2, \end{cases}$$

其中 q_1, q_3 都落在 $\mathcal{S}^2(q_2)$, 即过 q_2 的 Hugoniot 点集上 (在 (13.18) 中取 $(h_*,u_*)=(h_2,u_2)$, 取 $h_1>h_2$, $h_3<h_2$, 见 p282 图13.18(a)), 此时有 $\lambda^2(q_1)>\lambda^2(q_2)>\lambda 2(q_3)$. 由此知 q_1与q_2 之间黎曼问题的解为一物理 2-激波 $\mathcal{S}_{12}$.

由 $q_3\in\mathcal{S}^2(q_2)$ 知 $s(q_2-q_3)=f(q_2)-f(q_3)\Rightarrow q_2\in\mathcal{S}^2(q_3)$. 因此, q_2 与 q_3 之间黎曼问题的解也是一物理 2-激波 $\mathcal{S}_{23}$.

浅水方程激波碰撞问题的例

由条件 $\lambda^2(q_1) > \lambda^2(q_2) > \lambda^2(q_3)$ 知 q_1 与 q_2 之间的 2-激波速度 s_{12} 大于 q_2 与 q_3 之间的 2-激波速度 s_{23}. 因此, 经过一段时间后 $\mathcal{S}_{12}$ 将追上 $\mathcal{S}_{23}$.

另一方面, $q_1 \notin \mathcal{S}^2(q_3)$ (见图 13.18(b)), $\mathcal{R}^1(q_1)$ 与 $\mathcal{S}^2(q_3)$ 交于 q_4. 可以验证, $\lambda^1(q_1) < \lambda^1(q_4)$, $\lambda^2(q_4) > \lambda^2(q_3)$. 因此, 在两个激波 $\mathcal{S}_{12}$ 与 $\mathcal{S}_{23}$ 相撞之后将产生 q_1 与 q_4 之间的 1-中心稀疏波和 q_4 与 q_3 之间的 2-激波.

线性退化(场)和接触间断(波)

- 浅水方程的两个场都是真正非线性的, 即 $\nabla\lambda^p(q)\cdot r^p(q)$ 处处不为零. 因此其简波解要么被压缩要么被扩张, 其黎曼问题的解一般总是由两个或是激波或是中心稀疏波的波组成.

- 另一种极端的情形是对某个 p, $\nabla\lambda^p(q)\cdot r^p(q)\equiv 0$, 因而在每一条 p-族的积分曲线 $\tilde{q}(\xi)$ 上, $\lambda^p(\tilde{q}(\xi))$ 为一常数 (不同的积分曲线上可能不同). 这时称 p-场是线性退化的.

- 若 p-场是线性退化的, 如果 q_l, q_r 落在同一条 p-积分曲线上, 则 q_l 和 q_r 也落在同一条 p-Hugoniot 点集上

$$f(q_r)-f(q_l)=\int_{\xi_1}^{\xi_2} f'(\tilde{q}(\xi))\tilde{q}'(\xi)d\xi=\lambda^p(q_l)\int_{\xi_1}^{\xi_2}\tilde{q}'(\xi)d\xi=\lambda^p(q_l)(q_r-q_l).$$

这意味着相应黎曼问题的解就是以速度 $s=\lambda^p(q_l)=\lambda^p(q_r)$ 传播的这一跳跃间断.

线性退化(场)和接触间断(波)

- 由此可见, 若 p-场是线性退化的, 则 p-积分曲线与 p-Hugoniot 点集重合.
- 但当 q_l, q_r 落在同一条 p-积分曲线上时, 以速度 $s = \lambda^p(q_l) = \lambda^p(q_r)$ 传播的这一跳跃间断并非通常意义下的 Lax 激波, 因为 Lax 激波两侧的特征是进入间断线的 (即 $\lambda^p(q_l) > s > \lambda^p(q_r)$), 而这里, 两侧的特征是与间断线平行的. 这样的间断称为接触间断.

