Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

二维线性声波方程组 x-, y-方向的特征值与特征向量

- 考虑 $u_0 = v_0 = 0$ 的二维线性声波方程 $q_t + Aq_x + Bq_y = 0$,

$$q = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & K_0 & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\rho & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- A, B 的特征值和特征向量分别为

$$\lambda^{x1} = -c_0, \lambda^{x2} = 0, \lambda^{x3} = c_0, \quad r^{x1} = \begin{bmatrix} -Z_0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, r^{x2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, r^{x3} = \begin{bmatrix} Z_0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda^{y1} = -c_0, \lambda^{y2} = 0, \lambda^{y3} = c_0, \quad r^{y1} = \begin{bmatrix} -Z_0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, r^{y2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, r^{y3} = \begin{bmatrix} Z_0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

二维线性声波方程组 x-, y-方向的波、波速和涨落波

- 令 $\alpha_{i-\frac{1}{2},j} = (R^x)^{-1}\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$, $\mathcal{W}_{i-\frac{1}{2},j} = R^x\alpha_{i-\frac{1}{2},j}$, $s^p_{i-\frac{1}{2},j} = \lambda^{xp}$.
- 由此得 x-方向的一次法方向涨落波 (注意, $s^2_{i-\frac{1}{2},j} = 0$, 2-波无贡献)

$$\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = s^1_{i-\frac{1}{2},j}\mathcal{W}^1_{i-\frac{1}{2},j},\ \mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = s^3_{i-\frac{1}{2},j}\mathcal{W}^3_{i-\frac{1}{2},j}.$$

- 令 $\alpha_{i,j-\frac{1}{2}} = (R^y)^{-1}\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}}$, $\mathcal{W}_{i,j-\frac{1}{2}} = R^y\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}$, $s^p_{i,j-\frac{1}{2}} = \lambda^{yp}$.
- 由此得 y-方向的一次法方向涨落波 (同样, $s^2_{i,j-\frac{1}{2}} = 0$, 2-波无贡献)

$$\mathcal{B}^-\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}} = s^1_{i,j-\frac{1}{2}}\mathcal{W}^1_{i,j-\frac{1}{2}},\ \mathcal{B}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = s^3_{i,j-\frac{1}{2}}\mathcal{W}^3_{i,j-\frac{1}{2}}.$$

二维线性声波方程组的二次切向涨落波

- 令 $\beta_{i,j\pm\frac{1}{2}} = (R^y)^{-1}\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$, $\beta_{i-1,j\pm\frac{1}{2}} = (R^y)^{-1}\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$.
- 则有 $\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \sum_{p=1}^{3}\beta^p_{i,j\pm\frac{1}{2}} r^{yp}$. $\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \sum_{p=1}^{3}\beta^p_{i-1,j\pm\frac{1}{2}} r^{yp}$.
- 及 $\mathcal{B}^+\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = c_0\beta^3_{i,j+\frac{1}{2}} r^{y3}$, $\mathcal{B}^-\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = -c_0\beta^1_{i,j-\frac{1}{2}} r^{y1}$,
  $\mathcal{B}^+\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = c_0\beta^3_{i-1,j+\frac{1}{2}} r^{y3}$, $\mathcal{B}^-\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = -c_0\beta^1_{i-1,j-\frac{1}{2}} r^{y1}$.

- 令 $\gamma_{i\pm\frac{1}{2},j} = (R^x)^{-1}\mathcal{B}^+\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}}$, $\gamma_{i\pm\frac{1}{2},j-1} = (R^x)^{-1}\mathcal{B}^-\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}}$.
- 则有 $\mathcal{B}^+\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}} = \sum_{p=1}^{3}\gamma^p_{i\pm\frac{1}{2},j} r^{xp}$. $\mathcal{B}^-\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}} = \sum_{p=1}^{3}\gamma^p_{i\pm\frac{1}{2},j-1} r^{xp}$.
- 及 $\mathcal{A}^+\mathcal{B}^+\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}} = c_0\gamma^3_{i+\frac{1}{2},j} r^{x3}$, $\mathcal{A}^-\mathcal{B}^+\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}} = -c_0\gamma^1_{i-\frac{1}{2},j} r^{x1}$,
  $\mathcal{A}^+\mathcal{B}^-\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}} = c_0\gamma^3_{i+\frac{1}{2},j-1} r^{x3}$, $\mathcal{A}^-\mathcal{B}^+\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}} = -c_0\gamma^1_{i-\frac{1}{2},j-1} r^{x1}$.

二维非均匀介质线性声波方程组一次法向涨落的计算

- 将各单元上的材料处理成均匀介质. 此时在公共界面两侧的单元有各自的系数矩阵 A, B, 及相应的特征值和特征向量.
- 令 $\alpha_{i-\frac{1}{2},j} = (R^x_{i-\frac{1}{2},j})^{-1}\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$, $\mathcal{W}_{i-\frac{1}{2},j} = R^x_{i-\frac{1}{2},j}\alpha_{i-\frac{1}{2},j}$, 同时
  令 $\alpha_{i,j-\frac{1}{2}} = (R^y_{i,j-\frac{1}{2}})^{-1}\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}}$, $\mathcal{W}_{i,j-\frac{1}{2}} = R^y_{i,j-\frac{1}{2}}\alpha_{i,j-\frac{1}{2}}$, 其中

$$R^x_{i-\frac{1}{2},j} = \begin{bmatrix} -Z_{i-1,j} & 0 & Z_{ij} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^y_{i,j-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} -Z_{i,j-1} & 0 & Z_{ij} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

令 $s^1_{i-\frac{1}{2},j} = \lambda^{x1}_{i-1,j}$, $s^3_{i-\frac{1}{2},j} = \lambda^{x3}_{i,j}$, $s^1_{i,j-\frac{1}{2}} = \lambda^{y1}_{i,j-1}$, $s^3_{i,j-\frac{1}{2}} = \lambda^{y3}_{i,j}$.

- 由此可得相应界面处的一次法向涨落波.

二维非均匀介质线性声波方程组法向涨落的切向分解

- 同理，计算界面 $(i-\frac{1}{2},j)$ 处的一次法向涨落波的切向分解时，相应的矩阵 R^y 也是跨界定义的．令

$$\beta_{i,j\pm\frac{1}{2}}=(R^y_{i,j\pm\frac{1}{2}})^{-1}\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j},\quad \beta_{i-1,j\pm\frac{1}{2}}=(R^y_{i-1,j\pm\frac{1}{2}})^{-1}\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} &= \beta^1_{i,j+\frac{1}{2}}r^{y1}_{ij}+\beta^3_{i,j+\frac{1}{2}}r^{y3}_{i,j+1},\\
\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} &= \beta^1_{i,j-\frac{1}{2}}r^{y1}_{i,j-1}+\beta^3_{i,j-\frac{1}{2}}r^{y3}_{ij},\\
\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} &= \beta^1_{i-1,j+\frac{1}{2}}r^{y1}_{i-1,j}+\beta^3_{i-1,j+\frac{1}{2}}r^{y3}_{i-1,j+1},\\
\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} &= \beta^1_{i-1,j-\frac{1}{2}}r^{y1}_{i-1,j-1}+\beta^3_{i-1,j-\frac{1}{2}}r^{y3}_{i-1,j}.
\end{aligned}$$

