Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

高维双曲守恒律的有限体积法

- Lax-Wendroff 格式在解的间断或梯度很大处由于数值色散会导致数值振荡.
- 许多一维有限体积法的方法都可以推广到高维. 例如, 迎风通量, 通量限制器, 高分辨率校正等. 最常见的有限体积法可归结为以下三类:

1. 全离散通量差方法 (有限体积上积分形式的守恒律).
2. 半离散+ Runge-Kutta 方法 (ENO, WENO).
3. 维数分裂 (分步法, 交替方向法).

二维全离散通量差形式的有限体积方法

- 令 $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, $\Delta y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, $\mathcal{C}_{ij} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$. 则由方程得

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}_{ij}} q dx dy = \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(q(x_{i-1/2}, y, t))dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(q(x_{i+1/2}, y, t))dy + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} g(q(x, y_{j-1/2}, t))dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} g(q(x, y_{j+1/2}, t))dx.$$

- 由 t_n 到 t_{n+1} 积分，得全离散通量差型有限体积格式

$$Q_{ij}^{n+1} = Q_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}[F_{i+1/2,j}^n - F_{i-1/2,j}^n] - \frac{\Delta t}{\Delta y}[G_{i,j+1/2}^n - G_{i,j-1/2}^n],$$

其中 $F_{i-1/2,j}^n \approx \frac{1}{\Delta t \Delta y}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(q(x_{i-1/2}, y, t))dy\, dt,$

$G_{i,j-1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t \Delta x}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} g(q(x, y_{j-1/2}, t))dx\, dt.$

通量差形式的 Godunov 方法

- 在通量差形式的有限体积法中取
$$F^n_{i-1/2,j} = f(Q^{\downarrow}_{i-1/2,j}),\quad G^n_{i,j-1/2} = g(Q^{\downarrow}_{i,j-1/2}).$$
- 其中 $Q^{\downarrow}_{i-1/2,j}$ 由方程 $q_t + f(q)_x = 0$ 初值为 $Q_{i-1,j}$, Q_{ij} 的黎曼问题的解定义; $Q^{\downarrow}_{i,j-1/2}$ 由方程 $q_t + g(q)_y = 0$ 初值为 $Q_{i,j-1}$, Q_{ij} 的黎曼问题的解定义. 也可用近似黎曼问题的解定义.
- 对于线性问题, $f(q) = Aq$, $g(q) = Bq$, 设 $(R^x)^{-1}AR^x = \Lambda^x$, $(R^y)^{-1}BR^y = \Lambda^y$, 令
$$A^{\pm} = R^x(\Lambda^x)^{\pm}(R^x)^{-1},\quad B^{\pm} = R^y(\Lambda^y)^{\pm}(R^y)^{-1}.$$
则有
$$F^n_{i-1/2,j} = A^+Q_{i-1,j} + A^-Q_{i,j},$$
$$G^n_{i,j-1/2} = B^+Q_{i,j-1} + B^-Q_{i,j}.$$

涨落形式的 Godunov 方法

- 与一维类似, 涨落形式的高分辨率格式可以写为

$$
\begin{aligned}
Q_{ij}^{n+1} = Q_{ij}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}[\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2,j} + \mathcal{A}^-\Delta Q_{i+1/2,j}] \\
- \frac{\Delta t}{\Delta y}[\mathcal{B}^+\Delta Q_{i,j-1/2} + \mathcal{B}^-\Delta Q_{i,j+1/2}] \\
- \frac{\Delta t}{\Delta x}[\tilde{F}^n_{i+1/2,j} - \tilde{F}^n_{i-1/2,j}] - \frac{\Delta t}{\Delta x}[\tilde{G}^n_{i,j+1/2} - \tilde{G}^n_{i,j-1/2}],
\end{aligned}
$$

- 对非线性守恒律方程, 涨落可由 Godunov 通量定义如下

$$\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2,j} = f(Q_{ij}) - f(Q^{\downarrow}_{i-1/2,j}),\ \mathcal{A}^-\Delta Q_{i-1/2,j} = f(Q^{\downarrow}_{i-1/2,j}) - f(Q_{i-1,j}),$$

$$\mathcal{B}^+\Delta Q_{i,j-1/2} = g(Q_{ij}) - g(Q^{\downarrow}_{i,j-1/2}),\ \mathcal{B}^-\Delta Q_{i,j-1/2} = g(Q^{\downarrow}_{i,j-1/2}) - g(Q_{i,j-1}).$$

- 线性时则可定义

$$\mathcal{A}^\pm\Delta Q_{i-1/2,j} = A^\pm(Q_{ij} - Q_{i-1,j}),\ \mathcal{B}^\pm\Delta Q_{i,j-1/2} = B^\pm(Q_{ij} - Q_{i,j-1}).$$

半离散化+ Runge-Kutta 时间步进—— 半离散化

将二维守恒律方程

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}_{ij}} q dxdy = \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(q(x_{i-1/2},y,t))dy - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(q(x_{i+1/2},y,t))dy + \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} g(q(x,y_{i-1/2},t))dx - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} g(q(x,y_{i+1/2},t))dx,$$

离散成 ODE:

$$\frac{d}{dt}Q_{ij}(t) = -\frac{1}{\Delta x}[F_{i+1/2,j}(Q(t)) - F^n_{i-1/2,j}(Q(t))] - \frac{1}{\Delta y}[G_{i,j+1/2}(Q(t)) - G_{i,j-1/2}(Q(t))],$$

其中 $F^n_{i-1/2,j}(Q(t)) \approx \frac{1}{\Delta y}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(q(x_{i-1/2},y,t))dy,$

$G^n_{i,j-1/2}(Q(t)) \approx \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} g(q(x,y_{j-1/2},t))dx.$

半离散化+ Runge-Kutta 时间步进

- 计算 $F^n_{i-1/2,j}(Q(t))$ 和 $G^n_{i,j-1/2}(Q(t))$ 时，需要解相应的一维黎曼问题，构造高阶格式时还需要用到附近单元的相关信息.
- 应用多级 Runge-Kutta 方法求解 ODE 方程组.
- 为取得高分辨率，有必要采用迎风通量，通量限制器，高维形式的 ENO 等.