线性退化(场)和接触间断(波)的例 —— 增扩型浅水方程

在原浅水方程的基础上，增加一个染料随流运动的守恒型方程 $(h\phi)_t + (uh\phi)_x = 0$, 其中 $\phi(x,t)$ 是 x 处 t 时刻染料的浓度（单位: 质量/体积), 注意由于渠道的宽度为1, 因此, $h\phi(x,t)$ 也代表染料浓度, 但单位是: 质量/长度.

$$令\ q = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ h\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{bmatrix},\ f(q) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ uh\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^2 \\ (q^2)^2/q^1 + \frac{1}{2}g(q^1)^2 \\ q^2q^3/q^1 \end{bmatrix}.$$

则增扩型浅水方程为 $q_t + f(q)_x = 0$. 直接计算得

$$f'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(q^2)^2/(q^1)^2 + gq^1 & 2q^2/q^1 & 0 \\ -q^2q^3/(q^1)^2 & q^3/q^1 & q^2/q^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -u\phi & \phi & u \end{bmatrix}.$$

线性退化(场)和接触间断(波)的例 —— 增扩型浅水方程

容易看出, 矩阵 $f'(q)$ 的左上角 2×2 子矩阵即为原浅水方程的矩阵, 而第三列的前两个元素均为零, 所以, 增扩型浅水方程的特征值是原浅水方程的两个特征值再加上 $u = f'(q)_{3,3}$. 于是有

$$\lambda^1 = u - \sqrt{gh},\ \lambda^2 = u,\ \lambda^3 = u + \sqrt{gh},$$

$$r^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - \sqrt{gh} \\ \phi \end{bmatrix},\quad r^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad r^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + \sqrt{gh} \\ \phi \end{bmatrix},$$

$$\nabla\lambda^1 = \begin{bmatrix} -\frac{u}{h} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h}} \\ \frac{1}{h} \\ 0 \end{bmatrix},\quad \nabla\lambda^2 = \begin{bmatrix} -\frac{u}{h} \\ \frac{1}{h} \\ 0 \end{bmatrix},\quad \nabla\lambda^3 = \begin{bmatrix} -\frac{u}{h} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h}} \\ \frac{1}{h} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

线性退化(场)和接触间断(波)的例 —— 增扩型浅水方程

由 $\nabla\lambda^1 \cdot r^1 = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}} < 0$, $\nabla\lambda^3 \cdot r^3 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}} > 0$, 知 1-场和 3-场都是真正非线性的. 又 $\nabla\lambda^2 \cdot r^2 \equiv 0$, 因此, 2-场是线性退化的.

注意, 由于 $r^2 = (0, 0, 1)^T$, 因此在相空间中, 线性退化 2-场的积分曲线（与 Hugoniot 点集重合）是平行于 q^3-轴的直线. 由此知在 2-场的任一简波解上都有 h, u 均为常数, 只有 ϕ 为变量.

又由 $\lambda^2 = u$ 知 2-场中的任一简波解的特征速度为常数 u.

考虑增扩型浅水方程初值为: (h_l, u_l, ϕ_l), (h_r, u_r, ϕ_r) 的黎曼问题. 我们要找中间状态 q_1, q_2, 使得 q_1 落在过 q_l 的 1-波曲线 (由半条 1-积分曲线和半条 1-Hugoniot 点集拼成) 上, q_2 落在过 q_r 的 3-波曲线 (由半条 3-积分曲线和半条 3-Hugoniot 点集拼成) 上, 同时, q_1 与 q_2 又落在同一条 2-波曲线（2-积分曲线）上.

增扩型浅水方程黎曼问题的求解

由以上分析知, 对于初值为: (h_l, u_l, ϕ_l), (h_r, u_r, ϕ_r) 的增扩型浅水方程黎曼问题, 中间状态 q_1, q_2 满足 $h_1 = h_2 = h_m$, $u_1 = u_2 = u_m$.

因此, $q_1 = (h_m, h_m u_m, h_m \phi_1)$ 落在过 $q_l = (h_l, h_l u_l, h_l \phi_l)$ 的 1-波曲线 (由半条 1-积分曲线和半条 1-Hugoniot 点集拼成) 上, $q_2 = (h_m, h_m u_m, h_m \phi_2)$ 落在过 $q_r = (h_r, h_r u_r, h_r \phi_r)$ 的 3-波曲线 (由半条 3-积分曲线和半条 3-Hugoniot 点集拼成) 上.

若 (h_m, u_m) 为浅水方程初值为: (h_l, u_l), (h_r, u_r) 的黎曼问题解的中间状态, 则 $q_1 = (h_m, h_m u_m, h_m \phi_l)$, $q_2 = (h_m, h_m u_m, h_m \phi_r)$ 即为增扩型浅水方程黎曼问题解的两个中间状态 (容易验证 q_1,q_2 分别落在 $(h_l, h_l u_l, h_l \phi_l)$ 和 $(h_r, h_r u_r, h_r \phi_r)$ 的 1-波和 3-波曲线上).

q_1 和 q_2 之间的接触间断以特征速度 $s = \lambda^2(q_1) = u_m$ 传播.

