Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

变系数线性声波方程组 — 不总能通过特征分解对角化

变系数线性声波方程组$q_t + A(x)q_x = 0$, 其中

$$q(x,t) = \begin{bmatrix} p(x,t) \\ u(x,t) \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} 0 & K(x) \\ 1/\rho(x) & 0 \end{bmatrix}.$$

令 $c(x) = \sqrt{K(x)/\rho(x)}$ (声速), $Z(x) = \rho(x)c(x) = \sqrt{K(x)\rho(x)}$ (介质阻抗), 则有 $A(x) = R(x)\Lambda R^{-1}(x)$, 其中

$$R(x) = \begin{bmatrix} -Z(x) & Z(x) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda(x) = \begin{bmatrix} -c(x) & 0 \\ 0 & c(x) \end{bmatrix}.$$

系统的左行波满足 $p = -Z(x)u$, 右行波满足 $p = Z(x)u$.

变系数线性声波方程组 —— 常介质阻抗

当 $K(x) = Z_0^2/\rho(x)$ 时, 介质阻抗 $Z(x) = Z_0$ 为常数. 此时

- 系统的特征向量矩阵 $R(x) \equiv R$ 为常矩阵, 系统可对角化为

  $$w_t + \Lambda(x) w_x = 0, \quad \text{其中 } w(x,t) = R^{-1} q(x,t).$$

  因而系统的左行波和右行波是相互独立传播的.

- 在系统系数的间断点处, 系统的左行波满足 $p = -Z_0 u$, 右行波满足 $p = Z_0 u$, 系统的左行波波速一般不等于右行波波速.

- 声波在穿过系统系数的间断点时, 不会产生任何反射, 唯一的变化是声速的改变(因而波形会出现伸缩变形, 见p. 173, 例9.1, p.174, Fig. 9.4).

变系数线性声波方程组 —— 变介质阻抗

对于变介质阻抗 $Z(x)$ 不是常数. 此时

- 系统的特征向量矩阵 $R(x)$ 不是常矩阵, 系统可化为

  $$w_t+\Lambda(x)w_x = \Lambda(x)R_x^{-1}(x)R(x)w, \quad \text{其中 } w(x,t) = R^{-1}q(x,t).$$

  因而系统的左行波和右行波是耦合的, 不再是独立传播的.

- 声波在穿过系统系数的间断点时, 不仅会有透射波, 声速会随之改变, 还会产生反射波（见p. 175, Fig. 9.5）.

- 可以利用分段常系数系统, 通过求解相应黎曼问题, 并结合 Gogunov 方法近似求解变介质阻抗线性声波方程组.

变介质阻抗线性声波方程组黎曼问题的解

考虑变介质阻抗线性声波方程组黎曼问题:

$$q_t + A(x) q_x = 0, \quad q(x,0) = \begin{cases} q_l, & x < 0, \\ q_r, & x > 0; \end{cases} \quad A(x) = \begin{cases} A_l, & x < 0, \\ A_r, & x > 0. \end{cases}$$

- 黎曼问题的解由两个声波组成, 分别以声速 $c_l = \sqrt{K_l/\rho_l}$ 和 $c_r = \sqrt{K_r/\rho_r}$ 向左右两边传播, 并在之间形成一中间态 q_m.
- 左右声波（两个跳跃间断）分别为

$$q_m - q_l = \alpha^1 \begin{bmatrix} -Z_l \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q_r - q_m = \alpha^2 \begin{bmatrix} Z_r \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- 令 $R_{lr} = \begin{bmatrix} -Z_l & Z_r \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [R_l^1, R_r^2]$, 则有 $R_{lr}\alpha = q_r - q_l$.

变介质阻抗线性声波方程组黎曼问题的解

- 由 $R_{lr}^{-1} = \frac{1}{Z_l+Z_r}\begin{bmatrix} -1 & Z_r \\ 1 & Z_l \end{bmatrix}$ 和 $\alpha = R_{lr}^{-1}(q_r - q_l)$ 可解得 α.
- 再由 $q_m - q_l = \alpha^1 \begin{bmatrix} -Z_l \\ 1 \end{bmatrix}$ 或 $q_r - q_m = \alpha^2 \begin{bmatrix} Z_r \\ 1 \end{bmatrix}$ 可解得 q_m.
- 当 $Z_l = Z_r = Z_0$ 时, 黎曼问题解的结构与常系数时完全相同, 只是左右行波的传播速度（特征速度）可能不同.
- 利用黎曼问题的解可以计算声波在传播过程中在不同介质的界面处的透射系数和反射系数.

这种变介质阻抗线性声波方程组黎曼问题的求解方法可以推广至某些一般的分段常系数双曲组黎曼问题的求解.

