Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

收敛性、精度与稳定性

本章我们将限于讨论初值问题, 并假设初值有紧支集. 因而对于双曲型问题, 解始终有紧支集.

对一个算法的评估通常通过以下两个手段:

- **用测试问题考验**: 用一些相对简单, 有精确解或可以通过某种方式（如其它理论、算法、物理实验等）给出用于比较的高精度的近似解, 的问题来测试算法的有效性.
- **做收敛性和精度的理论分析**: 可能的情况下, 我们希望能证明数值解当网格尺度趋于零时收敛到正确的物理解, 并得到数值解的较好的误差估计.

收敛性的定义

设 Q_i^n 为解的近似值, q_i^n 为解的精确值(它们在某些方法中是节点函数值, 而在另一些方法中则是单元平均值). 设 $T = N\Delta t$. 此时, 近似解在 T 时刻的整体误差为

$$E^N = Q^N - q^N.$$

通常我们总假定 $\Delta t, \Delta x$ 以某种给定的加密路径加密. 例如, 对于双曲型问题, 总可以假定网格比 $\Delta t/\Delta x$ 是常数.

Definition

称方法在 T 时刻依范数 $\|\cdot\|$ 收敛, 如果

$$\lim_{N=[T/\Delta t]\to\infty} \|E^N\| = 0.$$

称方法有 s 阶精度, 如果

$$\|E^N\| = O(\Delta t^s).$$

收敛性分析常用的范数

- L^∞-范数: 理想的收敛结果, 但对于有间断解的问题, 一般却不可能实现.
- L^2-范数：由于有 Fourier 分析的工具, 对线性问题会带来许多方便.
- L^1-范数：由于 L^1-可积性自身在问题中的特殊重要性, 研究守恒律时常常得到应用.

局部截断误差及其在收敛性分析中的作用

整体误差估计的通常做法:

- 研究算法在一个时间步引入的误差 —— 证明算法与微分方程是相容的, 并且在任何一个时间步只引入一个小误差.
- 研究算法的稳定性 —— 证明局部误差不会过度增长, 并进一步给出用局部误差表出的整体误差界.

一般地, 一个单步法可以写为 $Q^{n+1} = \mathcal{N}(Q^n)$. 因此, 算法在一个时间步产生的单步误差为 $\mathcal{N}(q^n) - q^{n+1}$, $q^n = q(\cdot, t_n)$ 为真解.

局部截断误差可以定义为

$$\tau^n = \frac{1}{\Delta t}(\mathcal{N}(q^n) - q^{n+1}).$$

我们将看到, 在算法稳定的条件下, 算法的整体误差阶一般与局部截断误差阶相同.

相容性、局部截断误差的阶

Definition

若对满足方程的任意光滑函数都有

$$\lim_{n=[t/\Delta t]\to\infty} \tau^n = 0, \quad \forall t \in (0,T].$$

则称该算法与方程是相容的.

Definition

若对满足方程的任意光滑函数都有

$$\tau^n = O(\Delta x^s), \quad \forall t \in (0,T], \ n\Delta t \le T.$$

则称该算法的局部截断误差是 s 阶的.

注意, 在使用这些定义时应指明所使用的范数和满足定义的条件.

$q_t + \bar{u} q_x = 0$ 的迎风格式的局部截断误差是一阶的 (L^∞-范, $u \in C^2$).

稳定性分析的目标

设 $Q^n = q^n + E^n$, 则有 $Q^{n+1} = \mathcal{N}(Q^n) = \mathcal{N}(q^n + E^n)$.

于是, t_{n+1} 时刻的整体误差可以表示为

$$\begin{aligned} E^{n+1} = Q^{n+1} - q^{n+1} &= \mathcal{N}(q^n + E^n) - \mathcal{N}(q^n) + \mathcal{N}(q^n) - q^{n+1} \\ &= \left[\mathcal{N}(q^n + E^n) - \mathcal{N}(q^n)\right] + \Delta t \tau^n. \end{aligned}$$

稳定性理论就是要分析 $[\mathcal{N}(q^n + E^n) - \mathcal{N}(q^n)]$ 与 E^n 的关系, 给出其用 E^n 表示的在适当范数意义下的界.