增扩型浅水方程溃坝问题的解

溃坝问题的初值为: $(h_l, 0, \phi_l)$, $(h_r, 0, \phi_r)$, $h_l > h_r$.

若取 (h_m, u_m) 为浅水方程初值为: $(h_l, 0)$, $(h_r, 0)$ 的黎曼问题解的中间状态, 则其为过 $(h_l, 0)$ 的 1-积分曲线和过 $(h_r, 0)$ 的 2-Hugoniot 点集的交点(见 (13.57), (13.58)和图13.17)，因此有

$$2(\sqrt{gh_l} - \sqrt{gh_m}) = (h_m - h_r)\sqrt{\frac{g}{2}\left(\frac{1}{h_m} + \frac{1}{h_r}\right)},$$

$$u_m = 2(\sqrt{gh_l} - \sqrt{gh_m}).$$

增扩型浅水方程 $h_l = 3$, $h_r = 1$ 溃坝问题的解见p286 图 13.20 (比较p260 图 13.5).

Godunov 方法—— 从非线性守恒律方程式到方程组

非线性守恒律方程式的 Godunov 方法可以直接推广到非线性守恒律方程方程组 (记 Q_i^n 为 q 在 t_n 时刻单元 $\mathcal{C}_i$ 上的积分平均值)

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n).$$

前提是我们会计算（或近似计算）单元界面处黎曼问题的解在 $x/t = 0$ 处的值 $q^{\downarrow}(Q_{i-1}^n, Q_i^n)$, 从而计算出数值通量

$$F_{i-1/2}^n = \mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n) = f(q^{\downarrow}(Q_{i-1}^n, Q_i^n)).$$

注: 算法的稳定性要求 Courant 数 $s_{\max}\Delta t/\Delta x \le 1$, 其中 $s_{\max}$ 是所有黎曼问题的解中最快的波速. 这一条件保证了即便在相邻界面的波相互干涉之后, 所形成的新的波在当前时间步内仍限制在所在单元内传播 (见p312 图 15.1).

Godunov 方法—— 近似计算的必要性和可行性

- 理论上说黎曼问题的解是可以计算的. 但第13章的讨论表明其计算是十分复杂且工作量较大.
- 而Godunov 方法并不要求知道黎曼问题的解的完整结构, 真正需要的只是 $Q^{\downarrow}_{i-1/2} = q^{\downarrow}(Q^n_{i-1}, Q^n_i)$ 或其近似值.
- 与方程式情形类似, $Q^{\downarrow}_{i-1/2}$ 在大多数情形取值为某两个相邻族曲线 (Hugoniot 点集或积分曲线) 交点处的中间状态, 只有当某族中心稀疏波恰巧为跨声速中心稀疏波时 $Q^{\downarrow}_{i-1/2}$ 为该中心稀疏波在 $\xi = x/t = 0$ 处的值.
- 利用这些特点, 我们可以通过简化的运算构造黎曼问题的近似解, 并在此基础上构造 Godunov 型格式.

Godunov 方法的波的传播形式

为了进一步构造高分辨率格式, 可以将 Godunov 方法写成波的传播形式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2}^n + \mathcal{A}^-\Delta Q_{i+1/2}^n),$$

其中 (见 (15.6), 比较 (12.6))

$$\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-1/2} = f(Q_{i-1/2}^{\downarrow}) - f(Q_{i-1}),$$

$$\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2} = f(Q_i) - f(Q_{i-1/2}^{\downarrow}).$$

注: Godunov 方法只用到黎曼问题解的很少的一部分信息, 这表明大大简化近似计算是可能的.

Godunov 方法的收敛性

- § 12.10 中关于非线性守恒律方程式的 Lax-Wendroff 定理也同样适用于非线性守恒律方程组：相容的守恒型格式产生的数值解序列如果是局部L^1收敛, 且一致TV有界的(见 (12.28), (12.29)), 则其极限函数 $q(x,t)$ 一定是非线性守恒律方程组的弱解.