透射系数和反射系数的计算

设 $q_r - q_l$ 恰为一右行入射波, 即 $q_r - q_l = \beta \begin{bmatrix} Z_l \\ 1 \end{bmatrix}$. 则由黎曼问题的解得

- $\alpha = R_{lr}^{-1}(q_r - q_l) = \frac{\beta}{Z_l+Z_r} \begin{bmatrix} Z_r - Z_l \\ 2Z_l \end{bmatrix}$. 于是
- 反射波 $\alpha^1 \begin{bmatrix} -Z_l \\ 1 \end{bmatrix} = \beta \frac{Z_r-Z_l}{Z_r+Z_l} \begin{bmatrix} -Z_l \\ 1 \end{bmatrix}$, 反射系数 $C_R \triangleq \frac{Z_r-Z_l}{Z_r+Z_l}$;
- 透射波 $\alpha^2 \begin{bmatrix} Z_r \\ 1 \end{bmatrix} = \beta \frac{2Z_l}{Z_r+Z_l} \begin{bmatrix} Z_r \\ 1 \end{bmatrix}$, 透射系数 $C_T \triangleq \frac{2Z_r}{Z_r+Z_l}$.
- 透射系数和反射系数分别反映的是透射波和反射波波前与波后压强跳跃强度与入射波压强跳跃强度之比.

变系数线性声波方程组初值问题的 Godunov 方法

- 首先计算给出每个单元 $\mathcal{C}_i$ 上的密度 ρ_i 和体模量 K_i;
- 令 Q_i^n 为 t_n 时刻 q 在单元 $\mathcal{C}_i$ 上的平均值;
- 在每个单元界面 $x_{i-1/2}$ 处解 $\rho_l = \rho_{i-1}$, $K_l = K_{i-1}$, $Q_l = Q_{i-1}^n$; $\rho_r = \rho_i$, $K_r = K_i$, $Q_r = Q_i^n$ 的黎曼问题, 得两个波 $\mathcal{W}_{i-1/2}^1 = \alpha_{i-1/2}^1 r_{i-1/2}^1$, $\mathcal{W}_{i-1/2}^2 = \alpha_{i-1/2}^2 r_{i-1/2}^2$, 其中

$$r_{i-1/2}^1 = \begin{bmatrix} -Z_{i-1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r_{i-1/2}^2 = \begin{bmatrix} Z_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{i-1/2} = \begin{bmatrix} -Z_{i-1} & Z_i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} (Q_i^n - Q_{i-1}^n),$$

  及相应波速 $s_{i-1/2}^1 = -c_{i-1}$, $s_{i-1/2}^2 = c_i$.
- 令 $\mathcal{A}^- \Delta Q_{i-1/2} = s_{i-1/2}^1 \mathcal{W}_{i-1/2}^1$, $\mathcal{A}^+ \Delta Q_{i-1/2} = s_{i-1/2}^2 \mathcal{W}_{i-1/2}^2$;

  格式: $Q_i^{n+1} = Q_i^n - \dfrac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{A}^+ \Delta Q_{i-1/2} + \mathcal{A}^- \Delta Q_{i+1/2})$.

变系数线性声波方程组初值问题的 Godunov 方法

令 $\Lambda_{i-1/2} = \begin{bmatrix} s^1_{i-1/2} & 0 \\ 0 & s^2_{i-1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{i-1} & 0 \\ 0 & c_i \end{bmatrix}$, $R_{i-1/2} = \begin{bmatrix} -Z_{i-1} & Z_i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

定义 $A_{i-1/2} = R_{i-1/2}\Lambda_{i-1/2}R^{-1}_{i-1/2}$. 则有

$$\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-1/2} = R_{i-1/2}\Lambda^-_{i-1/2}R^{-1}_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1}) = A^-_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1}),$$

$$\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2} = R_{i-1/2}\Lambda^+_{i-1/2}R^{-1}_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1}) = A^+_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1}),$$

所以格式也可以写成 (对比常系数时(4.43), (4.47), (4.48))

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(A^+_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1}) + A^-_{i+1/2}(Q_{i+1} - Q_i)).$$

变系数线性声波方程组初值问题的高分辨率方法

相应的高分辨率格式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2}^n + \mathcal{A}^-\Delta Q_{i+1/2}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{F}_{i+1/2} - \tilde{F}_{i-1/2}),$$

$\tilde{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m} |s_{i-1/2}^p|(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|s_{i-1/2}^p|)\tilde{\mathcal{W}}_{i-1/2}^p$，当 $\tilde{\mathcal{W}}_{i-1/2} = \mathcal{W}_{i-1/2}$ 时，

格式可以写成

$$\begin{aligned} Q_i^{n+1} = Q_i^n &- \frac{\Delta t}{2\Delta x}[A_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1}) + A_{i+1/2}(Q_{i+1} - Q_i)] \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}[A_{i+1/2}^2(Q_{i+1} - Q_i) - A_{i-1/2}^2(Q_i - Q_{i-1})]. \end{aligned}$$

可见修正项近似的是 $\frac{1}{2}\Delta t^2(A^2 q_x)_x$ 而不是泰勒展开所需要的 $\frac{1}{2}\Delta t^2 q_{tt} = \frac{1}{2}\Delta t^2 A(Aq_x)_x$，因此格式不具有形式上的二阶精度. 但由于迎风格式修正方程的扩散项 $\frac{1}{2}\Delta t^2 A^2 q_{xx}$ 被准确地表出，因此格式在解的光滑处仍有较好的数值表现 (比较p163 $ 9.3.1 (9.20, (9.21), (9.22)).