二维非均匀介质线性声波方程组法向涨落的切向分解

- 计算界面 $(i, j-\frac{1}{2})$ 处的一次法向涨落波的切向分解时，相应的矩阵 R^x 也是跨界定义的. 令

$$\gamma_{i\pm\frac{1}{2},j}=(R^x_{i\pm\frac{1}{2},j})^{-1}\mathcal{B}^{+}\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}},\quad \gamma_{i\pm\frac{1}{2},j-1}=(R^x_{i\pm\frac{1}{2},j-1})^{-1}\mathcal{B}^{-}\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{B}^{+}\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}}=\gamma^1_{i+\frac{1}{2},j}r^{x1}_{ij}+\gamma^3_{i+\frac{1}{2},j}r^{x3}_{i+1,j},$$

$$\mathcal{B}^{+}\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}}=\gamma^1_{i-\frac{1}{2},j}r^{x1}_{i-1,j}+\gamma^3_{i-\frac{1}{2},j}r^{x3}_{ij},$$

$$\mathcal{B}^{-}\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}}=\gamma^1_{i+\frac{1}{2},j-1}r^{x1}_{i,j-1}+\gamma^3_{i+\frac{1}{2},j-1}r^{x3}_{i+1,j-1},$$

$$\mathcal{B}^{-}\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}}=\gamma^1_{i-\frac{1}{2},j-1}r^{x1}_{i-1,j-1}+\gamma^3_{i-\frac{1}{2},j-1}r^{x3}_{i,j-1}.$$

二维非均匀介质线性声波方程组二次切向涨落的计算

- 相应的二次切向涨落波的波速 $\pm c$ 也必须取该涨落波所进入单元的相应特征值. 因此得

$$\mathcal{B}^+\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = c_{i,j+1}\beta^3_{i,j+\frac{1}{2}} r^{y3}_{i,j+1},$$

$$\mathcal{B}^-\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = -c_{i,j-1}\beta^1_{i,j-\frac{1}{2}} r^{y1}_{i,j-1},$$

$$\mathcal{B}^+\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = c_{i-1,j+1}\beta^3_{i-1,j+\frac{1}{2}} r^{y3}_{i-1,j+1},$$

$$\mathcal{B}^-\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = -c_{i-1,j-1}\beta^1_{i-1,j-\frac{1}{2}} r^{y1}_{i-1,j-1}.$$

注: 这些二次切向涨落波分别用来更新校正通量 $\tilde{G}_{i,j\pm\frac{1}{2}}$, $\tilde{G}_{i-1,j\pm\frac{1}{2}}$.

二维非均匀介质线性声波方程组二次切向涨落的计算

- 类似地得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^+\mathcal{B}^+\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}} &= c_{i+1,j}\gamma^3_{i+\frac{1}{2},j}r^{x3}_{i+1,j},\\
\mathcal{A}^-\mathcal{B}^+\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}} &= -c_{i-1,j}\gamma^1_{i-\frac{1}{2},j}r^{x1}_{i-1,j},\\
\mathcal{A}^+\mathcal{B}^-\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}} &= c_{i+1,j-1}\gamma^3_{i+\frac{1}{2},j-1}r^{x3}_{i+1,j-1},\\
\mathcal{A}^-\mathcal{B}^-\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}} &= -c_{i-1,j-1}\gamma^1_{i-\frac{1}{2},j-1}r^{x1}_{i-1,j-1}.
\end{aligned}
$$

注: 这些二次切向涨落波分别用来更新校正通量 $\tilde{F}_{i\pm\frac{1}{2},j}$, $\tilde{F}_{i\pm\frac{1}{2},j-1}$.

二维非均匀介质中线性声波方程组的数值算例

- 二维非均匀介质区域如 p.478 图 21.1(a) 所示.
- 初始平面波压力脉冲的位置如图 21.1(b) 所示.
- 在如图 21.1(b) 所示的跨界单元上密度和体模量如下定义:

$$\rho_{ij} = w_l\rho_l + w_r\rho_r, \quad K_{ij} = \left(w_l/K_l + w_r/K_r\right)^{-1},$$

  其中 w_l, w_r 分别为单元上不同介质界面左右两侧介质的面积分数. 令 $c_{ij} = \sqrt{K_{ij}/\rho_{ij}}$, $Z_{ij} = \rho_{ij}c_{ij}$.
- 图 21.2 左右两列分别显示了 100×100 和在此基础上自适应加密 (至效果与 960×960 相仿) 的网格上得到的右传声波传至不同介质界面后反射和透射的数值结果.

二维非线性守恒律方程组二次切向黎曼问题的求解

- 二维非线性守恒律方程组 $q_t + f(q)_x + g(q)_y = 0$.
- 问题: 设已知 $\mathcal{A}^{\pm}\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$, 如何计算 $\mathcal{B}^{\pm}\mathcal{A}^{\pm}\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$?
- 对于线性问题, 矩阵 B 已知, 因此只需计算 $B^{\pm}\mathcal{A}^{\pm}\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$.
- 对于非线性问题, 界面 $(i, j \pm \frac{1}{2})$ 处的Jacobi 矩阵 $g'(q)$ 未知.
- 解决办法: 参照一维黎曼问题线性化近似解法 (如 Roe 方法).
- 在用线性化近似方法求解方程 $q_t + f(q)_x = 0$ 的黎曼问题, 即一次法方向黎曼问题时, $\hat{A}$ 常取为 Jacobi 矩阵 $f'(\hat{Q}_{i-\frac{1}{2},j})$, 其中 $\hat{Q}_{i-\frac{1}{2},j}$ 是状态 $Q_{i-1,j}$, Q_{ij} 在某种意义下的平均 (§ 15.3).
- 我们可以用类似的方法计算相应的状态平均, 定义 $\hat{B}^{\pm}_{i,j\pm\frac{1}{2}}$.

二维浅水方程基于维数分裂的数值解法

- 二维浅水方程 $(\bar{\rho}=1)$: $q_t + f(q)_x + g(q)_y = 0$, 其中
$$q = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad f(q) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \quad g(q) = \begin{bmatrix} hv \\ hvu \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}.$$
- 由此知
$$f'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2+gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}, \quad g'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2+gh & 0 & 2v \end{bmatrix}.$$
- 采用维数分裂法, 则一次法向黎曼问题的求解本质上与带示踪剂的一维浅水方程组黎曼问题的求解 (§13.12.1) 相同. 实际计算时, 可以采用 Roe 方法等线性化方法求近似解.

二维浅水方程法向黎曼问题 Roe 线性化近似求解方法

- 以 x-方向为法方向为例，此时 v 的作用类似于一维问题中的示踪剂，对非线性波没有作用. 取变量 (h, hu) 的 Roe 平均 (见§15.3.3, 记 $h_l = h_{i-1,j}$, $h_r = h_{ij}$, $u_l = u_{i-1,j}$, $u_r = u_{ij}$)

$$\bar{h} = \frac{1}{2}(h_l + h_r), \quad \hat{u} = \frac{\sqrt{h_l}u_l + \sqrt{h_r}u_r}{\sqrt{h_l} + \sqrt{h_r}},$$

- 定义界面 $(i - \frac{1}{2}, j)$ 处的 Roe 矩阵 $\hat{A}_{i-\frac{1}{2},j}$ (其中 $\hat{v}$ 待定):

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\hat{u}^2 + g\bar{h} & 2\hat{u} & 0 \\ -\hat{u}\hat{v} & \hat{v} & \hat{u} \end{bmatrix} = f'(\bar{h}, \bar{h}\hat{u}, \bar{h}\hat{v}).$$

- 要求格式是守恒型的，则必须有 $\hat{A}(Q_r - Q_l) = f(Q_r) - f(Q_l)$. 由 $\bar{h}$, $\hat{u}$ Roe 平均的定义知该方程组前两个方程成立. 我们还应该取 $\hat{v}$ 使第三个方程也成立.