- § 12.11 中关于非线性守恒律方程式的满足熵不等式的数值解序列的极限一定是熵解的结论也同样适用于非线性守恒律方程组：在 Lax-Wendroff 定理的条件下, 若非线性守恒律方程组存在凸的熵函数和熵通量, 且数值解序列满足由与之相容的数值熵通量定义的熵不等式(见 (12.38)), 则其极限函数 $q(x,t)$ 一定是非线性守恒律方程组的熵解.

- 必须指出: 相容的守恒型格式和熵不等式（或相应的熵条件, 如 Lax 熵条件等）是至关重要的条件.

Godunov 方法的收敛性

- 对于非线性守恒律方程式, Godunov 方法是 TVD 的, 因此是收敛的 (见 定理 12.3). 但对于非线性守恒律方程组：其解一般不具有 TVB 性质(§ 8.3.5), 因此一般也不能期望数值解序列具有 TVB 性质.
- 对于非线性守恒律方程式, Godunov 方法是单调格式, 因而是 L^1 压缩的 (见课件 ~11-c12.pdf p.14 和习题). 但这一概念也无法推广至方程组.
- Godunov 方法是熵相容的 (见§ 12.11.1), 因此其产生的数值解序列的极限（若存在）必是熵解.
- 对于非线性守恒律方程组, Godunov 方法有很好的数值表现, 但即便对浅水方程也没有一般的收敛性理论结果.

基于黎曼问题近似解的波的传播表示的两种格式

为了确定 $q^{\downarrow}(Q_{i-1}^n, Q_i^n)$ 在相空间的位置, 以及进一步构造高分辨率格式的需要, 我们希望将黎曼问题的解近似地表示成一组以特定速度 $s_{i-1/2}^p$ 传播的波 $Q_i - Q_{i-1} = \sum_{p=1}^{M_w} \mathcal{W}_{i-1/2}^p$. 我们可以

1. 令 $\hat{Q}_{i-1/2}^{\downarrow} = \hat{Q}_{i-1/2}(0) = Q_{i-1} + \sum_{p:s_{i-1/2}^p<0} \mathcal{W}_{i-1/2}^p$, 定义数值通量 $F_{i-1/2} = f(\hat{Q}_{i-1/2}^{\downarrow})$. 定义

$$\mathcal{A}^- \Delta Q_{i-1/2} = f(\hat{Q}_{i-1/2}^{\downarrow}) - f(Q_{i-1}),$$

$$\mathcal{A}^+ \Delta Q_{i-1/2} = f(Q_i) - f(\hat{Q}_{i-1/2}^{\downarrow}).$$

注: 由于单元界面两侧的特征向量组不同, M_w 可能不等于 m.

基于黎曼问题近似解的波的传播表示的两种格式

或者可以

2. 利用黎曼问题的近似解给出的波及波速直接定义

$$\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-1/2} = \sum_{p=1}^{M_w} (s^p_{i-1/2})^- \mathcal{W}^p_{i-1/2},$$

$$\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2} = \sum_{p=1}^{M_w} (s^p_{i-1/2})^+ \mathcal{W}^p_{i-1/2}.$$

然后计算下一时间步的近似单元平均值

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathcal{A}^+\Delta Q^n_{i-1/2} + \mathcal{A}^-\Delta Q^n_{i+1/2}).$$

基于黎曼问题近似解的波的传播表示的两种格式

注 1: 格式 1 是守恒型格式, 而格式 2 一般不是守恒型的格式.

注 2: 当黎曼问题的解完全由激波构成时, 格式 1 和格式 2 相同, 此时 $s^p_{i-1/2}$ 即为 p-激波的速度.

注 3: 当黎曼问题的解不是完全由激波构成时, 格式 1 与格式 2 不同. 即便在没有跨音速中心稀疏波时, 一般也是不同的. 这点与方程式情形有本质区别.

下面, 我们来介绍几种常用的黎曼问题近似求解器.

线性化方程矩阵的形式与基本条件

在单元的界面附近将方程组 $q_t + f(q)_x = 0$ 用其局部线性化方程

$$\hat{q}_t + \hat{A}_{i-1/2}\hat{q}_x = 0 \quad (\text{或简记为} q_t + \hat{A}_{i-1/2}q_x = 0)$$

近似替换, 其中 $\hat{A}_{i-1/2} \approx f'(\tilde{q})$, $\tilde{q}$ 在 Q_{i-1} 和 Q_i 的某个邻域中, $q \approx \tilde{q} + \hat{q}$. 为了保证近似的线性化方程能够给出与原非线性双曲型守恒律方程组相容的线性双曲型方程组, $\hat{A}_{i-1/2}$ 应该满足以下基本条件(**注意常系数线性双曲型方程组可视为双曲守恒律方程组**):