变系数线性声波方程组的高分辨率方法 —— 如何取限制器?

当考虑有间断的解时, 修正波 $\tilde{\mathcal{W}}^p_{i-1/2} = \phi(\theta^p_{i-1/2})\mathcal{W}^p_{i-1/2}$ 需要使用适当的限制器.

- 常系数时 $\theta^p_{i-1/2} = \dfrac{\alpha^p_{I-1/2}}{\alpha^p_{i-1/2}}$ 比较迎风方向同族波的强度;
- 变系数时, $\mathcal{W}^p_{i-1/2} = \alpha^p_{i-1/2} r^p_{i-1/2} = (l^p_{i-1/2}\Delta Q_{i-1/2}) r^p_{i-1/2}$, 对不同的 i 同为 p 族波并不意味着它们是相互平行的向量;
- 变系数时, $\theta^p_{i-1/2}$ 应能反映不平行程度, 而不仅仅是强度比.
- 方法一: $\theta^p_{i-1/2} := \dfrac{\mathcal{W}^p_{I-1/2}\cdot\mathcal{W}^p_{i-1/2}}{\mathcal{W}^p_{i-1/2}\cdot\mathcal{W}^p_{i-1/2}}$. 大多数情况(含非线性)下实际计算效果不错.

变系数线性声波方程组的高分辨率方法 —— 如何取限制器?

- 方法二：令 $\widehat{\mathcal{W}}^p_{I-1/2} = (l^p_{i-1/2}\Delta Q_{I-1/2})r^p_{i-1/2}$，即将 $\Delta Q_{I-1/2}$ 分解成 $R_{i-1/2}$ 的特征向量，然后取 $\theta^p_{i-1/2} := \dfrac{\widehat{\mathcal{W}}^p_{I-1/2}\cdot\mathcal{W}^p_{i-1/2}}{\mathcal{W}^p_{i-1/2}\cdot\mathcal{W}^p_{i-1/2}}$. 在特征向量变化较快时，效果优于方法一.

- 方法三：令 $\widehat{\mathcal{W}}^p_{I-1/2} = (l^p_{i-1/2}\mathcal{W}^t_{I-1/2})r^p_{i-1/2}$，即将 $\Delta Q_{I-1/2}$ 的透射波 $\mathcal{W}^t_{I-1/2}$ 分解成 $R_{i-1/2}$ 的特征向量，然后再取 $\theta^p_{i-1/2} := \dfrac{\widehat{\mathcal{W}}^p_{I-1/2}\cdot\mathcal{W}^p_{i-1/2}}{\mathcal{W}^p_{i-1/2}\cdot\mathcal{W}^p_{i-1/2}}$. 在特征向量变化很快时，效果更好.

注： 一般情况下方法三中的透射波 $\mathcal{W}^t_{I-1/2}$ 应该表示为

$$\mathcal{W}^t_{I-1/2} = \sum_{k:\lambda_k \mathrm{sign}(i-I)>0} R^k_{I-1/2} L^k_{I-1/2} \Delta Q_{I-1/2},$$

快速变化系数的均匀化

当介质在一个网格单元内有特征尺度远小于单元尺度的拟周期型的不均匀性时，有必要应用均匀化理论来恰当地定义 $\rho(x)$, $K(x)$ 在网格单元上的平均值 ρ_i, K_i, 并考虑用分片常系数线性声波方程组 $q_t + A_i q_x = 0$, 其中 $A_i = \begin{bmatrix} 0 & K_i \\ 1/\rho_i & 0 \end{bmatrix}$, 逼近原方程组.

由于 ρ 是密度(在一维时单位是：质量/长度), 因此, 在单元 $\mathcal{C}_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ 上的平均密度是单元上的总质量除以单元的长度, 即 $\rho(x)$ 在 $\mathcal{C}_i$ 上的算术平均值: $\rho_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \rho(x)dx$.

但并非所有量的单元等效量为该量的单元平均值.

快速变化系数的均匀化—等效弹性模量与等效体模量的计算

由一维弹性模量的定义 $\sigma(x) = K(x)\epsilon(x)$, 或 $\epsilon(x) = \frac{1}{K(x)}\sigma(x)$, 其中 $\sigma(x)$ 为 x 处的应力, $\epsilon(x) = X_x(x) - 1$ 为 x 处的应变（相对伸长率）. 特别地, 如果 $\sigma(x) \equiv \sigma$ 为常数, 则 $\mathcal{C}_i$ 的等效应变（相对伸长率）为

$$\epsilon_i = \frac{[X_{i+1/2} - X_{i-1/2}] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [X_x(x) - 1]dx$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \epsilon(x)dx = \Big(\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{1}{K(x)}dx\Big)\sigma.$$

因此, $\mathcal{C}_i$ 的等效弹性模量 K_i 为 $\Big(\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{1}{K(x)}dx\Big)^{-1}$, 这显然不是 $K(x)$ 的算术平均值. 而等效可压性系数 $\frac{1}{K_i}$ 则是算术平均值.