维数分裂法—— 分步法的一种特殊形式

- 将一维方法推广至高维的最简单的方法是维数分裂法.
- 例如, 可将二维线性方程 $q_t + Aq_x + Bq_y = 0$ 分裂成

$$\begin{cases} \text{x-子问题族} \quad q_t + Aq_x = 0, \\ \text{y-子问题族} \quad q_t + Bq_y = 0. \end{cases}$$

- x-子问题族以 Q_{ij}^n 为单元 $\mathcal{C}_{ij}$ 上的初值, 对固定的 j, 计算

$$Q_{ij}^* = Q_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2,j}^n - F_{i-1/2,j}^n),$$

$F_{i-1/2,j}^n$ 是 $\mathcal{C}_{i-1,j}$, $\mathcal{C}_{ij}$ 间界面上适当定义的一维数值通量.

- y-子问题族以 Q_{ij}^* 为单元 $\mathcal{C}_{ij}$ 上的初值, 对固定的 i, 计算

$$Q_{ij}^{n+1} = Q_{ij}^* - \frac{\Delta t}{\Delta y}(G_{i,j+1/2}^* - G_{i,j-1/2}^*),$$

$G_{i,j-1/2}^*$ 是 $\mathcal{C}_{i,j-1}$, $\mathcal{C}_{ij}$ 间界面上适当定义的一维数值通量.

维数分裂法—— 分裂误差与 Strang 分裂法

- 以上形式的分裂法称为 Godunov 分裂法. 当 $AB \neq BA$ 时, Godunov 分裂法会引入 (一阶) 分裂误差. 而当 $AB = BA$ 时, 方程组可分解成一组解耦的对流方程.

- 为理论上减少分裂误差, 可采用 Strang 分裂法

$$Q_{ij}^{*} = Q_{ij}^{n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F_{i+1/2,j}^{n} - F_{i-1/2,j}^{n}\right),$$

$$Q_{ij}^{**} = Q_{ij}^{*} - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(G_{i,j+1/2}^{*} - G_{i,j-1/2}^{*}\right),$$

$$Q_{ij}^{n+1} = Q_{ij}^{**} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F_{i+1/2,j}^{**} - F_{i-1/2,j}^{**}\right),$$

注 1: 实际计算都采用二阶格式时, Godunov 分裂法的整体误差并不见得比 Strang 分裂法的更大.

注 2: 以上几种算法中都没有显式处理 $\partial_x \partial_y$ 项.

二维常系数对流方程式及其 Taylor 展开式

- 二维常系数对流方程式: $q_t + uq_x + vq_y = 0.$
- 方程的真解形为 $q(x, y, t) = \overset{o}{q}(x - ut, y - vt).$
- 为方便构造格式和分析算法精度, 将解做如下 Taylor 展开

$$q(x, y, t_{n+1}) = q(x, y, t_n) + \Delta t q_t(x, y, t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} q_{tt}(x, y, t_n)$$

$$= \left[q - u\Delta t q_x - v\Delta t q_y + \frac{\Delta t^2}{2}(u^2 q_{xx} + 2uvq_{xy} + v^2 q_{yy}) + \cdots \right]_{(x,y,t_n)}.$$

注: 可以看出, 一阶差分格式只需逼近 q_x, q_y, 二阶格式则还需逼近q_{xx}, q_{yy} 和 q_{xy}.

贡献-单元迎风方法 (Donor-Cell Upwind, DCU)

- 二维常系数对流方程式的最简单的有限体积法是迎风格式，其一般形式为 (常称为贡献-单元迎风方法)

$$
\begin{aligned}
Q_{ij}^{n+1} = Q_{ij}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}[u^{+}(Q_{ij}^{n} - Q_{i-1,j}^{n}) + u^{-}(Q_{i+1,j}^{n} - Q_{ij}^{n})] \\
- \frac{\Delta t}{\Delta y}[v^{+}(Q_{ij}^{n} - Q_{i,j-1}^{n}) + v^{-}(Q_{i,j+1}^{n} - Q_{ij}^{n})].
\end{aligned}
$$

相应的涨落和数值通量分别为:

$$
\mathcal{A}^{\pm}\Delta Q_{i-1/2,j} = u^{\pm}(Q_{ij} - Q_{i-1,j}), \quad \mathcal{B}^{\pm}\Delta Q_{i,j-1/2} = v^{\pm}(Q_{ij} - Q_{i,j-1}).
$$

$$
F_{i-1/2,j} = u^{+}Q_{i-1,j} + u^{-}Q_{ij}, \quad G_{i,j-1/2} = v^{+}Q_{i,j-1} + v^{-}Q_{ij}.
$$

- 格式只用到有公共边的迎风方向相邻单元的信息及相应的法向通量 (见图 20.1), 因此可能会影响稳定性.
- 可以证明格式的稳定性条件为: $|\frac{u\Delta t}{\Delta x}| + |\frac{v\Delta t}{\Delta y}| \le 1$.

角输运迎风方法 (Corner-Transport Upwind, CTU)

对应对流方程, 一个更好的一阶迎风格式是将一维的 REA 算法 (见 Algorithm 4.1) 直接推广至二维问题, 即

- 将单元平均值 Q_{ij}^n 视为 t_n 时刻定义在单元 $\mathcal{C}_{ij}$ 上的分片常数函数 $\tilde{q}^n(x, y, t_n)$.
- 以此为初值求出经过 Δt 时间对流方程的精确解.
- 计算该解在单元 $\mathcal{C}_{ij}$ 上的平均值 Q_{ij}^{n+1}.

对于常系数对流方程, REA 算法容易实施, 因为此时精确解为

$$\tilde{q}^n(x, y, t_{n+1}) = \tilde{q}^n(x - u\Delta t, y - v\Delta t, t_n).$$

角输运迎风方法 (Corner-Transport Upwind, CTU)

- 因此, 按定义有

$$Q_{ij}^{n+1} = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \tilde{q}^n(x-u\Delta t, y-v\Delta t, t_n)dxdy$$
$$= \frac{1}{\Delta x \Delta y}\int_{x_{i-1/2}-u\Delta t}^{x_{i+1/2}-u\Delta t}\int_{y_{j-1/2}-v\Delta t}^{y_{j+1/2}-v\Delta t} \tilde{q}^n(x, y, t_n)dxdy.$$

- 于是新单元平均值为老单元平均值的相应面积比的凸组合 (设 $u > 0$, $v > 0$, 见图 20.2)

$$Q_{ij}^{n+1} = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\big[(\Delta x-u\Delta t)(\Delta y-v\Delta t)Q_{ij}^n+(\Delta x-u\Delta t)(v\Delta t)Q_{i,j-1}^n$$
$$+ (u\Delta t)(\Delta y - v\Delta t)Q_{i-1,j}^n + (u\Delta t)(v\Delta t)Q_{i-1,j-1}^n\big].$$

角输运迎风方法 (Corner-Transport Upwind, CTU)