二维浅水方程法向黎曼问题 Roe 线性化近似求解方法

- 记 $\delta = Q_r - Q_l$, 则第三个方程为
$$-\hat{u}\hat{v}\delta^1 + \hat{v}\delta^2 + \hat{u}\delta^3 = h_r u_r v_r - h_l u_l v_l.$$
- 记 $\delta = Q_r - Q_l$, $a_l = h_l(\hat{u} - u_l)$, $a_r = h_r(u_r - \hat{u})$, 则当 $u_l \neq u_r$ 时可以解出 ($u_l = u_r$ 时, 分母为零):
$$\hat{v} = \frac{(h_r u_r v_r - h_l u_l v_l) - \hat{u}(h_r v_r - h_l v_l)}{(h_r u_r - h_l u_l) - \hat{u}(h_r - h_l)} = \frac{a_l v_l + a_r v_r}{a_l + a_r} = \frac{\sqrt{h_l} v_l + \sqrt{h_r} v_r}{\sqrt{h_l} + \sqrt{h_r}}.$$
- 当 $u_l = u_r$ ($=: \hat{u}$) 时, 第三个方程对任意的 $\hat{v}$ 恒成立. 此时, 合理的取法是取 v_l, v_r 的 Roe 平均 $\hat{v} = \frac{\sqrt{h_l} v_l + \sqrt{h_r} v_r}{\sqrt{h_l} + \sqrt{h_r}}$.
- 记 $\hat{c} = \sqrt{g\bar{h}}$, 则有 $\lambda^{x1} = \hat{u} - \hat{c}$, $\lambda^{x2} = \hat{u}$, $\lambda^{x3} = \hat{u} + \hat{c}$,
$$r^{x1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u} - \hat{c} \\ \hat{v} \end{bmatrix}, \quad r^{x2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r^{x3} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{u} + \hat{c} \\ \hat{v} \end{bmatrix}.$$

二维浅水方程 Roe 线性化近似求解方法

- 令 $\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \hat{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$, $\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \hat{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$.
- 熵校正与限制器与一维时相同 (分别见§15.3.5, §15.4).
- 类似地, 可以定义界面 $(i, j\pm\frac{1}{2})$ 处的 Roe 矩阵 $\hat{B}_{i,j\pm\frac{1}{2}}$.
- 定义二次切向黎曼问题近似解为

$$\mathcal{B}^+\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \hat{B}^+_{i,j+\frac{1}{2}}\hat{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}, \quad \mathcal{B}^-\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \hat{B}^-_{i,j-\frac{1}{2}}\hat{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j},$$

$$\mathcal{B}^+\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \hat{B}^+_{i-1,j+\frac{1}{2}}\hat{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}, \quad \mathcal{B}^-\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \hat{B}^-_{i-1,j-\frac{1}{2}}\hat{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}.$$

- 类似地, 可以定义界面 $(i, j\pm\frac{1}{2})$ 处 y-方向一次法向和二次切向黎曼问题近似解.
- 二维非线性浅水方程算例 — 径向对称溃坝问题 (见 §21.7.1).

虚拟单元 (Gohst Cell) 和数值边界条件

- 与一维情形类似地需要引入虚拟单元 (Gohst Cell).
- 例如, 对二维矩形区域, 设区域上的单元编号为
$$i = 1, 2, \cdots, m_x, \qquad j = 1, 2, \cdots, m_y.$$
引入 m_{BC} 层虚拟网格单元, 则扩展区域上网格编号延拓至
$$i = 1 - m_{BC}, \cdots, 0; \qquad i = m_x + 1, \cdots, m_x + m_{BC},$$
$$j = 1 - m_{BC}, \cdots, 0; \qquad j = m_y + 1, \cdots, m_y + m_{BC}.$$
- 基于线性重构和斜率或通量限制器的高分辨率方法一般需要取 $m_{BC} = 2$. 基于高阶多项式重构的高分辨率方法则需要取更大的 m_{BC}.

维数分裂型方法的虚拟单元和数值边界条件

- 设先扫描 x-方向由 Q^n 得 Q^*, 再扫描 y-方向由 Q^* 得 Q^{n+1}.
- 扫描 x-方向时用 Q^n 和物理边条件(一维方式)定义虚拟单元 $1 \le y \le m_y$, $1 - m_{BC} \le i \le 0$, $1 \le i - m_x \le m_{BC}$ 上的值.
- 扫描 y-方向时需要虚拟单元 $1 \le x \le m_x$, $1 - m_{BC} \le j \le 0$, $1 \le j - m_y \le m_{BC}$ 上的值. 但由于 Q^* 不是原问题在任何时刻的近似解, 因此这些值一般不能由 Q^* 和物理边条件得到.
- 一个可行的办法是将 x-方向的扫描范围拓展至 $1 \le x \le m_x$, $1 - m_{BC} \le y \le m_y + m_{BC}$. 由此得所需虚拟单元上的 Q^* 值.
- 对 Strang 分裂法($\frac{1}{2}$x-, y-, $\frac{1}{2}$x-扫描), 也可做类似的处理. 不过为了能给出后一 $\frac{1}{2}$x-扫描步的所需的全部初值 Q^{**}, 需要在 x-方向给出两倍层数的虚拟单元.

高维问题典型数值边界条件的例 —— 固壁边条件

- 固壁边条件 $\Leftrightarrow$ 边界上法向速度为零 $\Leftrightarrow$ 法向速度反对称. 以此为原则定义虚拟单元上的函数值.
- 首先, 做 x-方向左边界对称延拓, 令 $Q_{0,j} = Q_{1,j}$, $Q_{-1,j} = Q_{2,j}$, $j = 1, \cdots, m_y$; 再将对应于法向速度的分量改变符号 (乘以 -1). 对 x-方向右边界做类似处理.
- 然后, 做 y-方向下边界对称延拓, 令 $Q_{i,0} = Q_{i,1}$, $Q_{i,-1} = Q_{i,2}$, $-1 \le i \le m_x + 2$; 再将对应于法向速度的分量改变符号 (乘以 -1). 对 y-方向上边界做类似处理.

注 1: 以上数值边界处理方法恰当地定义了四个角上虚拟单元的值. 在定义其它类型数值边界条件时, 这也是重要的关注点之一.

注 2: 在带粘性的问题中可能还会要求无滑移边条件, 此时还应改变切向速度的符号.

高维问题典型数值边界条件的例 —— 吸收边条件

- 与一维情形类似, 最简单的吸收数值边界条件是零阶外推.
- 例如, 首先令 $Q_{-1,j} = Q_{1j}$, $Q_{0j} = Q_{1j}$, $j = 1, 2, \cdots, m_y$. 然后令 $Q_{i,-1} = Q_{i1}$, $Q_{i0} = Q_{i1}$, $i = -1, 0, \cdots, m_x + 2$.
- 注意, 以上过程除了定义了边上的虚拟单元值, 也定义了角上的虚拟单元值. 例如, 在左下角的四个虚拟单元上, 零阶外推给出了相同的值 $Q_{-1,-1} = Q_{-1,0} = Q_{0,-1} = Q_{00} = Q_{11}$.
- 尽管对高维问题在计算区域的边界上使用零阶外推也有不错的数值效果, 但与一维时的效果相比却打了折扣. 原因是当出流波不是方向与计算区域边界垂直的平面波时, 出流波可视为由 x- 和 y- 方向若干波叠加而成, 这些波的波速一般即有正也有负, 因此如此分解的波在计算区域的边界上一般包含了一定的入流波分量, 而零阶外推则引入了入流波分量的误差. 数值表现为边界上出现了反射波 (见图 21.7).