类似地，变系数线性声波方程组的等效体模量 K_i 也为 $\Big(\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{1}{K_0(x)}dx\Big)^{-1}$

(见p.26-28 § 2.7, 令 $K_0(x) = \rho_0(x)P'(\rho_0(x))$, 设 $\rho_0(x)\tilde{p}(x) \equiv const.$, 则由关系式 $\rho_0(x)\tilde{p}(x) = K_0(x)\tilde{\rho}(x)$, 及等效质量密度为质量密度的算术平均值即得.)

快速变化系数均匀化处理的合理性(p.185 例9.4)

考虑变介质线性声波方程组 $q(x,0)\equiv 0$ 的振荡壁型初边值问题:

$$q_t+A(x)q_x=0,\quad u(0,t)=\begin{cases}0.2\left[1+\cos(\frac{\pi(t-15)}{10})\right], & |t-15|<10,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

$$A(x)=\begin{bmatrix}0 & K(x)\\ 1/\rho(x) & 0\end{bmatrix},\quad \rho(x)=K(x)=\begin{cases}3, & 2i<x<2i+1,\\ 1, & 2i+1<x<2i+2.\end{cases}$$

声速 $c(x)=\sqrt{K(x)/\rho(x)}\equiv 1$, 但振荡壁产生的声波并非以声速 $c=1$, 而是近似以均匀化介质的声速 $\bar{c}=\sqrt{\hat{K}/\bar{\rho}}$ 向右传播, 其中

$$\bar{\rho}=\frac{1}{2}\Big(3+1\Big),\quad \hat{K}=\left(\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}+1\Big)\right)^{-1}$$

原因是介质界面间的反复的透射和反射使得能量传播速度(群速度)变慢.

前面所介绍的获得高分辨率的途径

前面我们只介绍了一种获得高分辨率有限体积格式的途径:

1. 将所给问题化为分段定义的黎曼问题;
2. 求解相应的分段定义的黎曼问题;
3. 用黎曼问题的解所给出的波定义形式上二阶精度的方法;
4. 对修正项的波应用适当的限制器以取得无振荡的效果.

下面我们来介绍其它一些常用的获得高分辨率的途径.

应用半时间步长点通量获得二阶精度

考虑基于通量差的格式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n),$$

其中 $F_{i-1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-1/2}, t))dt$. 只要能以充分高的精度计算该积分, 理论上就可以给出任意高精度的方法. 例如:

- 在 t_n 处做 Taylor 展开, 并利用方程将 ∂_t^k 换为 ∂_x^k (见Chp. 6). 该方法难于推广至高维高分辨率方法(需做特征分解等).

- 令 $F_{i-1/2}^n = f(Q_{i-1/2}^{n+1/2})$, 其中 $Q_{i-1/2}^{n+1/2} \approx q(x_{i-1/2}, t_{n+1/2})$ 也可以利用 t_n 处的 Taylor 展开计算 (见 Richtmer 两步法(4.23)).

在解的光滑处, 前者如果展开至二阶, 则为二阶精度. 后者由于时间方向采用了中点积分公式, 因此当 $Q_{i-1/2}^{n+1/2} \approx q(x_{i-1/2}, t_{n+1/2})$ 有二阶以上逼近精度时也是二阶的.

应用半时间步长点通量获得二阶高分辨率的方法

在解的间断处, 为了得到高分辨率, 仍需借助迎风与限制的思想.

- 将 q 在 (x_{i-1}, t_n), (x_i, t_n) 做 Taylor 展开

$$Q_{i-1/2}^{L,n+1/2} \approx q(x_{i-1}, t_n) + \frac{\Delta x}{2} q_x(x_{i-1}, t_n) + \frac{\Delta t}{2} q_t(x_{i-1}, t_n) + \cdots ;$$

$$Q_{i-1/2}^{R,n+1/2} \approx q(x_i, t_n) + \frac{\Delta x}{2} q_x(x_i, t_n) + \frac{\Delta t}{2} q_t(x_i, t_n) + \cdots ,$$

- 利用方程将 ∂_t 换为 ∂_x, 用迎风和限制器方法重构斜率 q_x.
- 通过求解黎曼问题得 $Q_{i-1/2}^{n+1/2} = q^{\downarrow}(Q_{i-1/2}^{L,n+1/2}, Q_{i-1/2}^{R,n+1/2})$.
- 高分辨率格式: $Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f(Q_{i+1/2}^{n+1/2}) - f(Q_{i-1/2}^{n+1/2})\right)$.

应用半时间步长点通量获得二阶高分辨率的方法

通过 $q^{\downarrow}(Q_{i-1/2}^{L,n+1/2}, Q_{i-1/2}^{R,n+1/2})$ 定义 $Q_{i-1/2}^{n+1/2}$ 的优点与合理性:
1) 仅需 $(x_{i-1/2}, t_{n+1/2})$ 一点的值, 而非 $x_{i-1/2} \times (t_n, t_{n+1})$ 的值;
2) 方程的解关于初值具有连续依赖性.