- 该格式经整理可以写为 (称为角输运迎风方法):

$$
\begin{aligned}
Q_{ij}^{n+1} = Q_{ij}^{n} &- \frac{u\Delta t}{\Delta x}(Q_{ij}^{n} - Q_{i-1,j}^{n}) - \frac{v\Delta t}{\Delta y}(Q_{ij}^{n} - Q_{i,j-1}^{n}) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2}\left\{\frac{u}{\Delta x}\left[\frac{v}{\Delta y}(Q_{ij}^{n} - Q_{i,j-1}^{n}) - \frac{v}{\Delta y}(Q_{i-1,j}^{n} - Q_{i-1,j-1}^{n})\right]\right. \\
&\qquad\left. + \frac{v}{\Delta y}\left[\frac{u}{\Delta x}(Q_{ij}^{n} - Q_{i-1,j}^{n}) - \frac{u}{\Delta x}(Q_{i,j-1}^{n} - Q_{i-1,j-1}^{n})\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

- 容易看出格式的第一部分 (第一行) 即为贡献-单元迎风格式 (DCU), 而第二部分则是对 Taylor 展开式中交叉导数项 $uvq_{yx} + vuq_{xy}$ 的差分近似.
- 由于对 uq_x, vq_y 的近似是单边迎风, 又缺少对 q_{xx}, q_{yy} 的近似, CTU 方法仍是一阶格式. 这些缺憾可通过分别引入 x-, y-方向的斜率来解决 (见 §20.6 高分辨率校正).

波的传播形式的角输运迎风方法

- 我们换一个视角，以波的传播的方式来构造角输运迎风方法.
- 设 $u > 0$, $v > 0$, 则有一个跳跃量为 $Q_{ij} - Q_{i-1,j}$ 的波穿过单元 $\mathcal{C}_{i-1,j}$ 与 $\mathcal{C}_{i,j}$ 间的界面，以及单元 $\mathcal{C}_{i,j}$ 与 $\mathcal{C}_{i,j+1}$ 间的部分界面 (见图 20.3(a)). 在 Δt 时间内,单元 $\mathcal{C}_{i,j}$ 和 $\mathcal{C}_{i,j+1}$ 被该波扫过的面积分别为 $(u\Delta t\Delta y - \frac{1}{2}uv\Delta t^2)$ 和 $\frac{1}{2}uv\Delta t^2$.
- 由此知界面 $(i-1/2, j)$ 处的波对 t_{n+1} 时刻单元平均值 Q_{ij} 和 $Q_{i,j+1}$ 的改变量的贡献分别为

$$-\frac{u\Delta t\Delta y - \frac{1}{2}uv\Delta t^2}{\Delta x\Delta y}(Q_{ij} - Q_{i-1,j}) \text{ 和 } -\frac{\frac{1}{2}uv\Delta t^2}{\Delta x\Delta y}(Q_{ij} - Q_{i-1,j}).$$

波的传播形式的角输运迎风方法

- 换句话说，界面 $(i-1/2, j)$ 和 $(i-1/2, j-1)$ 处的波对 t_{n+1} 时刻单元平均值 Q_{ij} 改变量的贡献分别为 (见图 20.3(a), (b))

$$-\frac{u\Delta t\Delta y-\frac{1}{2}uv\Delta t^2}{\Delta x\Delta y}(Q_{ij}-Q_{i-1,j}) \text{ 和 } -\frac{\frac{1}{2}uv\Delta t^2}{\Delta x\Delta y}(Q_{i,j-1}-Q_{i-1,j-1}).$$

- 同理，界面 $(i, j-1/2)$ 和 $(i-1, j-1/2)$ 处的波对 t_{n+1} 时刻单元平均值 Q_{ij} 改变量的贡献分别为 (见图 20.3(a), (b))

$$-\frac{v\Delta t\Delta x-\frac{1}{2}uv\Delta t^2}{\Delta x\Delta y}(Q_{ij}-Q_{i,j-1}) \text{ 和 } -\frac{\frac{1}{2}uv\Delta t^2}{\Delta x\Delta y}(Q_{i-1,j}-Q_{i-1,j-1}).$$

- 由此给出的格式恰为角输运迎风格式 (20.10) (CTU).

波的传播形式的 CTU 给出 DCU 通量的校正通量

- 另一方面, DCU 的相应涨落和数值通量分别为:

$$\mathcal{A}^{\pm}\Delta Q_{i-1/2,j} = u^{\pm}(Q_{ij} - Q_{i-1,j}), \quad \mathcal{B}^{\pm}\Delta Q_{i,j-1/2} = v^{\pm}(Q_{ij} - Q_{i,j-1}).$$

$$F_{i-1/2,j} = u^{+}Q_{i-1,j} + u^{-}Q_{ij}, \quad G_{i,j-1/2} = v^{+}Q_{i,j-1} + v^{-}Q_{ij}.$$

- CTU 则在此基础上增加了校正数值通量 (设$u, v > 0$, 比较p.442 (19.19))

$$\tilde{F}_{i-1/2,j} = -\frac{uv\Delta t}{2\Delta y}(Q_{i-1,j} - Q_{i-1,j-1}), \quad \tilde{F}_{i+1/2,j} = -\frac{uv\Delta t}{2\Delta y}(Q_{ij} - Q_{i,j-1}),$$

$$\tilde{G}_{i,j-1/2} = -\frac{uv\Delta t}{2\Delta x}(Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}), \quad \tilde{G}_{i,j+1/2} = -\frac{uv\Delta t}{2\Delta x}(Q_{ij} - Q_{i-1,j}).$$

注 1: 当在一个时间步中各个方向的位移均不超过相应方向一个空间网格步长时, 即 CFL 数 $\max\{\frac{u\Delta t}{\Delta x} =: \nu^x, \frac{v\Delta t}{\Delta y} =: \nu^y\} \le 1$ 时, CTU 给出了发展步的精确解.

注 2: 当 CFL 数≤ 1 时, 由解的凸组合构造知 CTU L^1-稳定.

von Neumann 稳定性分析与 DCU 和 CTU 的 L^2-稳定性

- 将傅里叶波型 $Q_{IJ}^n = e^{i(\xi I\Delta x+\eta J\Delta y)}$ 代入DCU 格式 $(u, v > 0)$ $Q_{IJ}^{n+1} = Q_{IJ}^n - \nu^x(Q_{IJ}^n - Q_{I-1,J}^n) - \nu^y(Q_{IJ}^n - Q_{I,J-1}^n)$ 得增长因子 $g(\xi,\eta,\Delta x,\Delta y,\Delta t) = (1-\nu^x-\nu^y)+\nu^x e^{-i\xi\Delta x}+\nu^y e^{-i\eta\Delta y}$.