注： 除了通过分析相容性和稳定性证明算法收敛性的方法之外, 通过分析稳定性和数值解在特定函数空间的紧性证明收敛性也是一类常用的方法。

压缩算子

- 压缩算子: 若存在范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\|\mathcal{N}(P) - \mathcal{N}(Q)\| \leq \|P - Q\|, \quad \forall\ P, Q.$
- 若 $\mathcal{N}$ 是压缩算子, 则有

$$\begin{aligned}\|E^{N+1}\| \leq \|E^N\| + \Delta t\|\tau^N\| &\leq \|E^0\| + \Delta t \sum_{n=0}^{N} \|\tau^n\| \\ &\leq \|E^0\| + T \max_{0\leq n\leq N} \|\tau^n\|.\end{aligned}$$

- 若 $\mathcal{N}$ 是与方程相容的压缩算子, 初始近似满足 $\lim_{\Delta x\to 0} \|E^0\| = 0$, 则该算法是收敛的.
- 若算法还满足其局部截断误差是 s 阶的, 且 $\|E^0\| = O(\Delta x^s)$, 则算法的整体误差阶也是 s 阶的.

微增算子 —— 适当放松压缩条件

- 微增算子: 若存在范数 $\|\cdot\|$ 和常数 $\alpha \geq 0$, 使得 $\|\mathcal{N}(P) - \mathcal{N}(Q)\| \leq (1 + \alpha\Delta t)\|P - Q\|, \quad \forall\ P, Q$.
- 若 $\mathcal{N}$ 是微增算子, 则有

$$
\begin{aligned}
\|E^{N+1}\| &\leq (1+\alpha\Delta t)\|E^N\| + \Delta t\|\tau^N\| \\
&\leq (1+\alpha\Delta t)^{N+1}\|E^0\| + \Delta t \max_{0\leq n\leq N}\|\tau^n\| \sum_{n=0}^{N}(1+\alpha\Delta t)^{N-n} \\
&\leq e^{\alpha T}\left(\|E^0\| + T \max_{0\leq n\leq N}\|\tau^n\|\right).
\end{aligned}
$$

- 若 $\mathcal{N}$ 是与方程相容的微增算子, 初始近似满足 $\lim_{\Delta x\to 0}\|E^0\| = 0$, 则该算法是收敛的.
- 若算法还满足其局部截断误差是 s 阶的, 且 $\|E^0\| = O(\Delta x^s)$, 则算法的整体误差阶也是 s 阶的.

线性方法的 Lax-Richtmyer 稳定性

- 若 $\mathcal{N}$ 为线性算子, 则微增条件就简化为 $\|\mathcal{N}(E^n)\| \leq (1+\alpha\Delta t)\|E^n\|, \forall E^n$, 即 $\|\mathcal{N}\| \leq 1+\alpha\Delta t$.
- 若 $\mathcal{N}$ 为线性算子, 则有 $E^{n+1} = \mathcal{N}(E^n) + \Delta t \tau^n = \mathcal{N}^{n+1}(E^0) + \Delta t \sum_{m=0}^{n} \mathcal{N}^m(\tau^{n-m})$.
- 线性算子 $\mathcal{N}$ 称为是 Lax-Richtmyer 稳定的, 如果 $\exists C > 0$, s.t. $\|\mathcal{N}^n\| \leq C, \forall n \leq N = [T/\Delta t]$.
- 若线性算子$\mathcal{N}$是 Lax-Richtmyer 稳定的, 则其整体误差满足 $\|E^N\| \leq C(\|E^0\| + T \max_{0\leq n \leq N-1} \|\tau^n\|)$.

L^2 稳定性、Fourier 分析方法、von Neumann 条件

记 $i=\sqrt{-1}$, l 为网格指标. 设 $\|Q^n\|_2^2 \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty}|Q_l^n|^2\Delta x<\infty$.

- 则 $Q_l^n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{Q}^n(\xi)e^{i\xi l\Delta x}d\xi$, $\hat{Q}^n(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{l=-\infty}^{\infty}Q_l^n e^{-i\xi l\Delta x}$.
- 设由算法得 $Q_l^{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{Q}^n(\xi)g(\xi,\Delta x,\Delta t)e^{i\xi l\Delta x}d\xi$. 则称 $g(\xi,\Delta x,\Delta t)$ 为算法关于波数 ξ 的增长因子, 因为此时有 $\hat{Q}^{n+1}(\xi)=\hat{Q}^n(\xi)g(\xi,\Delta x,\Delta t)$.
- 由 Parseval 关系式 $\|Q^n\|_2=\|\hat{Q}^n\|_2\triangleq(\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{Q}^n(\xi)|^2d\xi)^{1/2}$, 可以方便地将 L^2 稳定性分析转化为对增长因子的估计.
- 算法 L^2 稳定的 von Neumann 条件: 存在常数 $\alpha\ge 0$, 使得对所有的波数 ξ, 都有 $|g(\xi,\Delta x,\Delta t)|\le 1+\alpha\Delta t$.