以上做法的缺点在于对 q_x 的重构需要基于每个单元上的特征分解, 这类似于要求解一个黎曼问题. 为了减少工作量, 通常要采用一些近似或简化的方法.

在波的传播法中, 只求解一次 Q_{i-1}^n 与 Q_i^n 之间的黎曼问题, 由黎曼问题的解给出的波的结构被用于构造一阶的数值通量, 同时, 由于 $Q_i - Q_{i-1} \approx q_x \Delta x$, 这些波也可以视为 q_x 的特征分解, 从而被用于 Taylor 展开和二阶修正项. 总体来说, 波的传播法比较简单, 且更易于推广至一般的双曲系统.

高阶高分辨率方法

- 对线性问题, 尤其是常系数线性问题的光滑解, 高阶方法甚至谱方法, 常常比我们前面介绍的高分辨率方法更有效. 而当系数或解有间断时, 高阶方法则很难奏效.
- 对于 REA 型的算法, 基于分片常数和分片线性的重构可以进一步提高为分片更高次的重构. 分片抛物线法(PPM) 就属于这类算法.
- 另一类方法是基于 q 的原函数的高次多项式插值重构的方法. 例如 ENO (本质无振荡) 和 WENO (加权本质无振荡) 格式. 前者的基本想法是在包含 i 点的所有模板(stencil) 中选择使原函数的插值多项式具有最小振荡的模板给出的插值多项式用于重构, 而后者则根据振荡的大小用加权的方式给出重构.

先做空间离散，再做时间离散 —— 线法

利用 Taylor 展开，并利用方程将 q 关于时间的导数转换为关于空间的导数的做法常常会带来额外的复杂性. 解决的办法是将空间和时间的离散化分别处理.

- 先将方程做空间离散化. 这将把 PDE 半离散化为关于时间的 ODE 系统.
- 再应用适当的 ODE 求解器离散并求解所得到的 ODE 系统.
- 这种做法尤其适用于构造高于二阶精度的算法.

空间半离散化的结果 —— 单元平均值的发展方程

令 $$Q_i(t) \approx \bar{q}_i(t) = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x,t)\,dx.$$

则由守恒律 $q_t + f(q)_x = 0$ 有

$$\bar{q}_i'(t) = -\frac{1}{\Delta x}[f(q(x_{i+1/2},t)) - f(q(x_{i-1/2},t))].$$

将该式中的 $\bar{q}_i(t)$ 换为 $Q_i(t)$, $f(q(x_{i\pm1/2},t))$ 换为数值通量 $F_{i\pm1/2}(Q(t))$, 例如取 $F_{i-1/2}(Q(t)) = f(q^{\downarrow}(Q_{i-1}(t), Q_i(t)))$, 则得

$$Q_i'(t) = -\frac{1}{\Delta x}[F_{i+1/2}(Q(t)) - F_{i-1/2}(Q(t))] \equiv \mathcal{L}_i(Q(t)).$$

由此导出一个关于单元平均值 $Q(t)$ 的耦合的常微分方程组:

$$Q'(t) = \mathcal{L}(Q(t)).$$

全离散化 —— 将单元平均值的发展方程关于时间做离散化

令 $Q_i^n \approx Q_i(t_n)$, 对单元平均值的发展方程关于时间做离散化. 例如, 用步长为 Δt 的欧拉法得 Godunov 格式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \Delta t \mathcal{L}_i(Q^n) = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}[F_{i+1/2}(Q^n) - F_{i-1/2}(Q^n)].$$

本质区别

- 这里 $F_{i-1/2}(Q^n) \approx f(q(x_{i-1/2}, t_n))$, 指定时刻的通量值, 以前 $F_{i-1/2}(Q^n) \approx \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} q(x_{i-1/2}, t)\,dt$, 时间步通量均值.
- 一般地, 半离散化方程全离散化时只用通量在某些特定时刻的近似值, 而不是用一个时间步上近似的通量平均值.
- 为得到高阶格式, 以前的做法是设计更精确的计算一个时间步上近似的通量平均值的方法, 例如 Lax-Wendroff 格式. 而这里要采用的是一些更易于推广至高维的方法.

空间、时间分别离散化时取得高阶精度的方法

为得到高阶格式, 我们可以

- 将指定时刻分片常数的 $Q(t)$ 替换为该时刻的分片线性, 分片二次等分片多项式逼近, 并结合限制器, 或 ENO, WENO 等;
- 用高阶的时间步进格式替换一阶的欧拉法求解半离散化后得到的 ODEs.

例如, 记 $Q_{i-1}^R = Q_{i-1} + \frac{\Delta x}{2}\sigma_{i-1}$, $Q_i^L = Q_i - \frac{\Delta x}{2}\sigma_i$, 令

$$F_{i-1/2}(Q) = f(q^{\downarrow}(Q_{i-1}^R, Q_i^L)).$$

则对适当选取的斜率限制器, $F_{i-1/2}(Q)$ 在非极值点的光滑处, 是具有二阶精度的数值通量.

注: 在高维情形, 将空间与时间分离便于高阶格式的构造与分析.