  由此知 $0 \le \nu^x + \nu^y \le 1 \Leftrightarrow$ DCU L^2-稳定.

- 而 CTU 格式 $(u, v > 0)$ 的增长因子为

  $g(\xi,\eta,\Delta x,\Delta y,\Delta t) = [1-\nu^x(1-e^{-i\xi\Delta x})][1-\nu^y(1-e^{-i\eta\Delta y})]$.

  由此知 $\max\{\nu^x,\nu^y\} \le 1 \Leftrightarrow$ CTU L^2-稳定.

- 可见 CTU 格式相比 DCU 格式有更好的 L^2-稳定性.

变系数对流方程式的 CTU 方法

- 考虑颜色方程形式的变系数对流方程式 (应用和推广 §9.5 界面速度方法, 要点: q 沿特征线为常量) $q_t + u(x,y)q_x + v(x,y)q_y = 0$.
- 我们将建立波的传播形式的 CTU方法, 即定义波, 波速, 涨落及校正通量等 (守恒型方程也可将第九章相关内容做相应推广, 要点: 界面上通量连续).
- 记 $\mathcal{C}_{i-1,j}$ 和 $\mathcal{C}_{i,j}$ 交界面上的法向速度平均值为 $u_{i-1/2,j}$. 记 $\mathcal{C}_{i,j}$ 和 $\mathcal{C}_{i,j-1}$ 交界面上的法向速度平均值为 $v_{i,j-1/2}$.
- 每个界面处的黎曼问题给出一个由界面法向速度为速度的波

$$\begin{cases} \text{x-方向:} \quad \mathcal{W}_{i-1/2,j} = Q_{ij} - Q_{i-1,j}, \quad s_{i-1/2,j} = u_{i-1/2,j}, \\ \text{y-方向:} \quad \mathcal{W}_{i,j-1/2} = Q_{ij} - Q_{i,j-1}, \quad s_{i,j-1/2} = v_{i,j-1/2}. \end{cases}$$

变系数对流方程式的 CTU 方法

- 以及构造 DCU 格式所需的涨落 (一次法向黎曼问题的解)

$$\begin{cases} \mathcal{A}^{\pm}\Delta Q_{i-1/2,j} = s^{\pm}_{i-1/2,j}\mathcal{W}_{i-1/2,j} = u^{\pm}_{i-1/2,j}(Q_{ij} - Q_{i-1,j}), \\ \mathcal{B}^{\pm}\Delta Q_{i,j-1/2} = s^{\pm}_{i,j-1/2}\mathcal{W}_{i,j-1/2} = v^{\pm}_{i,j-1/2}(Q_{ij} - Q_{i,j-1}). \end{cases}$$

- 为计算CTU方法所需的“校正通量” (将格式的校正部分写成“通量差”的形式), 需要考虑每个波横向传播至各相邻单元的量. 具体做法如下.
- 首先初始化“校正通量”, 令 $\tilde{F}_{i-1/2,j} := 0$, $\tilde{G}_{i,j-1/2} := 0$, $\forall i,j$.
- 计算 $\mathcal{A}^{\pm}\Delta Q_{i-1/2,j}$ 的切向涨落 (二次切向黎曼问题的解)

$$\begin{cases} \mathcal{B}^{-}\mathcal{A}^{-}\Delta Q_{i-1/2,j} = v^{-}_{i-1,j-1/2}u^{-}_{i-1/2,j}(Q_{ij} - Q_{i-1,j}), \\ \mathcal{B}^{+}\mathcal{A}^{-}\Delta Q_{i-1/2,j} = v^{+}_{i-1,j+1/2}u^{-}_{i-1/2,j}(Q_{ij} - Q_{i-1,j}), \\ \mathcal{B}^{-}\mathcal{A}^{+}\Delta Q_{i-1/2,j} = v^{-}_{i,j-1/2}u^{+}_{i-1/2,j}(Q_{ij} - Q_{i-1,j}), \\ \mathcal{B}^{+}\mathcal{A}^{+}\Delta Q_{i-1/2,j} = v^{+}_{i,j+1/2}u^{+}_{i-1/2,j}(Q_{ij} - Q_{i-1,j}). \end{cases}$$

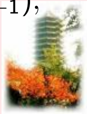
变系数对流方程式的 CTU 方法

- 用法向涨落 $\mathcal{A}^{\pm}\Delta Q_{i-1/2,j}$ 的二次切向涨落 $\mathcal{B}^{\pm}\mathcal{A}^{\pm}\Delta Q_{i-1/2,j}$ 更新相应界面处的“校正通量”(见示意图 20.4):

$$\begin{cases} \tilde{G}_{i-1,j-1/2} := \tilde{G}_{i-1,j-1/2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} v^{-}_{i-1,j-1/2} u^{-}_{i-1/2,j}(Q_{ij} - Q_{i-1,j}), \\ \tilde{G}_{i-1,j+1/2} := \tilde{G}_{i-1,j+1/2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} v^{+}_{i-1,j+1/2} u^{-}_{i-1/2,j}(Q_{ij} - Q_{i-1,j}), \\ \tilde{G}_{i,j-1/2} := \tilde{G}_{i,j-1/2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} v^{-}_{i,j-1/2} u^{+}_{i-1/2,j}(Q_{ij} - Q_{i-1,j}), \\ \tilde{G}_{i,j+1/2} := \tilde{G}_{i,j+1/2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} v^{+}_{i,j+1/2} u^{+}_{i-1/2,j}(Q_{ij} - Q_{i-1,j}). \end{cases}$$

- 同理, 用涨落 $\mathcal{B}^{\pm}\Delta Q_{i,j-1/2}$ 的二次切向涨落 $\mathcal{A}^{\pm}\mathcal{B}^{\pm}\Delta Q_{i,j-1/2}$ 更新相应界面处的“校正通量”:

$$\begin{cases} \tilde{F}_{i-1/2,j-1} := \tilde{F}_{i-1/2,j-1} - \frac{\Delta t}{2\Delta y} u^{-}_{i-1/2,j-1} v^{-}_{i,j-1/2}(Q_{ij} - Q_{i,j-1}), \\ \tilde{F}_{i+1/2,j-1} := \tilde{F}_{i+1/2,j-1} - \frac{\Delta t}{2\Delta y} u^{+}_{i+1/2,j-1} v^{-}_{i,j-1/2}(Q_{ij} - Q_{i,j-1}), \\ \tilde{F}_{i-1/2,j} := \tilde{F}_{i-1/2,j} - \frac{\Delta t}{2\Delta y} u^{-}_{i-1/2,j} v^{+}_{i,j-1/2}(Q_{ij} - Q_{i,j-1}), \\ \tilde{F}_{i+1/2,j} := \tilde{F}_{i+1/2,j} - \frac{\Delta t}{2\Delta y} u^{+}_{i+1/2,j} v^{+}_{i,j-1/2}(Q_{ij} - Q_{i,j-1}). \end{cases}$$