高维问题典型数值边界条件的例 —— 吸收边条件

- 从算法的角度看，以零阶外推为初值的一次法向黎曼问题的解在数值边界上不产生任何波，但在与数值边界垂直的界面上的一次法向黎曼问题的解一般非零．因此，二次切向黎曼问题的解一般非零．而当二次切向黎曼问题的解非零时，零阶外推边界条件就并非数值吸收边界条件（或者说只在一阶精度的意义下是数值吸收边界条件）．

- 有许多更复杂同时也更精确的数值吸收边界条件．

四边形网格上二维守恒律方程组的有限体积法

- 本章考虑四边形网格上二维守恒律方程组的有限体积法。
- 对于二维问题，单元 $\mathcal{C}$ 上的守恒律方程组可以写为

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}} q(x,y,t)dxdy = -\int_{\partial\mathcal{C}} \vec{n}(s)\cdot\vec{f}(s,t)ds,$$

  其中 $\vec{n}(s) = (n^x, n^y)$ 为 $\partial\mathcal{C}$ 上的单位外法向量，s 为弧长参数，$\vec{f}(s,t) = (f(q(x(s),y(s),t)), g(q(x(s),y(s),t)))^T$ 为通量.

- 单位弧长单位时间沿方向 $\vec{n}(s)$ 的通量由下式计算

$$\breve{F}(s) = \vec{n}(s)\cdot\vec{f}(s,t) \triangleq n^x(s)f(q(x(s),y(s),t)) + n^y(s)g(q(x(s),y(s),t)).$$

  注意，这里 f, g (因此 $\breve{F}(s)$) 都是 m 维向量.

二维守恒律方程组在单元 $\mathcal{C}$ 上的积分形式

- 将方程从 t_n 到 t_{n+1} 积分, 再除以单元面积 $|\mathcal{C}|$ 得二维守恒律方程组在单元 $\mathcal{C}$ 上的积分形式

$$\frac{1}{|\mathcal{C}|}\int_{\mathcal{C}} q(x,y,t_{n+1})dxdy = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\int_{\mathcal{C}} q(x,y,t_n)dxdy - \frac{1}{|\mathcal{C}|}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{\partial\mathcal{C}} \vec{n}(s)\cdot\vec{f}(s,t)dsdt.$$

- 有限体积法建立在方程组的以上积分形式的基础上.

二维守恒律方程组的有限体积法

- 记 Q^n 为时刻 t_n 守恒量的单元平均值的近似, $\check{F}_j^n$ 为单元的第 j 条边 (长度记为 h_j) 上法向通量平均值的近似 (数值通量), 则相应的有限体积法为

$$Q^{n+1} = Q^n - \frac{\Delta t}{|\mathcal{C}|}\sum_{j=1}^{N} h_j \check{F}_j^n.$$

- 按定义, 数值通量近似的是相应边上单位弧长单位时间沿外法向 $\vec{n}(s)$ 的平均通量, 即

$$\check{F}_j^n \approx \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\frac{1}{h_j}\int_{\text{side } j} \vec{n}(s)\cdot\vec{f}(s,t)ds\right)dt.$$

- 对一般四边形网格单元, 我们将通过设计适当的计算守恒量单元平均值与界面数值通量的方法构造有限体积格式.

逻辑矩形网格上的有限体积格式

逻辑矩形网格, 又称曲线性 (curvilinear) 四边形网格：

- 物理区域的网格由四条边都是直边的四边形单元组成.
- 这些四边形单元逻辑上可排列成行和列, 分别标记为 i 和 j.
- 单元 (i,j) 的四个相邻单元标号为 $(i\pm 1, j)$ 和 $(i, j\pm 1)$.
- 单元标号 i (或 j) 可以是 M (或 N) 周期的(见图23.1(a),(b)).

逻辑矩形网格上的有限体积格式：在单元 $\mathcal{C}_{ij}$ 上

$$Q_{ij}^{n+1}=Q_{ij}^{n}-\frac{\Delta t}{|\mathcal{C}_{ij}|}\left(h_{i+\frac{1}{2},j}\breve{F}_{i+\frac{1}{2},j}-h_{i-\frac{1}{2},j}\breve{F}_{i-\frac{1}{2},j}+h_{i,j+\frac{1}{2}}\breve{G}_{i,j+\frac{1}{2}}-h_{i,j-\frac{1}{2}}\breve{G}_{i,j-\frac{1}{2}}\right),$$

- $h_{i\pm\frac{1}{2},j}$, $\breve{F}_{i\pm\frac{1}{2},j}$ 分别是 $\mathcal{C}_{ij}$ 与 $\mathcal{C}_{i\pm 1,j}$ 界面的边长和外法向通量;
- $h_{i,j\pm\frac{1}{2}}$, $\breve{G}_{i,j\pm\frac{1}{2}}$ 分别是 $\mathcal{C}_{ij}$ 与 $\mathcal{C}_{i,j\pm 1}$ 界面的边长和外法向通量;
- $|\mathcal{C}_{ij}|$ 是 $\mathcal{C}_{ij}$ 的面积, 外法向通量的量纲为: 守恒量/长度·时间.

计算区域均匀矩形网格上的容函数型有限体积格式

- 记计算区域的坐标为 (ξ,η), 物理区域的坐标为 (x,y).
- 设 $(X(\xi,\eta),Y(\xi,\eta))$ 是从计算区域上均匀矩形网格到物理区域上逻辑矩形网格的坐标变换函数.
- 记 $\vec{h}_{i\pm\frac{1}{2},j}=\left(X(\xi_{i\pm\frac{1}{2}},\eta_{j+\frac{1}{2}})-X(\xi_{i\pm\frac{1}{2}},\eta_{j-\frac{1}{2}}),Y(\xi_{i\pm\frac{1}{2}},\eta_{j+\frac{1}{2}})-Y(\xi_{i\pm\frac{1}{2}},\eta_{j-\frac{1}{2}})\right)$, $h_{i\pm\frac{1}{2},j}=|\vec{h}_{i\pm\frac{1}{2},j}|$. 类似地定义 $\vec{h}_{i,j\pm\frac{1}{2}}$, $h_{i,j\pm\frac{1}{2}}$.
- 记 $\kappa_{ij}=\frac{|\mathcal{C}_{ij}|}{\Delta\xi\Delta\eta}$, $F_{i\pm\frac{1}{2},j}=\left(\frac{h_{i\pm\frac{1}{2},j}}{\Delta\eta}\right)\breve{F}_{i\pm\frac{1}{2},j}$, $G_{i,j\pm\frac{1}{2}}=\left(\frac{h_{i,j\pm\frac{1}{2}}}{\Delta\xi}\right)\breve{G}_{i,j\pm\frac{1}{2}}$.