1. $\hat{A}_{i-1/2}$ 可实对角化, 使得线性化方程是严格双曲型的.
2. 当 Q_{i-1}, $Q_i \to \bar{q}$ 时, $\hat{A}_{i-1/2} \to f'(\bar{q})$ 是线性化方程的通量与原通量相容的基本条件之一. $F(Q_{i-1}, Q_i) = \hat{A}_{i-1/2}\hat{Q}^{\downarrow}_{i-1/2}$ 关于 Q_{i-1}, Q_i 的 Lipschitz 连续性是另一个基本条件. 后者通常可由 $\|f'(\cdot)\|$ 的有界性和适当的定义 $\tilde{q}$ 得到.

线性化方法给出的黎曼问题近似解

- 设$\hat{\lambda}^p_{i-1/2}$, $\hat{r}^p_{i-1/2}$, $p=1,\cdots,m$ 是 $\hat{A}_{i-1/2}$ 的特征值与特征向量.
- 设 $Q_i - Q_{i-1} = \sum_{p=1}^{m} \alpha^p_{i-1/2}\hat{r}^p_{i-1/2}$, 令 $\mathcal{W}^p_{i-1/2} = \alpha^p_{i-1/2}\hat{r}^p_{i-1/2}$.
- 则由方法 (1), 令 $\hat{Q}^{\downarrow}_{i-1/2} = Q_{i-1} + \sum_{p:s^p_{i-1/2}<0} \mathcal{W}^p_{i-1/2}$, 定义数值通量 $F_{i-1/2} = f(\hat{Q}^{\downarrow}_{i-1/2})$, 得到一个相容的守恒型格式.
- 而由方法 (2) 得到格式 (见 (15.10), 其中取 $s^p_{i-1/2} = \hat{\lambda}^p_{i-1/2}$, $M_w = m$) 仅当 $f(Q_i) - f(Q_{i-1}) = \sum_{p=1}^{M_w} s^p_{i-1/2}\mathcal{W}^p_{i-1/2}$ 时才是守恒型的. 这通常需要 $\hat{A}_{i-1/2}$ 满足附加的条件.
- 作为线性化方法最简单的例可取 $\hat{A}_{i-1/2} = f'(\frac{Q_{i-1}+Q_i}{2})$.

线性化方法在大多数界面处是一个合理的选择

- 守恒律方程组的解一般情况下只有为数不多的孤立激波和接触间断, 其余地方则为光滑的.
- 因此, 除了在个别单元界面处, 绝大部分地方 Q_{i-1}, Q_i 之差都很小($O(\Delta x)$ 量级). 此时, 在它们的邻域内, p-Hugoniot 点集和p-积分曲线都近似为平行直线族.
- 这说明在绝大部分单元界面处, 由这种局部直线坐标系给出的中间状态是黎曼问题中间状态的很好的近似.
- 因而, 在此类单元界面处, 除非恰好出现跨音速稀疏波情形, $Q^{\downarrow}_{i-1/2}$ 是黎曼问题解的很好的近似.
- 由此知除了为数不多的孤立激波和接触间断单元, 以及黎曼问题解含跨音速中心稀疏波的特殊情形之外, 线性化方法得到的近似解都应该有很好的逼近效果.

Roe 线性化方法—— 处理一强多弱特征波的线性化方法

动机: 一般, 即便在一个激波附近, 黎曼问题的解通常也只会在某一个特征族 ($\mathcal{W}^p$) 上有一个大的间断, 而在其它特征族上则有 $\|\mathcal{W}^j\| = O(\Delta x)$, $\forall j \neq p$. 仅当两个或更多激波相撞的瞬间, 黎曼问题的解才会有不同族的强波. 因此, 我们希望构造一种开销小, 易于实现且可有效逼近一强多弱特征波的线性化方法.