L^2 稳定性、Fourier 分析方法、von Neumann 条件

例如, 考虑 $q_t + \bar{u} q_x = 0$ ($\bar{u} > 0$) 的迎风格式 ($\nu = \bar{u}\Delta t/\Delta x$):

$$Q_I^{n+1} = Q_I^n - \nu(Q_I^n - Q_{I-1}^n) = (1-\nu)Q_I^n + \nu Q_{I-1}^n,$$

取 $Q_I^n = e^{i\xi I \Delta x}$ 代入格式得

$$Q_I^{n+1} = (1-\nu)e^{i\xi I\Delta x} + \nu e^{i\xi(I-1)\Delta x} = [(1-\nu) + \nu e^{-i\xi\Delta x}]Q_I^n.$$

所以 $g(\xi, \Delta x, \Delta t) = (1-\nu) + \nu e^{-i\xi\Delta x}$, $\forall \xi$.

$\therefore$ 迎风格式 L^2-稳定 $\Leftrightarrow |g(\xi, \Delta x, \Delta t)| \le 1, \ \forall \xi \Leftrightarrow 0 \le \nu \le 1.$

迎风格式 L^1-稳定性

当条件 $0 \le \nu \le 1$ 成立时，迎风格式的解满足

$$
\begin{aligned}
\|Q^{n+1}\|_1 &= \Delta x \sum_i |Q_i^{n+1}| = \Delta x \sum_i |(1-\nu)Q_i^n + \nu Q_{i-1}^n| \\
&\le \Delta x \sum_i \left[(1-\nu)|Q_i^n| + \nu |Q_{i-1}^n|\right] \\
&\le \Delta x \sum_i \left[(1-\nu)|Q_i^n| + \nu |Q_i^n|\right] = \|Q^n\|_1.
\end{aligned}
$$

这说明此时迎风格式是 L^1-压缩的，因而也是 L^1-稳定的.

非线性方法的总变差稳定性

对于非线性方法,

- $\|\mathcal{N}(E)\| \le (1+\alpha\Delta t)\|E\|$ 不足以保证方法的稳定性;
- 而 $\|\mathcal{N}(P+Q)-\mathcal{N}(P)\| \le (1+\alpha\Delta t)\|Q\|$ 很难满足;
- 因而有必要引入新的稳定性定义, 及相应的稳定性分析方法.

Definition

数值方法称为是总变差有界 (TVB) 的, 如果对任意满足 $TV(Q^0) < \infty$ 的初始数据和时间 $T > 0$, 存在常数 $R > 0$, $\Delta t_0 > 0$, 使得数值解满足

$$TV(Q^n) \le R, \qquad \forall n \le T/\Delta t, \ \ \Delta t < \Delta t_0.$$

非线性方法的总变差稳定性

Definition

数值方法称为是总变差 Lax-Richtmyer 稳定的，如果对任意满足 $TV(Q^0) < \infty$ 的初始数据，存在常数 $\alpha > 0$, $\Delta t_0 > 0$，使得数值解满足

$$TV(Q^{n+1}) \leq (1 + \alpha\Delta t)TV(Q^n), \qquad \forall n > 0, \quad \Delta t < \Delta t_0.$$

- 总变差 Lax-Richtmyer 稳定 $\Rightarrow$ TVB
- § 12.2 中将利用 TVB 这种总变差稳定性证明守恒型算法的收敛性.

提高极值点处的逼近精度的方法

第六章中建立起来的高分辨率格式在解的局部极值点处的精度都相当差 (见 p.104-105, Fig 6.2, 6.3).

原因是由于为了保证 TVD, 在离散解的极值点处必须令 $\sigma = 0$. 而这会削平解在极值点处的峰, 从而导致 $O(\Delta x^2) = O(\Delta t^2)$ 量级的局部截断误差. 累计起来, 经过 $T/\Delta t$ 步, 带来的整体误差就会达到 $O(\Delta t)$ 量级 (见 p.104-105, Fig 6.2, 6.3).

为了提高极值点处的逼近精度, 可以考虑适当放宽极值点附近的 TVD 要求, 即允许 TV 在极值点处有所增加, 但对 TV 增加的总量有所控制, 例如要求 $TV(Q^{n+1}) \leq (1 + \alpha\Delta t) TV(Q^n)$.