高分辨率校正项

- 通过二次切向涨落更新校正通量, 使得 CTU 有了对二阶混合导数项的有效近似. 但仍缺少对一阶迎风的补偿, 以及二阶导数项 q_{xx}, q_{yy} 的逼近项.
- 为得到高分辨率格式, 我们将一阶迎风逼近替换成相应方向的 Lax-Wendroff 逼近, 同时引入适当的限制器, 即按以下方式更新“校正通量”:

$$\begin{cases} \tilde{F}_{i-1/2,j} := \tilde{F}_{i-1/2,j} + \frac{1}{2}|u_{i-1/2,j}|\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|u_{i-1/2,j}|\right)\tilde{\mathcal{W}}_{i-1/2,j}, \\ \tilde{G}_{i,j-1/2} := \tilde{G}_{i,j-1/2} + \frac{1}{2}|v_{i,j-1/2}|\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta y}|v_{i,j-1/2}|\right)\tilde{\mathcal{W}}_{i,j-1/2}. \end{cases}$$

CTU + 无限制器高分辨率校正项的等价数值通量

- CTU + 无限制器高分辨率校正项的等价数值通量为

$$
\begin{aligned}
F_{i-1/2,j} = {} & \frac{1}{2}u(Q_{i-1,j}+Q_{ij}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}u^2(Q_{ij}-Q_{i-1,j}) \\
& -\frac{\Delta t}{2\Delta y}\Big[u^-v^-(Q_{i,j+1}-Q_{ij}) + u^+v^-(Q_{i-1,j+1}-Q_{i-1,j}) \\
& +u^-v^+(Q_{ij}-Q_{i,j-1}) + u^+v^+(Q_{i-1,j}-Q_{i-1,j-1})\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{i,j-1/2} = {} & \frac{1}{2}v(Q_{i,j-1}+Q_{ij}) - \frac{\Delta t}{2\Delta y}v^2(Q_{ij}-Q_{i,j-1}) \\
& -\frac{\Delta t}{2\Delta x}\Big[v^-u^-(Q_{i+1,j}-Q_{ij}) + v^+u^-(Q_{i+1,j-1}-Q_{i,j-1}) \\
& +v^-u^+(Q_{i,j}-Q_{i-1,j}) + v^+u^+(Q_{i,j-1}-Q_{i-1,j-1})\Big].
\end{aligned}
$$

注: 以上公式中 $u^\pm$, $v^\pm$ 的取值点由其后的 ΔQ 的取值点和上标的 $\pm$ 决定. 例如对 $\Delta Q_{i,j+1/2} = (Q_{i,j+1}-Q_{ij})$, 取 $u^-_{i-1/2,j}v^-_{i,j+1/2}$.

CTU + 无限制器高分辨率校正项$\neq$ Lax-Wendroff 格式

- 在常系数情形, CTU + 无限制器高分辨率校正项方法和 Lax-Wendroff 方法对 q_x, q_y, q_{xx}, q_{yy} 项的离散是相同的, 而对交叉导数项的离散则不同 (比较 (19.14), (19.15)).
- 以 $uvq_y(x_{i-1/2}, y_j)$ 的离散为例, 此处的离散为迎风型的

$$uvq_y(x_{i-1/2}, y_j) \approx \frac{1}{\Delta y}\Big[u^- v^-(Q_{i,j+1} - Q_{ij}) + u^+ v^-(Q_{i-1,j+1} - Q_{i-1,j}) \\ + u^- v^+(Q_{ij} - Q_{i,j-1}) + u^+ v^+(Q_{i-1,j} - Q_{i-1,j-1})\Big],$$

而 Lax-Wendroff 方法则是取的4个点处 $uv\Delta Q$ 的平均值.

注: 迎风型的混合导数离散使得格式比 Lax-Wendroff 格式有更好的稳定性. 后者的稳定性条件: $\sqrt{(\frac{u\Delta t}{\Delta x})^2 + (\frac{v\Delta t}{\Delta y})^2} \leq 1$, 而前者的则是 $\max\{|\frac{u\Delta t}{\Delta x}|, |\frac{v\Delta t}{\Delta y}|\} \leq 1$.

速度场无散则守恒律与颜色方程等价

- 不可压缩流的速度场是无散场. 更一般的, 如果对任意子区域 Ω 流场通过边界 $\partial\Omega$ 进入该子区域 Ω 的净通量总为零, 则该流场是无散场. $(\because\ 0 = \int_{\partial\Omega} \vec{n}(s) \cdot \vec{u} ds = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dxdy.)$
- 在二维情形, 速度场无散即 $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = u_x(x, y) + v_y(x, y) = 0.$
- 由 $q_t + (uq)_x + (vq)_y = q_t + (u_x + v_y)q + uq_x + vq_y$, 知此时有 $q_t + (uq)_x + (vq)_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_t + uq_x + vq_y = 0$. 即守恒律与颜色方程等价.
- 设 q 是无散速度场中的守恒量, 我们希望在离散层面, 也能够通过数值求解颜色方程的方法 (如 CTU) 来求解守恒律.