则逻辑矩形网格上的有限体积格式可以表示为计算区域上带容函数 κ 的守恒律方程 $\kappa q_t+F(q)_\xi+G(q)_\eta=0$ 的有限体积格式:

$$Q_{ij}^{n+1}=Q_{ij}^{n}-\frac{\Delta t}{\kappa_{ij}\Delta\xi}\left(F_{i+\frac{1}{2},j}-F_{i-\frac{1}{2},j}\right)-\frac{\Delta t}{\kappa_{ij}\Delta\eta}\left(G_{i,j+\frac{1}{2}}-G_{i,j-\frac{1}{2}}\right).$$

单元界面数值通量的计算及相应的 Godunov 方法

Godunov 方法是典型的不做重构的 REA 算法:

- 在单元 $\mathcal{C}_{ij}$ 上, q 取常量 Q_{ij}. 令 $\kappa_{ij} = \frac{|\mathcal{C}_{ij}|}{\Delta\xi\Delta\eta}$.
- 解以 $Q_{i-1,j}$ 和 Q_{ij} 为初值的一维黎曼问题得 $Q^{\downarrow}_{i-\frac{1}{2},j}$.
- 解以 $Q_{i,j-1}$ 和 Q_{ij} 为初值的一维黎曼问题得 $Q^{\downarrow}_{i,j-\frac{1}{2}}$.
- 令 $\breve{F}_{i-\frac{1}{2},j} = \vec{n}_{i-\frac{1}{2},j} \cdot \vec{f}(Q^{\downarrow}_{i-\frac{1}{2},j})$, $\breve{G}_{i,j-\frac{1}{2}} = \vec{n}_{i,j-\frac{1}{2}} \cdot \vec{f}(Q^{\downarrow}_{i,j-\frac{1}{2}})$.
- 令 $\gamma_{i-\frac{1}{2},j} = h_{i-\frac{1}{2},j}/\Delta\eta$, $\quad F_{i-\frac{1}{2},j} = \gamma_{i-\frac{1}{2},j}\breve{F}_{i-\frac{1}{2},j}$.
- 令 $\gamma_{i,j-\frac{1}{2}} = h_{i,j-\frac{1}{2}}/\Delta\xi$, $\quad G_{i,j-\frac{1}{2}} = \gamma_{i,j-\frac{1}{2}}\breve{G}_{i,j-\frac{1}{2}}$.

$$Q^{n+1}_{ij} = Q^n_{ij} - \frac{\Delta t}{\kappa_{ij}\Delta\xi}\left(F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j}\right) - \frac{\Delta t}{\kappa_{ij}\Delta\eta}\left(G_{i,j+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}\right).$$

非守恒双曲型方程组涨落波形式的 Godunov 方法

考虑非守恒双曲型方程组 $q_t + A(x,y)q_x + B(x,y)q_y = 0$ 涨落波形式的格式(计算区域上带容函数 κ 的守恒律方程 $\kappa q_t + F(q)_\xi + G(q)_\eta = 0$ 涨落波形式的有限体积格式):

$$
\begin{aligned}
Q_{ij}^{n+1} = Q_{ij}^{n} &- \frac{\Delta t}{\kappa_{ij}\Delta\xi}\left(\mathcal{A}^{+}\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} + \mathcal{A}^{-}\Delta Q_{i+\frac{1}{2},j}\right) \\
&- \frac{\Delta t}{\kappa_{ij}\Delta\eta}\left(\mathcal{B}^{+}\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}} + \mathcal{B}^{-}\Delta Q_{i,j+\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

- 通过求解各个单元界面法向黎曼问题, 计算波和波速, 并将涨落波用相应的波、波速以及因子 κ, γ 等表示.
- 在格式中也可以考虑加入高分辨率校正项.

一次法向涨落波的计算（一阶近似），相对波速的定义

- 在单元 $\mathcal{C}_{ij}$ 上，q 取常量 Q_{ij}. 令 $\kappa_{ij} = \frac{|\mathcal{C}_{ij}|}{\Delta\xi\Delta\eta}$.
- 解以 $Q_{i-1,j}$ 和 Q_{ij} 为初值 $(\breve{A} = n^x_{i-\frac{1}{2},j}A + n^y_{i-\frac{1}{2},j}B)$ 的一维黎曼问题得沿界面法向传播的一族波 $\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2},j}$ 与相应的波速 $\breve{s}^p_{i-\frac{1}{2},j}$.
- 设 $\breve{s}^p_{i-\frac{1}{2},j} > 0$. 则在时间段 Δt 内，$\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2},j}$ 通过宽度为 $h_{i-\frac{1}{2},j}$ 的界面进入 $\mathcal{C}_{ij}$，纵深 $\breve{s}^p_{i-\frac{1}{2},j}\Delta t$. 因此，该波对 Q_{ij} 改变量的贡献为：$-\left(\frac{h_{i-\frac{1}{2},j}\breve{s}^p_{i-\frac{1}{2},j}\Delta t}{|\mathcal{C}_{ij}|}\right)\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2},j} = -\frac{\Delta t}{\kappa_{ij}\Delta\xi}\left(\frac{h_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\eta}\breve{s}^p_{i-\frac{1}{2},j}\right)\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2},j}$.
- 令 $s^p_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{h_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\eta}\breve{s}^p_{i-\frac{1}{2},j} = \gamma_{i-\frac{1}{2},j}\breve{s}^p_{i-\frac{1}{2},j}$, $s^p_{i,j-\frac{1}{2}} = \gamma_{i,j-\frac{1}{2}}\breve{s}^p_{i,j-\frac{1}{2}}$. 则得

$$\mathcal{A}^{\pm}\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \sum_p \left(s^p_{i-\frac{1}{2},j}\right)^{\pm}\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2},j}, \quad \mathcal{B}^{\pm}\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}} = \sum_p \left(s^p_{i,j-\frac{1}{2}}\right)^{\pm}\mathcal{W}^p_{i,j-\frac{1}{2}}.$$

二维常系数对流方程通量差形式的 Godunov 方法

作为例子, 考虑四边形网格上二维对流方程 $q_t + uq_x + vq_y = 0$.

- $\vec{u} = (u, v)$ 是 (常) 速度向量. $\vec{f} = \vec{u}q$ 是通量.
- 记 $\breve{u}_{i-\frac{1}{2},j} = un^x_{i-\frac{1}{2},j} + vn^y_{i-\frac{1}{2},j}$, 则界面 $(i-\frac{1}{2}, j)$ 上的法向通量可写为 $\breve{F}_{i-\frac{1}{2},j} = \vec{n}_{i-\frac{1}{2},j} \cdot \vec{f}(Q^{\downarrow}_{i-\frac{1}{2},j}) = \breve{u}_{i-\frac{1}{2},j} Q^{\downarrow}_{i-\frac{1}{2},j}$. 其中

$$Q^{\downarrow}_{i-\frac{1}{2},j} = \begin{cases} Q_{i-1,j}, & \breve{u}_{i-\frac{1}{2},j} > 0, \\ Q_{ij}, & \breve{u}_{i-\frac{1}{2},j} < 0. \end{cases} \qquad \text{（迎风）}$$

- 用长度比 $\gamma_{i-\frac{1}{2},j} = h_{i-\frac{1}{2},j}/\Delta\eta$ 将通量正规化得

$$F_{i-\frac{1}{2},j} = \gamma_{i-\frac{1}{2},j} \breve{F}_{i-\frac{1}{2},j} = \gamma_{i-\frac{1}{2},j} (\breve{u}^+_{i-\frac{1}{2},j} Q_{i-1,j} + \breve{u}^-_{i-\frac{1}{2},j} Q_{ij}).$$