空间、时间分别离散化时取得时间高阶精度的方法

作为时间方向高精度方法的例，考虑两级显式 Runge-Kutta 格式:

$$Q_i^* = Q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[F_{i+1/2}(Q^n) - F_{i-1/2}(Q^n)] = Q_i^n + \frac{1}{2}\Delta t \mathcal{L}_i(Q^n),$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}[F_{i+1/2}(Q^*) - F_{i-1/2}(Q^*)] = Q_i^n + \Delta t \mathcal{L}_i(Q^*).$$

- 每个时间步需要在 t_n 和 $t_n + \Delta t/2$ 求两个黎曼问题，但仅需它们的解在 $(x_{i-1/2}, t_n^+)$, $(x_{i-1/2}, (t_n + \Delta t/2)^+)$ 处的值;
- Q_i^*, Q_i^{n+1} 分别是 $t_{n+1/2}$, t_{n+1} 时单元 $\mathcal{C}_i$ 上 q 的近似平均值.
- 格式的时间精度为二阶，空间精度由 $\mathcal{L}_i(Q)$ 决定. 例如，取 $F_{i-1/2}(Q(t)) = f(q^{\downarrow}(Q_{i-1}(t), Q_i(t)))$ 时为二阶，而适当选取斜率并取 $F_{i-1/2}(Q) = f(q^{\downarrow}(Q_{i-1}^R, Q_i^L))$ 时则可达三阶.

TVD 的时间步进格式

在构造高分辨率方法时，我们希望在解 ODEs 时，时间步进格式不会给数值解带来新的过度的数值振荡.

例如，要求时间步进格式是 TVD 的，即 $TV(Q^{n+1}) \leq TV(Q^n)$.

★ 对某些时间步进格式，其 TVD 性质归结为证明相应的欧拉格式 $Q^{n+1} = Q^n + \Delta t \mathcal{L}(Q^n)$ 的 TVD 性质. 例如以下格式

$$Q^* = Q^n + \Delta t \mathcal{L}(Q^n), \quad Q^{**} = Q^* + \Delta t \mathcal{L}(Q^*), \quad Q^{n+1} = \frac{1}{2}(Q^* + Q^{**}).$$

注 1: 这也是一个两级显式 Runge-Kutta 格式. 值得注意的是前面另一个两级显式 Runge-Kutta 格式(10.16) 不具备这一性质.

注 2: TVD 时间步进方法又被称为强保稳定的时间离散化方法.

基于原函数的重构方法

- 获得空间高精度的关键在于给出通量 $f(q(x_{i-1/2}, t))$ 的高阶近似数值通量 $F_{i-1/2}$.
- 例如，通过使用带斜率限制器的分片线性重构定义 Q^R_{i-1}, Q^L_i，再由黎曼问题的解给出二阶近似 $Q_{i-1/2} = q^{\downarrow}(Q^R_{i-1}, Q^L_i)$.

问题: 如何由分片常数的单元平均值 $\bar{q}_i(t)$ 构造 $q(t)$ 的具有更高逐点逼近精度的多项式.

重要的事实: 在给定的时刻 t，定义 $q(x, t)$ 的原函数

$$w(x) = \int_{x_{1/2}}^{x} q(\xi, t)d\xi.$$

则尽管 $\bar{q}_i(t)$ 只是 t 时刻 $\mathcal{C}_i$ 上 $q(x, t)$ 的平均值，

$$W_i = w(x_{i+1/2}) = \int_{x_{1/2}}^{x_{i+1/2}} q(\xi, t)d\xi = \Delta x \sum_{j=1}^{i} \bar{q}_j(t)$$

却是 $w(x)$ 在 $x_{i+1/2}$ 点的精确值.

基于原函数的重构方法

巧妙的方案: 利用原函数 $w(x)$ 的插值多项式及其误差估计, 给出 $q(x,t)=w'(x)$ 的多项式逼近及其误差估计.

例如, 当 $w(x)\in C^{s+1}$ 时, 利用 $w(x)$ 在 $s+1$ 个节点 x_{i-j}, $\cdots,x_{i-j+s}$ 上的值 $W_{i-j},\cdots,W_{i-j+s}$ 做插值多项式 $p_i(x)$, 则有

$$p_i(x)=w(x)+O(\Delta x^{s+1}) \text{ 及 } p_i'(x)=q(x,t)+O(\Delta x^s),\quad \forall x\in\mathcal{C}_i.$$