常用的方法有 TVB 方法(§ 8.4, 见图 8.1), ENO (essentially non-oscillatory method, § 10.4.4).

精度阶并不代表一切

- s 阶精度: $\|E^N\| = C(\Delta x)^s +$ higher order terms.
- 一般只有当 Δx 充分小时才有 $|h.o.t.| \ll C(\Delta x)^s$.
- C 的大小在实际计算中的作用不可忽略, 见 p.151, Fig 8.2.
- 对于有间断的解, 形式上达不到二阶的高分辨率方法要明显优于二阶的 L-W, B-W 等方法(见 p.104, Fig 6.2).
- 对于波包问题, 尽管此时真解充分光滑, 高分辨率方法仍然明显优于 L-W, B-W 等方法(见 p.105, Fig 6.3, p.151, Fig 8.2).
- 有些方法在不同范数下的精度阶和实际逼近精度都会有较大差别(见 p.151, Fig 8.2).

修正方程

是否存在这样的偏微分方程, 其真解在网格节点上的取值恰巧等于所给差分格式在给定网格上的解 Q_i^n?

是否存在这样的偏微分方程, 使得给定差分格式的解 Q_i^n 对其解的逼近精度高于 Q_i^n 对原目标偏微分方程解的逼近精度?

两个问题的答案都是肯定的. 解决第一个问题的方法是通过 Taylor 展开或有限差分算子演算找到其解恰巧满足数值格式的 PDE, 它通常会有无穷多项, 包含了 Δt, Δx 的越来越高阶次.

将第一个问题得到的 PDE 截断到 s 阶可得到第二个问题的答案.

答案并不唯一. 我们希望其尽可能简单, 同时又便于分析. 满足这些要求的 PDE 称为该格式的修正方程, 有时也称为模型方程.

对流方程迎风格式的二阶修正方程

考虑对流方程 $q_t + \bar{u} q_x = 0, \ (\bar{u} > 0)$ 的迎风格式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \bar{u}\frac{\Delta t}{\Delta x}(Q_i^n - Q_{i-1}^n).$$

容易验证 $v_t + \bar{u} v_x = \frac{1}{2}\bar{u}\Delta x(1-\nu)v_{xx}$ 是其二阶修正方程.

当 $0 < \nu = \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x} < 1$ 时, 这是一个扩散系数为 $\frac{1}{2}\bar{u}\Delta x(1-\nu)$ 的对流扩散方程. 因此其解会有一阶的衰减.

当 $\bar{u} < 0$ 或$\nu = \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x} > 1$ 时, 扩散系数为负值, 解呈指数增长, 导致不稳定.

当 $\nu = \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x} = 1$ 时, $v_t + \bar{u} v_x = 0$ 的解恰满足迎风格式. 因此, 此时数值解给出方程真解的精确值.

对流方程的 L-W 格式和 B-W 格式的三阶修正方程

容易验证对流方程的 L-W 格式和 B-W 格式的三阶修正方程分别为

$$v_t + \bar{u} v_x = -\frac{1}{6}\bar{u}(\Delta x)^2(1-\nu^2)v_{xxx},$$

和

$$v_t + \bar{u} v_x = \frac{1}{6}\bar{u}(\Delta x)^2(2-3\nu+\nu^2)v_{xxx}.$$

它们都是在对流方程上加了一个色散项 σv_{xxx} 后得到的. $\sigma < 0$ 时, 其解相对于对流方程的解相位滞后, $\sigma > 0$ 时, 则相位相对超前. 这准确反映了格式数值解的相应性质.

L-W 格式和 B-W 格式的耗散性质和稳定性则可以通过其四阶修正方程分析.

对流方程迎风格式在间断附近的精度

作为修正方程分析方法的应用, 我们利用其来证明对流方程迎风格式在间断附近的精度.

对流方程迎风格式的二阶修正方程 $v_t + \bar{u}v_x = \frac{1}{2}\bar{u}\Delta x(1-\nu)v_{xx}$ 由于有耗散项, 因此, 其解总是充分光滑的. 用修正方程在原方程解的间断附近的性态可以估计数值解在间断附近的精度.

例如, 对流方程迎风格式的二阶修正方程初值为

$$v^0(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

的黎曼问题的解为 $v(x,t) = \mathrm{erfc}(\frac{x-\bar{u}t}{\sqrt{4\beta t}})$, 其中 $\beta = \frac{1}{2}\bar{u}\Delta x(1-\nu)$, $\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-z^2}dz$.

对流方程迎风格式在间断附近的精度

对流方程相应初值的黎曼问题的解为 $q(x,t) = 2H(\bar{u}t - x)$.