基于以上理由, 我们希望线性化矩阵 $\hat{A}_{i-1/2}$ 除了满足基本条件 (1), (2) 之外, 还应具备以下性质:

✠ 若 $\mathcal{W}^p = Q_i - Q_{i-1}$ 是黎曼问题真解的一个单一的激波时, 即 $s^p_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1}) = f(Q_i) - f(Q_{i-1})$ 时, 则 $(s^p_{i-1/2}, Q_i - Q_{i-1})$ 亦为 $\hat{A}_{i-1/2}$ 的特征对. 为此，我们可以更一般地要求

$$\hat{A}_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1}) = f(Q_i) - f(Q_{i-1}).$$

✠ 性质的要点: $\hat{A}_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1}) = f(Q_i) - f(Q_{i-1})$

由以上分析, 我们对线性化方法的矩阵提出第三个条件:

3. $\hat{A}_{i-1/2}$ 满足关系式: $\hat{A}_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1}) = f(Q_i) - f(Q_{i-1})$.

注 1: 在 ✠ 这种特殊情况下, 线性化近似解与真解完全相同.

注 2: 满足关系式 (3) 的线性化方法是守恒型方法, 因为此时总有

$$\mathcal{A}^- \Delta Q_{i-1/2} + \mathcal{A}^+ \Delta Q_{i-1/2} = f(Q_i) - f(Q_{i-1}).$$

构造满足关系式 (3) 的矩阵 $\hat{A}_{i-1/2}$ 的一种直观的做法是沿直线 $q(\xi) = Q_{i-1} + \xi(Q_i - Q_{i-1})$ 计算 $f'(q)$ 的积分平均值:

$$f(Q_i) - f(Q_{i-1}) = \int_0^1 \frac{d\, f(q(\xi))}{d\xi} d\xi = \Big[\int_0^1 f'(q(\xi)) d\xi\Big](Q_i - Q_{i-1}).$$

Roe 线性化方法—— 同时实现条件 (1), (2), (3) 的算法

以上沿直线算积分平均值的方法虽然能保证 (2) 和 (3), 但通常不能保证 (1), 即矩阵的可实对角化. 另外, 积分也未必好算.

Roe 针对一大类守恒律方程组通过引入适当的可逆的变量替换 $z = z(q)$ 解决了以上问题. 其理论架构为:

1: 令 $z(\xi) = Z_{i-1} + (Z_i - Z_{i-1})\xi$, 沿 $q(z(\xi))$ 积分得

$$f(Q_i) - f(Q_{i-1}) = \int_0^1 \frac{d\, f(q(z(\xi)))}{d\xi} d\xi = \int_0^1 \frac{d\, f(q(z(\xi)))}{dz} Z'(\xi) d\xi$$

$$= \Big[\int_0^1 \frac{d\, f(q(z(\xi)))}{dz} d\xi \Big] (Z_i - Z_{i-1}) \triangleq \hat{C}_{i-1/2}(Z_i - Z_{i-1}).$$

Roe 线性化方法—— 同时实现条件 (1), (2), (3) 的算法

2: 又沿 $q(z(\xi))$ 积分得

$$Q_i - Q_{i-1} = \int_0^1 \frac{d\, q(z(\xi))}{d\xi} d\xi = \int_0^1 \frac{d\, q(z(\xi))}{dz} Z'(\xi) d\xi$$
$$= \Big[\int_0^1 \frac{d\, q(z(\xi))}{dz} d\xi \Big] (Z_i - Z_{i-1}) \triangleq \hat{B}_{i-1/2}(Z_i - Z_{i-1}).$$

目标: 取适当的可逆变换 $z(q)$, 使得 $\hat{B}_{i-1/2}$, $\hat{C}_{i-1/2}$ 容易计算, 且 $\hat{B}_{i-1/2}^{-1}$ 易求，$\hat{C}_{i-1/2}\hat{B}_{i-1/2}^{-1}$ 可实对角化. 这样我们就可以方便的得到:

$$\hat{A}_{i-1/2} = \hat{C}_{i-1/2}\hat{B}_{i-1/2}^{-1}.$$

注: Harten 和 Lax 证明了, 当系统存在凸熵函数 $\eta(q)$ 时, 若取 $z(q) = \eta'(q)$, 则 Roe 线性化一定可行. (不排除有其它可行取法.)