离散无散速度场和 DCU 格式的守恒性

当定义在单元界面中点的离散速度场满足以下离散无散条件

$$\frac{1}{\Delta x}(u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}) + \frac{1}{\Delta y}(v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}) = 0$$

时, DCU 格式是守恒型格式. 事实上:

- 在二维情形下, DCU 格式的一般形式为

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{n+1} = Q_{ij}^n &- \frac{\Delta t}{\Delta x}[u_{i-1/2,j}^+(Q_{ij}^n - Q_{i-1,j}^n) + u_{i+1/2,j}^-(Q_{i+1,j}^n - Q_{ij}^n)] \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta y}[v_{i,j-1/2}^+(Q_{ij}^n - Q_{i,j-1}^n) + v_{i,j+1/2}^-(Q_{i,j+1}^n - Q_{ij}^n)]. \end{aligned}$$

离散无散速度场和 DCU 格式的守恒性

- 将上式对 $I_1 \le i \le I_2$, $J_1 \le j \le J_2$ 求和, 合并同类项得

$$\sum_{i,j} Q_{ij}^{n+1} = \sum_{i,j} Q_{ij}^{n}\Big[1+\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{i+\frac{1}{2},j}-u_{i-\frac{1}{2},j})+\frac{\Delta t}{\Delta y}(v_{i,j+\frac{1}{2}}-v_{i,j-\frac{1}{2}})\Big]$$

$$+\sum_{j}(u^{+}_{I_1-\frac{1}{2},j}Q^{n}_{I_1-1,j}-u^{-}_{I_2+\frac{1}{2},j}Q^{n}_{I_2+1,j})+\sum_{i}(v^{+}_{i,J_1-\frac{1}{2}}Q^{n}_{i,J_1-1}-v^{-}_{i,J_2+\frac{1}{2}}Q^{n}_{i,J_2+1}).$$

- 由于上式右端第二、三项为进入求和区域的边界通量, 又离散速度场无散, 所以上式给出

$$\sum_{i,j} Q_{ij}^{n+1} = \sum_{i,j} Q_{ij}^{n} + \text{进入求和区域的边界通量}$$

- 事实上, 上式对任意求和区域都成立. 因此格式是守恒型的.

离散无散速度场和 CTU 格式的守恒性

- CTU 及其高分辨率格式都是在 DCU 格式的基础上增加通量差形式的校正项得到的, 因此它们的守恒性等价于 DCU 格式的守恒性.
- § 20.5 和 § 20.6 建立的 CTU 格式及 CTU 高分辨率格式, 当定义在单元界面中点的离散速度场满足以下离散无散条件

$$\frac{1}{\Delta x}\left(u_{i+1/2,j}-u_{i-1/2,j}\right)+\frac{1}{\Delta y}\left(v_{i,j+1/2}-v_{i,j-1/2}\right)=0$$

时, 是守恒型格式.

注: 若取 $\Omega=\mathcal{C}_{ij}$, 取离散速度 $u_{i\pm1/2,j}=\frac{1}{\Delta y}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}u(x_{i\pm1/2},y)dy$, $v_{i,j\pm1/2}=\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}v(x,y_{j\pm1/2})dy$, 则:

$$\int_{\partial\Omega}\vec{n}(s)\cdot\vec{u}ds=0\ \Rightarrow\ \text{离散速度场无散}$$

无散速度场的流函数和流线

- 任何连续且分片可微的标量函数 $\psi(x,y)$ 都可定义一个无散的速度场 $(0=\int_{\partial\Omega}\vec{n}(s)\cdot\vec{u}ds=\int_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}dxdy)$.

$$u(x,y)=\psi_y(x,y),\quad v(x,y)=-\psi_x(x,y).$$

- 事实上, 任何一个无散的速度场都存在流函数使上式成立.

- 易见速度场 $\vec{u}=(u,v)$ 与 $\vec{\nabla}\psi=(\psi_x,\psi_y)$ 正交. 因此, 流函数 ψ 在 x-y 平面上的等值线即为流场的流线, 亦即流体质点运动的轨迹.

用流函数（或流线）定义的无散离散速度场

- 设 $\psi(x,y)$ 是速度场 $\vec{u}=(u,v)$ 的流函数，则有

$$\psi(x,y_2)-\psi(x,y_1)=\int_{y_1}^{y_2}u(x,y)dy,\ \psi(x_2,y)-\psi(x_1,y)=-\int_{x_1}^{x_2}v(x,y)dx.$$

- 由此知，如下定义的离散速度场是无散的

$$u_{i-\frac{1}{2},j}=\left[\psi(x_{i-\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}})-\psi(x_{i-\frac{1}{2}},y_{j-\frac{1}{2}})\right]/\Delta y,$$

$$v_{i,j-\frac{1}{2}}=-\left[\psi(x_{i+\frac{1}{2}},y_{j-\frac{1}{2}})-\psi(x_{i-\frac{1}{2}},y_{j-\frac{1}{2}})\right]/\Delta x,$$

注: 用积分平均值和用流线定义无散离散速度场在数学上是等价的. 但前者在计算时需要做数值积分，因此难以真正实现无散.

数值例子：固体旋转

- 图 20.5 显示采用 MC 限制器 (见 (6.39(b))) 的 CTU 高分辨率格式得到的固体 (一个圆锥和一个方柱) 旋转的数值结果.
- 图 20.6 则分别显示了一阶 CTU 格式（上图），无限制器的二阶 Lax-Wendroff 格式（中图），和高分辨率维数分裂格式（下图）得到的数值结果.
- 可以看出, 两个高分辨率格式结果难分高下, 同时的确比另外两个格式好很多很多.

数值例子：二维 Burges 方程

- 考虑二维无粘 Burges 方程 $u_t + n^x(\frac{1}{2}u^2)_x + n^y(\frac{1}{2}u^2)_y = 0.$
- 若取 $\vec{n} = (1, 0)$，则方程退化为 $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0.$
- 若取 $\vec{n} = (0, 1)$，则方程退化为 $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_y = 0.$
- 做坐标变换 $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n^x & n^y \\ -n^y & n^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n^x & -n^y \\ n^y & n^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix},$

  则一般地，方程退化为 $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_\xi = 0.$
- 取上一个例子 $t = 0$ 时的函数值为初值 (见 (20.46))，分别取 $\theta \triangleq \tan^{-1}(n^y/n^x) = 0$ 和 $\pi/4$.
- 图 20.7 显示的是采用了 MC 限制器的 CTU 高分辨率格式在 300×300 网格上得到的 $t = 0.4$ 和 $t = 2$ 时刻的数值结果的等高线图 ($u = 0.05 : 0.05 : 0.095$).

注： 对非线性守恒律方程(组)，一次法向黎曼问题须采用相应的具有相容数值通量的守恒型方法精确或近似求解.

二维非线性守恒律方程式维数分裂法的收敛性

- 记 $S(t)$ 为方程 $q_t + f(q)_x + g(q)_y = 0$ 的解算子. 即该方程以 $\mathring{q}(x, y)$ 为初值的真解为 $q(x, y, t) = (S(t)\mathring{q})(x, y)$.
- 记 $S^x(t)$, $S^y(t)$ 分别为方程 $q_t + f(q)_x = 0$, $q_t + g(q)_y = 0$ 的解算子.