二维常系数对流方程通量差形式的 Godunov 方法

- 类似地，记 $\breve{v}_{i,j-\frac{1}{2}} = un^x_{i,j-\frac{1}{2}} + vn^y_{i,j-\frac{1}{2}}$，则界面 $(i, j-\frac{1}{2})$ 上的法向通量可写为 $\breve{G}_{i,j-\frac{1}{2}} = \vec{n}_{i,j-\frac{1}{2}} \cdot \vec{f}(Q^{\downarrow}_{i,j-\frac{1}{2}}) = \breve{v}_{i,j-\frac{1}{2}} Q^{\downarrow}_{i,j-\frac{1}{2}}$.
  其中
  $$Q^{\downarrow}_{i,j-\frac{1}{2}} = \begin{cases} Q_{i,j-1}, & \breve{v}_{i,j-\frac{1}{2}} > 0, \\ Q_{ij}, & \breve{v}_{i,j-\frac{1}{2}} < 0. \end{cases} \qquad \text{（迎风）}$$

- 用长度比 $\gamma_{i,j-\frac{1}{2}} = h_{i,j-\frac{1}{2}}/\Delta\xi$ 将通量正规化得
  $$G_{i,j-\frac{1}{2}} = \gamma_{i,j-\frac{1}{2}} \breve{G}_{i,j-\frac{1}{2}} = \gamma_{i,j-\frac{1}{2}} (\breve{v}^{+}_{i,j-\frac{1}{2}} Q_{i,j-1} + \breve{v}^{-}_{i,j-\frac{1}{2}} Q_{ij}).$$

- 由此得 Godunov 方法 (Donor-Cell Upwind 方法):

$$Q^{n+1}_{ij} = Q^n_{ij} - \frac{\Delta t}{\kappa_{ij}\Delta\xi}\left(F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j}\right) - \frac{\Delta t}{\kappa_{ij}\Delta\eta}\left(G_{i,j+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}\right).$$

二维常系数对流方程通量差形式的 Godunov 方法

- 另一种做法是利用长度比 γ 和 $\breve{u}$, $\breve{v}$ 定义计算区域上单元界面上的法向速度

$$\begin{cases} U_{i-\frac{1}{2},j} = \gamma_{i-\frac{1}{2},j}\breve{u}_{i-\frac{1}{2},j}, \\ V_{i,j-\frac{1}{2}} = \gamma_{i,j-\frac{1}{2}}\breve{v}_{i,j-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- 再直接利用计算区域单元界面上的速度定义相应的界面法向通量

$$\begin{cases} F_{i-\frac{1}{2},j} = U^{+}_{i-\frac{1}{2},j}Q_{i-1,j} + U^{-}_{i-\frac{1}{2},j}Q_{ij}, \\ G_{i,j-\frac{1}{2}} = V^{+}_{i,j-\frac{1}{2}}Q_{i,j-1} + V^{-}_{i,j-\frac{1}{2}}Q_{ij}. \end{cases}$$

- 由此得同样的 Godunov 方法 (Donor-Cell Upwind 方法):

$$Q^{n+1}_{ij} = Q^{n}_{ij} - \frac{\Delta t}{\kappa_{ij}\Delta\xi}\left(F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j}\right) - \frac{\Delta t}{\kappa_{ij}\Delta\eta}\left(G_{i,j+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}\right).$$

二维常系数对流方程涨落波形式的 Godunov 方法

- 物理区域界面 $(i-\frac{1}{2},j)$ 上的法向一维黎曼问题的解产生一个波速为 $\breve{s}^1_{i-\frac{1}{2},j}=\breve{u}_{i-\frac{1}{2},j}$ 的波 $\mathcal{W}_{i-\frac{1}{2},j}=Q_{ij}-Q_{i-1,j}$.
- 物理区域界面 $(i,j-\frac{1}{2})$ 上的法向一维黎曼问题的解产生一个波速为 $\breve{s}^2_{i,j-\frac{1}{2}}=\breve{v}_{i,j-\frac{1}{2}}$ 的波 $\mathcal{W}_{i,j-\frac{1}{2}}=Q_{ij}-Q_{i,j-1}$.
- 利用长度比 γ 和 $\breve{s}^1$, $\breve{s}^2$ 定义计算区域单元界面上的波速

$$\begin{cases} s^1_{i-\frac{1}{2},j}=\gamma_{i-\frac{1}{2},j}\breve{s}^1_{i-\frac{1}{2},j}=U_{i-\frac{1}{2},j}, \\ s^2_{i,j-\frac{1}{2}}=\gamma_{i,j-\frac{1}{2}}\breve{s}^2_{i,j-\frac{1}{2}}=V_{i,j-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

- 定义计算区域相应界面上的涨落波

$$\begin{cases} \mathcal{A}^{\pm}\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}=U^{\pm}_{i-\frac{1}{2},j}(Q_{ij}-Q_{i-1,j}), \\ \mathcal{B}^{\pm}\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}}=V^{\pm}_{i,j-\frac{1}{2}}(Q_{ij}-Q_{i,j-1}). \end{cases}$$

常系数对流方程涨落波形式 Godunov 方法的守恒性

- 对于二维常系数对流方程, 在矩形网格上, 涨落波形式与通量差形式的 Godunov 方法是完全等价的, 因而也是守恒型的格式.
- 而在四边形网格上, 长度比是空间变量的函数, 此时涨落波形式与通量差形式的 Godunov 方法一般不再等价.
- 不过, 由常速度向量场 $\vec{u}$ 的散度为零, 离散法向速度满足以下离散无散条件

$$h_{i+\frac{1}{2},j}\breve{u}_{i+\frac{1}{2},j} - h_{i-\frac{1}{2},j}\breve{u}_{i-\frac{1}{2},j} + h_{i,j+\frac{1}{2}}\breve{v}_{i,j+\frac{1}{2}} - h_{i,j-\frac{1}{2}}\breve{v}_{i,j-\frac{1}{2}} = 0.$$

- 据此不难验证涨落波形式 Godunov 方法的守恒性.

注: 以上得到的波与波速还可以用于 Corner-Transport Upwind 方法和高分辨率修正项 (见§20.5, §20.6).

算例: 四边形网格上二维常系数对流方程的算例见 p.523-524.

四边形网格上二维变系数对流方程的 Godunov 方法

- 在变系数情形, 有必要区分守恒型和非守恒型的方程. 只要在相应界面定义了法向速度 $\breve{u}_{i-\frac{1}{2},j}$, $\breve{v}_{i,j-\frac{1}{2}}$, 则常系数情形的通量差或涨落波形式的方法可以自然地推广至变系数情形.
- 理论上 $\breve{u}_{i-\frac{1}{2},j}$, $\breve{v}_{i,j-\frac{1}{2}}$ 应该取为相应界面上法向速度的积分平均值. 这在计算上可能会有一定的困难.
- 当速度场 $\vec{u}$ 是无散时, 则可利用其流函数 ψ 在单元四个角点的值方便地计算 $\breve{u}_{i\pm\frac{1}{2},j}$, $\breve{v}_{i,j\pm\frac{1}{2}}$. (因为 $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$, $\therefore$ $\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{\tau} \cdot \nabla\psi$, 见§20.8.1)
- 特别地, 当速度场 $\vec{u}$ 是无散时, 在计算区域上, 法向速度 U, V 的计算与直角坐标系中平行于坐标轴的均匀矩形网格情形形式上完全相同 (即流函数 ψ 在单元四个角点值在相应计算单元边上的差商, 见(23.29), (23.30), 比较§20.8.1).