然后用该多项式定义 $q(x,t)$ 在各单元 $\mathcal{C}_i$ 的左右界面上的值

$$Q_i^L=p_i'(x_{i-1/2}),\quad Q_i^R=p_i'(x_{i+1/2}).$$

如此, 在界面 $x_{i-1/2}$ 处就定义了 t 时刻的黎曼初值

$$Q_{i-1}^R=p_{i-1}'(x_{i-1/2}) \text{ 和 } Q_i^L=p_i'(x_{i-1/2}).$$

基于原函数重构的具有空间高阶精度的方法

- 对半离散化的变量 $Q(t)$，令 $W_i = \Delta x \sum_{j=1}^{i} Q_j(t)$;
- 做过 $(x_{i-j}, W_{i-j}), \cdots, (x_{i-j+s}, W_{i-j+s})$ 的插值多项式 $p_i(x)$;
- 令 $Q_i^L = p_i'(x_{i-1/2})$, $Q_i^R = p_i'(x_{i+1/2})$, $\forall i$;
- 定义 $x_{i-1/2}$ 处的数值通量 $F_{i-1/2}(Q(t)) = f(q^{\downarrow}(Q_{i-1}^R, Q_i^L))$;
- 令 $\mathcal{L}_i(Q(t)) \equiv -\frac{1}{\Delta x}[F_{i+1/2}(Q(t)) - F_{i-1/2}(Q(t))]$;
- 则 $Q^{n+1} = Q^n + \Delta t \mathcal{L}(Q^n)$ 是有空间 s 阶精度的欧拉格式;
- 结合高阶的 TVD 时间步进方法构造时空高阶格式.

问题: 如何控制由于重构带来的 TV 的增加 (数值振荡)?

基于原函数的重构方法 —— 本质无振荡方法 (ENO)

在解的间断处，或解变化剧烈处的邻域内我们并不指望取得高阶的多项式逼近，这时首要的任务是控制数值振荡.

- 对分片线性重构，可以通过引入限制器的方法使重构的分片线性函数 TV 不增. 例如， minmod 斜率选择的是所有相邻单元上最缓的斜率.
- minmod 斜率的思想简单推广至高阶多项式重构即得最原始的 ENO 方法. 即在重构时分别取 $j = 1, 2, \cdots, s$，取所得的 s 个插值多项式中其导数限制在 $\mathcal{C}_i$ 上振荡最小的插值多项式的导数 $p_i'(x)$ 作为重构多项式.
- 最原始的 ENO 方法的缺点是其工作量大且对小扰动敏感.

基于原函数的重构方法 —— 本质无振荡方法 (ENO)

- 应用更广的 ENO 方法: 先做过 W_{i-1}, W_i 的一次多项式 $p_i^{(1)}(x)$; 比较 $\{W_{i-2}, W_{i-1}, W_i\}$, $\{W_{i-1}, W_i, W_{i+1}\}$ 的二阶差商, 并取二阶差商中较小的(minmod)一组数据应用牛顿插值法将一次多项式 $p_i^{(1)}(x)$ 拓展为二次插值多项式 $p_i^{(2)}(x)$; $\cdots\ \cdots$, 直至用 $s+1$ 个数据构造出 s 次多项式 $p_i^{(s)}(x)$.

- 这样做克服了工作量大的缺点, 但对小扰动仍然敏感.

- 注意 一阶差商 $\frac{W_i - W_{i-1}}{\Delta x} = \bar{q}_i$, 而我们最终需要的是插值多项式的导数 $p_i'(x)$. 因此在实际计算时并不需要计算原函数 W_i 的值.

基于原函数的重构方法 —— 加权本质无振荡方法 (WENO)

- 加权本质无振荡方法 (WENO): 其基本思想是将基于所有可能模板计算得到的多项式按某种原则做加权平均来得到最终的多项式 $p_i(x)$.
- ENO 取各阶变差依次最小的模板的权为 1, 其它的权为零.
- 一般则可令变差较小者权重较大, 变差较大者权重较小.
- WENO 由于对小扰动不敏感, 因此有更好的稳定性.
- 但其工作量却与原始的ENO 相当. 为减少工作量可考虑仿照差商模式的ENO, 但只舍弃差商明显较大的分支, 而将其它分支保留并最终做加权平均.

研究交错网格和中心格式的动机

- 对于非线性双曲守恒律问题, 求解黎曼问题计算量很大, 且很可能无法求得精确解.
- 与仅需计算通量值的算法相比, 黎曼问题近似解求解器仍然计算量太大.
- 简单的数值通量算法, 例如 Lax-Friedtichs 方法 (见§ 4.6) $F_{i-1/2} = \mathcal{F}(Q_{i-1}, Q_i) = \frac{1}{2}[f(Q_{i-1}) + f(Q_i)] - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(Q_i - Q_{i-1})$, 只有一阶精度, 且有严重的耗散. 因此, 要得到高精度的数值解, 一般需要很密的网格, 计算量也非常大.
- 能否找到一种方法, 通过相对简单的计算就可以得到较高精度的数值解?

基于 Gogunov算法和 Lax-Friedtichs格式的交错网格思想

- Lax-Friedtichs 格式:
  $Q_i^{n+1} = \frac{1}{2}(Q_{i-1}^n + Q_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[f(Q_{i+1}^n) - f(Q_{i-1}^n)].$
- 注意在计算 Q_i^{n+1} 时，只用到 Q_{i-1}^n 和Q_{i+1}^n，即交错网格点上的信息.
- 因此，若引入交错网格，在奇数时间步 t_{2n-1} 只有奇数网格单元和其上定义的平均值 $Q_{2i-1}^{2n-1}, \forall i$，在偶数时间步 t_{2n} 只有偶数网格单元和其上定义的平均值 $Q_{2i}^{2n}, \forall i$.
- 则应用 Godunov 算法即可以得到形式上与 Lax-Friedtichs 格式一样的在奇数时间步 t_{2n-1} 只利用奇数网格单元平均值 $Q_{2i-1}^{2n-1}, \forall i$，计算偶数时间步 t_{2n} 偶数网格单元平均值 $Q_{2i}^{2n}, \forall i$；而在偶数时间步则只利用偶数网格单元平均值计算下一步的奇数网格单元平均值.