Theorem

设 $T > 0$. 设 $n\Delta t = T$. 则对任给的适定的初值 $\mathring{q}$ 有

$$\lim_{\Delta t \to 0} \|S(T)\mathring{q} - [S^y(\Delta t)S^x(\Delta t)]^n \mathring{q}\|_1 = 0.$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \|S(T)\mathring{q} - [S^x(\Delta t/2)S^y(\Delta t)S^x(\Delta t/2)]^n \mathring{q}\|_1 = 0.$$

二维非线性守恒律方程式维数分裂数值算法的收敛性

- 注意, 以上定理中第一个式子说明的是 Godunov 分裂法的收敛性, 第二个式子说明的是 Strang 分裂法的收敛性.
- 定理说明若在维数分裂法中每步用的都是相应一维问题真解的话, 则分裂法的解在 L^1-模的意义下收敛于真解.
- 下面的定理则给出了使用一维单调格式的维数分裂算法的收敛性. (两个定理都是 Crandall & Majda 证明的.)

Theorem

若将上述定理中的一维解算子 $S^x(\Delta t)$, $S^y(\Delta t)$ 换为相应的一维守恒律方程式的单调格式, 则定理的结论依然成立.

二维守恒律方程式的真解也是 TVD 的

- 对于一维问题, 可以构造具有二阶精度 (至少在极值点邻域外)的 TVD 格式.
- 对于一维问题, TVD 方法保证了数值解集合在一定意义下的紧性, 从而可以证明算法关于非线性问题的收敛性.
- 对于二维问题, 在如下全变差的意义下守恒律方程式的真解也是 TVD 的:

$$
\begin{aligned}
TV(q) = \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |q(x+\epsilon, y) - q(x,y)|dxdy \\
+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |q(x, y+\epsilon) - q(x,y)|dxdy.
\end{aligned}
$$

二维守恒律方程式的 TVD 方法一般至多有一阶精度

- 对于二维问题, 可以类似地定义离散全变差

$$TV(Q) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\Delta y|Q_{i+1,j} - Q_{ij}| + \Delta x|Q_{i,j+1} - Q_{ij}|\right].$$

- 但正如以下定理 (Goodman & LeVeque) 表明, TVD 方法对高维问题并非像其对一维问题那么有用.

Theorem

除去某些平凡情形, 任何二维 *TVD* 方法最多只有一阶精度.

注: 高分辨率 CTU 和高分辨率维数分裂法不能保证 TVD, 但有较好的精度和抑制数值振荡的效果. 测度值解的理论则在更弱的意义下研究守恒律的解及其数值解的收敛性.

二维常系数线性双曲型方程组的 Lax-Wendroff 格式

- 二维常系数线性双曲型方程组的 Lax-Wendroff 格式可以写成通量差形式，相应的数值通量为 (见 (19.14))

$$
\begin{aligned}
F_{i-\frac{1}{2},j} = {} & \frac{1}{2}A(Q_{i-1,j}+Q_{ij}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}A^2(Q_{ij}-Q_{i-1,j}) \\
& -\frac{\Delta t}{8\Delta y}AB\big[(Q_{i,j+1}-Q_{ij})+(Q_{i-1,j+1}-Q_{i-1,j}) \\
& \qquad +(Q_{ij}-Q_{i,j-1})+(Q_{i-1,j}-Q_{i-1,j-1})\big].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{i,j-\frac{1}{2}} = {} & \frac{1}{2}A(Q_{i,j-1}+Q_{ij}) - \frac{\Delta t}{2\Delta y}B^2(Q_{ij}-Q_{i,j-1}) \\
& -\frac{\Delta t}{8\Delta x}BA\big[(Q_{i+1,j}-Q_{ij})+(Q_{i+1,j-1}-Q_{i,j-1}) \\
& \qquad +(Q_{ij}-Q_{i-1,j})+(Q_{i,j-1}-Q_{i-1,j-1})\big].
\end{aligned}
$$

- 特别注意，ABq_y，BAq_x 用的是相应四个角点差商的平均值.

二维常系数线性双曲型方程组 Lax-Wendroff 格式的高分辨率改造

- 二维常系数线性双曲型方程组的 Godunov 通量 (迎风型)

$$F_{i-\frac{1}{2},j} = A^{+}Q_{i-1,j} + A^{-}Q_{ij}, \quad G_{i,j-\frac{1}{2}} = B^{+}Q_{i,j-1} + B^{-}Q_{ij}.$$

- 参照对流方程 CTU 的处理方法, 对二维常系数线性双曲型方程组 Lax-Wendroff 格式数值通量中的各项做迎风化+高分辨率校正改造.
- 即将 Lax-Wendroff 格式数值通量中的前两项改造成 Gogunov 迎风通量+ (相应一维带限制器) 高分辨率校正项; 再利用: $AB = (A^{+}+A^{-})(B^{+}+B^{-}) = A^{-}B^{-}+A^{+}B^{-}+A^{-}B^{+}+A^{+}B^{+}$ 对 ABq_y, BAq_x 的差商项做迎风化改造 (见 (20.25)-(20.28)).
- 实际计算时并不需要对矩阵做以上分解, 格式中出现的各项都可以通过求解相应的一维黎曼问题得到的涨落波给出.

改造后的二维高分辨率通量

- 将 Lax-Wendroff 格式数值通量中的各项做迎风化+高分辨率校正改造后得

$$
\begin{aligned}
F_{i-\frac{1}{2},j} = {} & A^+ Q_{i-1,j} + A^- Q_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m} |\lambda^{xp}|\Big(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|\lambda^{xp}|\Big)\tilde{W}^p_{i-\frac{1}{2},j} \\
& - \frac{\Delta t}{2\Delta y}\Big[A^- B^-(Q_{i,j+1} - Q_{ij}) + A^+ B^-(Q_{i-1,j+1} - Q_{i-1,j}) \\
& \qquad + A^- B^+(Q_{ij} - Q_{i,j-1}) + A^+ B^+(Q_{i-1,j} - Q_{i-1,j-1})\Big].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{i,j-\frac{1}{2}} = {} & B^+ Q_{i,j-1} + B^- Q_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m} |\lambda^{yp}|\Big(1 - \frac{\Delta t}{\Delta y}|\lambda^{yp}|\Big)\tilde{W}^p_{i,j-\frac{1}{2}} \\
& - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\Big[B^- A^-(Q_{i+1,j} - Q_{ij}) + B^+ A^-(Q_{i+1,j-1} - Q_{i,j-1}) \\
& \qquad + B^- A^+(Q_{ij} - Q_{i-1,j}) + B^+ A^+(Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1})\Big]
\end{aligned}
$$