四边形网格上二维常系数声波方程 CTU 方法的框架

考虑常系数声波方程 $q_t + Aq_x + Bq_y = 0$, $(u_0 = v_0 = 0)$, 其中

$$q = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & K_0 & 0 \\ 1/\rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\rho_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 用在各单元上为常向量的 Q 近似 q. 在此速度为未知变量!
- 将单元上的速度分解成各边上的法向速度和切向速度.
- 法向速度用于定义相邻四边形公共边处法向声波方程的一维黎曼问题. 由此可得相应界面处的一次法向涨落波.
- 当 $u_0 = v_0 = 0$ 时, 边上的切向速度跳跃不会对改变单元平均值做贡献. **注意**: 切向速度跳跃一般以速度 $\vec{n} \cdot \vec{u}_0$ 传播, 从而当 $\vec{n} \cdot \vec{u}_0 \neq 0$ 时相应单元切向速度的平均值会被改变.
- 一次法向涨落波和相邻“上”、“下”边上的法向速度用于构造法向声波方程相应二次切向黎曼问题生成的涨落波.

四边形网格上二维常系数声波方程法向黎曼问题的求解

以界面 $(i-\frac{1}{2}, j)$ 为例, 考虑 $Q_{i-1,j}$, Q_{ij} 间法向黎曼问题及其求解.

- 考虑法向声波方程 $q_t + \breve{A}_{i-\frac{1}{2},j} q_n = 0$, 其中 $q_n = \nabla q \cdot \vec{n}_{i-\frac{1}{2},j}$, $\vec{n}_{i-\frac{1}{2},j}$ 为单位法向量,

$$\breve{A}_{i-\frac{1}{2},j} = \vec{n}_{i-\frac{1}{2},j} \cdot \vec{A}_{i-\frac{1}{2},j} = \begin{bmatrix} 0 & n^x_{i-\frac{1}{2},j} K_0 & n^y_{i-\frac{1}{2},j} K_0 \\ n^x_{i-\frac{1}{2},j}/\rho_0 & 0 & 0 \\ n^y_{i-\frac{1}{2},j}/\rho_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 记 $\breve{R} = \begin{bmatrix} -Z_0 & 0 & Z_0 \\ n^x & -n^y & n^x \\ n^y & n^x & n^y \end{bmatrix}$, $\alpha = \breve{R}^{-1}\Delta Q$, 则波 $\mathcal{W} = \breve{R}\alpha$.
- 用边长的长度比正则化波速得 $s^{1,3} = \mp \gamma_{i-\frac{1}{2},j} c_0$, $s^2 = 0$.
- 一次法向涨落波为 $\mathcal{A}^- \Delta Q = s^1 \mathcal{W}^1$, $\mathcal{A}^+ \Delta Q = s^3 \mathcal{W}^3$.

四边形网格上二维变系数声波方程法向黎曼问题的求解

仍以界面 $(i-\frac{1}{2},j)$ 和黎曼初值 $Q_{i-1,j}$, Q_{ij} 为例. $\breve{i}$ 分别取 $i-1$, i,

- 此时法向声波方程 $q_t + \breve{A}_{\breve{i},j} q_n = 0$ 为分片定义, 其中

$$\breve{A}_{\breve{i},j} = \vec{n}_{i-\frac{1}{2},j} \cdot \vec{A}_{\breve{i},j} = \begin{bmatrix} 0 & n^x_{i-\frac{1}{2},j} K_{\breve{i}} & n^y_{i-\frac{1}{2},j} K_{\breve{i}} \\ n^x_{i-\frac{1}{2},j}/\rho_{\breve{i}} & 0 & 0 \\ n^y_{i-\frac{1}{2},j}/\rho_{\breve{i}} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 令 $\breve{R} = \begin{bmatrix} -Z_{i-1,j} & 0 & Z_{ij} \\ n^x & -n^y & n^x \\ n^y & n^x & n^y \end{bmatrix}$, $\alpha = \breve{R}^{-1}\Delta Q$, $\mathcal{W} = \breve{R}\alpha$.

  (省略下标 $(i-\frac{1}{2},j)$)

- 用边长的长度比正则化波速得 $s^{1,3} = \mp \gamma_{i-\frac{1}{2},j} c_{i-\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}}$, $s^2 = 0$.
- 一次法向涨落波为 $\mathcal{A}^-\Delta Q = s^1\mathcal{W}^1$, $\mathcal{A}^+\Delta Q = s^3\mathcal{W}^3$.

四边形网格上变系数声波方程二次切向黎曼问题的求解

以一次法向涨落波 $\mathcal{A}^+_{i-\frac{1}{2},j}\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$ 为例, 讨论相应的二次切向黎曼问题的涨落波 $\mathcal{B}^-_{i,j-\frac{1}{2}}\mathcal{A}^+_{i-\frac{1}{2},j}\Delta Q$ 和 $\mathcal{B}^+_{i,j+\frac{1}{2}}\mathcal{A}^+_{i-\frac{1}{2},j}\Delta Q$ 的计算.

- 先考虑 $\mathcal{B}^-\mathcal{A}^+_{i-\frac{1}{2},j}\Delta Q$. 为此, 先将 $\mathcal{A}^+_{i-\frac{1}{2},j}\Delta Q$ 在界面 $(i, j-\frac{1}{2})$ 处做特征分解: $\mathcal{A}^+_{i-\frac{1}{2},j}\Delta Q = \beta^1\check{r}^1_{i,j-1} + \beta^2\check{r}^2_{i,j-\frac{1}{2}} + \beta^3\check{r}^3_{i,j+1}$,

  (省略下标 $(i, j-\frac{1}{2})$)

$$\beta = \check{R}^{-1}\mathcal{A}^+_{i-\frac{1}{2},j}\Delta Q, \quad \check{R} = [\check{r}^1_{i,j-1}\ \check{r}^2_{i,j-\frac{1}{2}}\ \check{r}^3_{i,j+1}] = \begin{bmatrix} -Z_{i,j-1} & 0 & Z_{ij} \\ n^x & -n^y & n^x \\ n^y & n^x & n^y \end{bmatrix}.$$

- 边 $(i, j-\frac{1}{2})$ 的长度比为 $\gamma_{i,j-\frac{1}{2}}$, 单元 $\mathcal{C}_{i,j-1}$ 中的声速为 $c_{i,j-1}$, 于是得 $\mathcal{B}^-_{i,j-\frac{1}{2}}\mathcal{A}^+_{i-\frac{1}{2},j}\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = -\gamma_{i,j-\frac{1}{2}}c_{i,j-1}\check{r}^1_{i,j-1}$.
- 同理可得 $\mathcal{B}^+_{i,j+\frac{1}{2}}\mathcal{A}^+_{i-\frac{1}{2},j}\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \gamma_{i,j+\frac{1}{2}}c_{i,j+1}\check{r}^3_{i,j+1}$.

四边形网格上声波方程黎曼问题的局部一维正规化

- 以上方法基于求解法向方程 $q_t + \check{A} q_n = 0$ 一维黎曼问题. 注意, 该问题并非一维声波方程的黎曼问题.
- 若将声波的速度沿相邻单元公共边分解成法向和切向分量, 则压力和法向速度分量满足一维声波方程, 而切向速度分量则是以速度 $u_{0n} = \vec{u}_0 \cdot \vec{n}$ 运动的接触间断.
- 经过局部一维正规化, $\check{q} = (p, u_n, v_\tau)^T$ 满足一维声波方程 $\check{q}_t + A\check{q}_x = 0$. 这里, x, y 为 $\vec{n}$, $\vec{\tau}$ 定义的直角坐标系的坐标.
- 局部一维正规化的好处在于可以充分利用成熟的一维黎曼问题求解器.