Roe 线性化方法在浅水方程中的实现

对于浅水方程, $q(x,t) = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}$, 这里 $u = q^2/q^1$, $h = q^1$;

$$f(q) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^2 \\ (q^2)^2/q^1 + \frac{1}{2}g(q^1)^2 \end{bmatrix},$$

$$f'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(q^2/q^1)^2 + gq^1 & 2q^2/q^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{bmatrix}.$$

取 $z = \frac{1}{\sqrt{h}}q = \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{h} \\ \sqrt{h}u \end{bmatrix}$ 则 $q(z) = \begin{bmatrix} (z^1)^2 \\ z^1 z^2 \end{bmatrix}$, $\frac{\partial q}{\partial z} = \begin{bmatrix} 2z^1 & 0 \\ z^2 & z^1 \end{bmatrix}$,

$$f(q(z)) = \begin{bmatrix} z^1 z^2 \\ (z^2)^2 + \frac{1}{2}g(z^1)^4 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f(q(z))}{\partial z} = \begin{bmatrix} z^2 & z^1 \\ 2g(z^1)^3 & 2z^2 \end{bmatrix}.$$

Roe 线性化方法在浅水方程中的实现

以上取法的一个重要结果是矩阵 $\frac{\partial q}{\partial z}$, $\frac{\partial f(q(z))}{\partial z}$ 的各个分量都是 z^1, z^2 的多项式, 且其中除了一个是三次外其余都是一次的. 因此, 沿路径 $z(\xi) = Z_{i-1} + (Z_i - Z_{i-1})\xi$ 计算积分平均值十分简单.

由 $\int_0^1 z^p(\xi)d\xi = \frac{1}{2}(Z_{i-1}^p + Z_i^p) =: \bar{Z}^p$,

令 $x(\xi) = X_{i-1} + (X_i - X_{i-1})\xi$, 则

$$\int_0^1 x^3(\xi)d\xi = \frac{x^4(\xi)}{4(X_i - X_{i-1})}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \frac{X_i^4 - X_{i-1}^4}{4(X_i - X_{i-1})} = \frac{X_i + X_{i-1}}{2}\frac{X_i^2 + X_{i-1}^2}{2}.$$

取 $x = z^1 = \sqrt{h}$ 得 $\int_0^1 (z^1(\xi))^3 d\xi = \frac{Z_i^1 + Z_{i-1}^1}{2}\frac{(Z_i^1)^2 + (Z_{i-1}^1)^2}{2} = \bar{Z}^1\bar{h}$.

Roe 线性化方法在浅水方程中的实现

于是有

$$\hat{B}_{i-1/2}=\int_0^1\begin{bmatrix}2z^1 & 0\\ z^2 & z^1\end{bmatrix}d\xi=\begin{bmatrix}2\bar{Z}^1 & 0\\ \bar{Z}^2 & \bar{Z}^1\end{bmatrix},\quad \hat{B}_{i-1/2}^{-1}=\frac{1}{2(\bar{Z}^1)^2}\begin{bmatrix}\bar{Z}^1 & 0\\ -\bar{Z}^2 & 2\bar{Z}^1\end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_{i-1/2}=\int_0^1\begin{bmatrix}z^2 & z^1\\ 2g(z^1)^3 & 2z^2\end{bmatrix}d\xi=\begin{bmatrix}\bar{Z}^2 & \bar{Z}^1\\ 2g\bar{Z}^1\bar{h} & 2\bar{Z}^2\end{bmatrix},$$

最终得 $\hat{A}_{i-1/2}=\hat{C}_{i-1/2}\hat{B}_{i-1/2}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\hat{u}^2+g\bar{h} & 2\hat{u}\end{bmatrix}=f'(\hat{q})$,

其中 $\hat{u}=\frac{\bar{Z}^2}{\bar{Z}^1}=\frac{\sqrt{h_1}u_1+\sqrt{h_2}u_2}{\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}}$ (Roe 平均), $\hat{q}=(\bar{h},\bar{h}\hat{u})^T$. 特别地, 当 $Q_{i-1}=Q_i$ 时有 $\hat{q}=Q_i$. 可见浅水方程 Roe 线性化方法的矩阵 $\hat{A}_{i-1/2}$ (1) 可实对角化; (2) 有相容性; (3) 有 ✠ 性质; (4) 易算.

Roe 线性化方法在气体动力学欧拉方程中的实现

Roe 线性化方法在理想多方气体的气体动力学欧拉方程的实现过程中引入参数变换: $z = \rho^{-1/2} q$.所得到的矩阵 $\hat{A}_{i-1/2}$ 同样满足 (1) 可实对角化; (2) 有相容性; (3) 有 ✠ 性质; (4) 易算; 等性质. (见§ 15.3.4, p.322-323)

Roe 线性化方法在更复杂的气体动力学欧拉方程中也有成功应用. (参见书中所列参考文献).

作业: 13.9, 13.12, 15.1 (a), (b).

Thank You!