二维高分辨率通量中的限制波

- $\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2},j} = \alpha^p_{i-\frac{1}{2},j} r^{xp}$, $\alpha^p_{i-\frac{1}{2},j} = (R^x)^{-1}(Q_{ij} - Q_{i-1,j})$, $\tilde{\mathcal{W}}^p_{i-\frac{1}{2},j}$ 则是将该波 $\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2},j}$ 与 x-方向迎风方向的波 $\mathcal{W}^p_{I-\frac{1}{2},j}$ 比较并采用适当限制器后得到的限制波, 其中 $I = \begin{cases} i-1, & \lambda^{xp} > 0, \\ i+1, & \lambda^{xp} < 0. \end{cases}$

- $\mathcal{W}^p_{i,j-\frac{1}{2}} = \alpha^p_{i,j-\frac{1}{2}} r^{yp}$, $\alpha^p_{i,j-\frac{1}{2}} = (R^y)^{-1}(Q_{ij} - Q_{i,j-1})$, $\tilde{\mathcal{W}}^p_{i,j-\frac{1}{2}}$ 则是将该波 $\mathcal{W}^p_{i,j-\frac{1}{2}}$ 与 y-方向迎风方向的波 $\mathcal{W}^p_{i,J-\frac{1}{2}}$ 比较并采用适当限制器后得到的限制波, 其中 $J = \begin{cases} j-1, & \lambda^{yp} > 0, \\ j+1, & \lambda^{yp} < 0. \end{cases}$

注: 以上高分辨率通量可以视作对 Lax-Wendroff 通量中的两个一维 (各含一个一阶和一个二阶) 法通量的一维迎风+高分辨率改造, 以及两个二次切通量的迎风改造的结果.

用波的传播方式累积各个波对高分辨率通量的贡献

类似于方程式 CTU 高分辨率通量的计算, 我们可以通过以下方式累积各涨落波和校正通量对方程组高分辨率通量的贡献:

1. 初始化: 令 $\tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j} = 0$, $\tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}} = 0$, $\forall\ i,\ j$.
2. 扫描各单元求解 x-方向的黎曼问题. 即对单元 $\mathcal{C}_{i-1,j}$, $\mathcal{C}_{ij}$ 的界面, 求解初值为 $Q_{i-1,j}$, Q_{ij} 的一维黎曼问题. 计算波 $\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2},j}$, 波速 $s^p_{i-\frac{1}{2},j}$, 以及涨落波 $\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \sum_{p=1}^m (s^p_{i-\frac{1}{2},j})^- \mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \sum_{p=1}^m (s^p_{i-\frac{1}{2},j})^+ \mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2},j}$.
3. 计算限制波 $\tilde{\mathcal{W}}^p_{i-\frac{1}{2},j}$, 并用此更新相应界面处的校正通量:

$$\tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j} = \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m} \left|s^p_{i-\frac{1}{2},j}\right| \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left|s^p_{i-\frac{1}{2},j}\right|\right) \tilde{\mathcal{W}}^p_{i-\frac{1}{2},j}.$$

用波的传播方式累积各个波对高分辨率通量的贡献

4. 通过求解关于右行涨落波 $\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$ 的二次切向黎曼问题计算上行切向涨落波 $\mathcal{B}^+\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$ 和下行切向涨落波 $\mathcal{B}^-\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$.
5. 用以上得到的上下行切向涨落波 $\mathcal{B}^\pm\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$ 更新 $\mathcal{C}_{ij}$ 上下界面的校正通量

$$\tilde{G}_{i,j\pm\frac{1}{2}} = \tilde{G}_{i,j\pm\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathcal{B}^\pm\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j},$$

注: 与通常意义下由左右两个状态做初值的黎曼问题不同, 二次切向黎曼问题是通过切向的一维方程组将向量 $\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$ 分解成切向的二次涨落波. 对常系数线性方程组, 记 $\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \sum_{i=1}^{m}\beta^p r^{yp}$, 则 $\mathcal{B}^\pm\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} = \sum_{i=1}^{m}(\lambda^{yp})^\pm\beta^p r^{yp} = B^\pm A^+(Q_{ij} - Q_{i-1,j})$

用波的传播方式累积各个波对高分辨率通量的贡献

6. 通过求解关于左行涨落 $\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$ 的二次切向黎曼问题计算上行切向涨落波 $\mathcal{B}^+\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$ 和下行切向涨落波 $\mathcal{B}^-\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}$, 并用于更新 $\mathcal{C}_{i-1,j}$ 上下界面的校正通量
$$\tilde{G}_{i-1,j\pm\frac{1}{2}} = \tilde{G}_{i-1,j\pm\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\mathcal{B}^\pm\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j}.$$

7. 对 y-方向每一对单元 $\mathcal{C}_{i,j-1}$, $\mathcal{C}_{ij}$ 间的界面, 重复第2-第6步的计算. 得到波 $\mathcal{W}^p_{i,j-\frac{1}{2}}$, 波速 $s^p_{i,j-\frac{1}{2}}$, 涨落波 $\mathcal{B}^\pm\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}}$, 以及与 y-方向比较得到的限制波 $\tilde{\mathcal{W}}^p_{i,j-\frac{1}{2}}$. 其中波速与限制波用于更新 $\tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}$, 将两个涨落波二次切向分裂为 $\mathcal{A}^\pm\mathcal{B}^+\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}}$ 和 $\mathcal{A}^\pm\mathcal{B}^-\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}}$ 分别用于更新 $\tilde{F}_{i\pm\frac{1}{2},j}$ 和 $\tilde{F}_{i\pm\frac{1}{2},j-1}$.

用波的传播方式累积得到的加校正通量的波的传播公式

8. 最后用加校正通量的波传播公式计算新时间步单元平均值:

$$
\begin{aligned}
Q_{ij}^{n+1} = Q_{ij}^{n} &- \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathcal{A}^{+}\Delta Q_{i-\frac{1}{2},j} + \mathcal{A}^{-}\Delta Q_{i+\frac{1}{2},j}) \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta y}(\mathcal{B}^{+}\Delta Q_{i,j-\frac{1}{2}} + \mathcal{B}^{-}\Delta Q_{i,j+\frac{1}{2}}) \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2},j}) - \frac{\Delta t}{\Delta y}(\tilde{G}_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{G}_{i,j-\frac{1}{2}}).
\end{aligned}
$$

注: 以上做法可以自然地推广于（color 型）变系数线性双曲型方程组, 也可以推广至（color 型）非线性双曲型方程组. 此时需注意对一次法向涨落波做二次切向涨落波分裂时应该使用其将要进入的单元上相应于二次切向方向的一维系统.

作业: 20.1，20.2，20.6

Thank You!