旋转变换与声波方程黎曼问题的局部一维正规化

以界面 $(i-\frac{1}{2},j)$ 处黎曼初值 $Q_{i-1,j}$, Q_{ij} 的法向涨落波计算为例:

1. 令 $\mathcal{R}_{i-\frac{1}{2},j}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & n^x_{i-\frac{1}{2},j} & n^y_{i-\frac{1}{2},j}\\ 0 & -n^y_{i-\frac{1}{2},j} & n^x_{i-\frac{1}{2},j}\end{bmatrix}$, $\begin{cases}\check{Q}_l=\mathcal{R}_{i-\frac{1}{2},j}Q_{i-1,j},\\ \check{Q}_r=\mathcal{R}_{i-\frac{1}{2},j}Q_{ij}.\end{cases}$

   则 $\check{Q}$ 的三个分量分别为压力, 界面法向速度和切向速度.

2. 令 $A=\begin{bmatrix}0 & K & 0\\ 1/\rho & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\check{R}=\begin{bmatrix}-Z_l & 0 & Z_r\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{cases}\alpha=\check{R}^{-1}\Delta\check{Q},\\ \check{\mathcal{W}}=\check{R}\alpha.\end{cases}$

   (变系数时, A 分片定义, Z_l 和 Z_r 为相应的介质阻抗.)

3. 放缩波速: $s^1_{i-\frac{1}{2},j}=-\gamma_{i-\frac{1}{2},j}c_{i-1,j}$, $s^2_{i-\frac{1}{2},j}=0$, $s^3_{i-\frac{1}{2},j}=\gamma_{i-\frac{1}{2},j}c_{ij}$.

   至此, 我们得到了沿界面法向传播的一维声波方程黎曼问题解的波与相应的波速.

旋转变换与声波方程黎曼问题的局部一维正规化

4. 将界面坐标系的波 $\breve{\mathcal{W}}$ 变换为原坐标系的波: $\mathcal{W} = \mathcal{R}^{-1}\breve{\mathcal{W}}$.
5. 计算一次法向涨落波: $\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = s^1_{i-\frac{1}{2},j}\mathcal{W}^1_{i-\frac{1}{2},j}$, $(s^1 < 0)$, $\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = s^3_{i-\frac{1}{2},j}\mathcal{W}^3_{i-\frac{1}{2},j}$, $(s^3 > 0)$. 背景声速 $\vec{u}_0 \neq 0$ 时, s^2 一般也非零, 此时还应考虑 $\mathcal{W}^2$ 的贡献.

类似地, 对一次法向涨落波 $\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$ 做相应的旋转变换和一维声波方程的特征分解, 再做逆旋转变换得二次切向涨落波. 例如:

$$令 \quad Z_l = Z_{i,j-1}, Z_r = Z_{ij}, \quad \beta_{i,j-\frac{1}{2}} = \breve{R}^{-1}\mathcal{R}_{i,j-\frac{1}{2}}\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j},$$

则法向涨落波 $\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$ 按特征 $\breve{R} = [\breve{r}^1_{i,j-1}\ \breve{r}^2_{i,j-\frac{1}{2}}\ \breve{r}^3_{ij}]$ 分解为

$$\mathcal{R}_{i,j-\frac{1}{2}}\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \breve{R}\beta = \beta^1\breve{r}^1_{i,j-1} + \beta^2\breve{r}^2_{i,j-\frac{1}{2}} + \beta^3\breve{r}^3_{ij}.$$

最后得 $\mathcal{B}^-\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = -\gamma_{i,j-\frac{1}{2}}c_{i,j-1}\mathcal{R}^{-1}_{i,j-\frac{1}{2}}\beta^1_{i,j-\frac{1}{2}}\breve{r}^1_{i,j-1}$.

旋转变换与声波方程黎曼问题的局部一维正规化

同理, 令

$$Z_l = Z_{ij}, Z_r = Z_{i,j+1}, \quad \beta_{i,j+\frac{1}{2}} = \breve{R}^{-1}\mathcal{R}_{i,j+\frac{1}{2}}\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j},$$

则法向涨落波 $\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$ 按特征 $\breve{R} = [\breve{r}^1_{ij}\ \breve{r}^2_{i,j+\frac{1}{2}}\ \breve{r}^3_{i,j+1}]$ 分解为

$$\mathcal{R}_{i,j+\frac{1}{2}}\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \breve{R}\beta = \beta^1\breve{r}^1_{ij} + \beta^2\breve{r}^2_{i,j+\frac{1}{2}} + \beta^3\breve{r}^3_{i,j+1}.$$

最后得 $\mathcal{B}^+\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \gamma_{i,j+\frac{1}{2}}c_{i,j+1}\mathcal{R}^{-1}_{i,j+\frac{1}{2}}\beta^1_{i,j+\frac{1}{2}}\breve{r}^3_{i,j+1}$.

类似地可以计算 $\mathcal{B}^\pm\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$, 以及 $\mathcal{A}^\pm\mathcal{B}^\pm\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}}$.

注 1: 这种通过旋转变换将方程的黎曼问题局部一维化的方法可以推广应用于许多其它方程, 例如浅水方程和欧拉方程等等.

注 2: 两种方法(基于 $q_t + \breve{A}q_n = 0$ 或旋转变换)的数值解实质上是等价的.

四边形网格上二维浅水圆柱绕流问题的算例

- 两种网格: (a) 极坐标 r-θ 四边形网格; (b) 圆与正方形计算区域外边界间的插值网格. 见图 23.1 (a), (b).
- 网格 (a) 是正交的, 且网格间（物理构型与计算构型的坐标变换）的变化是光滑的.
- 网格 (b) 不是正交的, 且网格间（物理构型与计算构型的坐标变换）的变化沿 $\pm\pi/4$, $\pm3\pi/4$ 射线有跳跃间断.
- 一个激波（水深和流速的间断跳跃, 图23.4(a) 为初值）冲向固定圆柱, 图23.5 显示碰撞绕流后若干时间点上计算结果的水深等高线图.
- 两个网格都可以得到有较高分辨率的数值结果. 其中 (a)的结果比 (b)的光滑性稍好, 尤其是靠近 $\pm\pi/4$, $\pm3\pi/4$ 射线附近.

四边形网格上的数值边界条件

- 由于计算网格仍是矩形网格, 因此四边形网格上边界条件的处理本质上可以采用与直角坐标中矩形网格时类似的方法.
- 例如, 引入虚拟网格并以恰当方式定义虚拟单元上的值.
- 周期边条件与直角坐标矩形网格时相同. 外推也相同.
- 固壁边条件为法向速度分量为零. 如果单元界面 $(\frac{1}{2}, j)$ 对应于 $\xi = 0$ 处的固壁, 对于声波方程, 要定义虚拟单元值 Q_{0j}, $Q_{-1,j}$, 需先做旋转变换 (变换后 $\breve{Q}$ 的三个分量分别为压力、法向和切向速度), 然后做零阶外推, 再将法向速度取负值

$$\breve{Q}_{ij} = \mathcal{R}_{\frac{1}{2},j} Q_{ij}, \quad \breve{Q}_{1-i,j} = \breve{Q}_{ij}, \quad \breve{Q}^2_{1-i,j} = -\breve{Q}^2_{1-i,j}, \quad i = 1, 2;$$

最后, 做逆旋转变换得: $Q_{1-i,j} = \mathcal{R}^{-1}_{\frac{1}{2},j} \breve{Q}_{1-i,j}$, $i = 1, 2$.

作业: 20.3，20.4

Thank You!