交错网格上中心格式的推导

- 在时间步 t_{2n-1} 标号为 $2i-1, 2i+1$ 的单元分别为 $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, 其上的均值分别为 Q_{2i-1}^{2n-1}, Q_{2i+1}^{2n-1}.
- 由守恒律方程有

$$
\begin{aligned}
Q_{2i}^{2n} &= \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} \tilde{q}(x, t_{2n})dx = \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} \tilde{q}(x, t_{2n-1})dx \\
&- \frac{1}{2\Delta x}\left[\int_{t_{2n-1}}^{t_{2n}} f(\tilde{q}(x_{2i+1}, t))dt - \int_{t_{2n-1}}^{t_{2n}} f(\tilde{q}(x_{2i-1}, t))dt\right],
\end{aligned}
$$

其中 $\tilde{q}(x, t)$ 是以 Q_{2i-1}^{2n-1}, Q_{2i+1}^{2n-1} 为初值的黎曼问题的解.

交错网格上中心格式的推导

- 而当网格步长满足 CFL 条件, 即库朗数小于等于 1 时,
  $$\tilde{q}(x_{2i-1}, t) \equiv Q_{2i-1}^{2n-1}, \quad \tilde{q}(x_{2i+1}, t) \equiv Q_{2i+1}^{2n-1}, \quad \forall t \in [t_{2n-1}, t_{2n}].$$
- 于是得奇数步到偶数步的格式
  $Q_{2i}^{2n} = \frac{1}{2}(Q_{2i-1}^{2n-1} + Q_{2i+1}^{2n-1}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[f(Q_{2i+1}^{2n-1}) - f(Q_{2i-1}^{2n-1})].$
- 类似地得偶数步到奇数步的格式
  $Q_{2i-1}^{2n+1} = \frac{1}{2}(Q_{2i-2}^{2n} + Q_{2i}^{2n}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[f(Q_{2i}^{2n}) - f(Q_{2i-2}^{2n})].$
- 虽然该格式形式上与 Lax-Friedtichs 格式一样, 但却有本质区别. 作为 REA 算法, 前者唯一的近似出现在用网格平均值代替网格上的真解, 而后者还在发展步使用了近似的数值通量, 并因此引入了过度的耗散.

高精度的交错网格中心格式 — 可不做特征分解直接推广至方程组

由于使用网格平均值逼近网格上的真解, 因此基于均值的交错网格上的中心格式只有一阶精度. 为提高逼近精度, 我们可以

- 利用限制器或 ENO, WENO 的方法做分片线性, 或分片高次多项式重构; 用重构后的分片多项式做初值的黎曼问题的解在单元中心线上的值 $\tilde{q}(x_{2i-1}, t)$ (奇数步), $\tilde{q}(x_{2i}, t)$ (偶数步) 不再是常值.
- 但当网格步长满足 CFL 条件时, $\tilde{q}(x, t)$ 的间断不会传播到网格中心线, 因此可以利用 Taylor 展开和方程计算网格中心线上的高精度通量近似值, 而不必借助于求解黎曼问题.
- 而且当前层每一个黎曼问题的左、右行涨落波的所有信息都局限于下一层共同的一个相应单元上.
- 由于以上原因, 在重构步使用斜率限制器等时, 可以对分量做, 而不必做特征分解. 从而进一步减少了工作量.

高精度的交错网格中心格式

例如二阶的 Nessyahu-Tadmor 格式

- 设重构后的斜率为 $\sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}$,
- 则重构后的分片线性函数在 $\mathcal{C}_i$ 上的网格平均值为 $\bar{Q}_i^n = \frac{1}{2}(Q_{i-1}^n + Q_{i+1}^n) + \frac{1}{8}\Delta x(\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1})$.
- $\tilde{q}(x_{i-1}, t_{n+1/2}) \approx Q_{i-1}^n - \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{q}(x_{i-1}, t_n))$ (由泰勒展开和方程).
- 令 $\phi_{i-1}^n \approx \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{q}(x_{i-1}, t_n))$, 例如取 $\phi_{i-1}^n = f'(Q_{i-1}^n)\sigma_{i-1}$, 或以类似于斜率重构的方法直接估算相邻单元通量变化率.
- 令 $F_{i-1}^{n+1/2} = f(Q_{i-1}^n - \frac{1}{2}\Delta t \phi_{i-1}^n)$.
- 更新格式: $Q_i^{n+1} = \bar{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^{n+1/2} - F_{i-1}^{n+1/2})$.

作业: 9.2，9.3，10.1，10.2.

Thank You!