可以证明

$$\begin{aligned}\|q(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_1 &= 2\int_0^\infty \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\beta t}}\right)dx = 2\sqrt{4\beta t}\int_0^\infty \mathrm{erfc}(z)\,dz \\ &= C_1\sqrt{\beta t} = C_2\sqrt{\Delta x t} = O((\Delta x)^{1/2}).\end{aligned}$$

由此可见，虽然迎风格式是一阶的，但对间断解其精度实际上只有二分之一阶.

守恒型与非守恒型变系数线性双曲型方程

下面考虑线性双曲型方程（组）系数（矩阵）为空间变量的函数时其解的性态的变化, 并在此基础上构造相应的数值方法.

变系数线性双曲型方程可以写成两种不同的形式:

- 非守恒型: $q_t + A(x)q_x = f$, $(\Leftrightarrow\ q_t + (A(x)q)_x = f + A'(x)q)$.
- 守恒型: $q_t + (A(x)q)_x = f$, $(\Leftrightarrow\ q_t + A(x)q_x = f - A'(x)q)$.

易见在引入适当依赖于未知变量的源函数时, 两者可以相互转化.

另外, 也会考虑容函数形式的非守恒型方程 $\kappa(x)q_t + A(x)q_x = f$, 和容函数形式的守恒型方程 $\kappa(x)q_t + (A(x)q)_x = f$

模型问题 —— 不可压流体的变截面管道流

设管道截面积为 $\kappa(x)$, 设在截面 x 处, 流体的速度为 $u(x)$. 则单位时间流过截面 x 的不可压流体的体积 $\kappa(x)u(x) = U \equiv \text{const}$.

两种定量刻画管道中流体所含某种微量物质的方法:

- 体密度型: $\bar{q}(x,t)$, (t 时刻, x 处单位体积流体内的物质量).
- 线密度型: $q(x,t)$, (t 时刻, x 处单位长度管道内的物质量).

因而, $[x_1, x_2]$ 中物质总量为: $\int_{x_1}^{x_2} q(x,t)dx = \int_{x_1}^{x_2} \kappa(x)\bar{q}(x,t)dx$;

而 x 处物质的通量为: $u(x)q(x,t) = \kappa(x)u(x)\bar{q}(x,t)$.

用 q 和 $\bar{q}$ 表出的不可压流体的变截面管道流方程

由物质总量与物质通量的守恒关系, 并注意 $\kappa(x)u(x) = U$, 得

- $q_t + (u(x)q(x,t))_x = 0.$ $\quad q$ 满足守恒律方程.
- $\kappa(x)\bar{q}_t + (\kappa(x)u(x)\bar{q})_x = 0, \Leftrightarrow \kappa(x)\bar{q}_t + U\bar{q}_x = 0, \Leftrightarrow$ $\bar{q}_t + u(x)\bar{q}_x = 0.$ $\quad \bar{q}$ 满足输运方程（也称颜色方程）.
- 变量取法不同时, 所得方程的类型可能也不同. 上例中一个是守恒型的双曲型方程, 另一个则是非守恒型的双曲型方程.
- 两者有相同的特征线方程, $X'(t) = u(X(t))$, 但 $\frac{d}{dt}\bar{q}(X(t),t) = 0$, 而 $\frac{d}{dt}q(X(t),t) = -u'(X(t))q(X(t),t).$

有限体积法

当 $\kappa(x)u(x) = U > 0$ 时,

- 对方程 $q_t + (u(x)q(x,t))_x = 0$ 的迎风格式可取为

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}[u(x_i)Q_i^n - u(x_{i-1})Q_{i-1}^n].$$

这相当于取数值通量 $F_{i+1/2}^n = u_i Q_i^n$.

- 对方程 $\bar{q}_t + u(x)\bar{q}_x = 0$ 的迎风格式可取为

$$\bar{Q}_i^{n+1} = \bar{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}u(x_i)[\bar{Q}_i^n - \bar{Q}_{i-1}^n].$$

单元 C_i 上输运方程的流速取为 u_i, 也可换为 $u_{i-1/2}$.

将变系数对流方程离散化为分段常系数对流方程

将变系数对流方程离散化为分段常系数对流方程的常用方法一般分为两类.

- 一类是给每一个单元赋一个近似流速 u_i. 例如, 可令 $u_i = u(x_i)$, 或令 u_i 为 $u(x)$ 在单元上的积分平均值, 或将该节管道的截面积视为常量 κ_i, 然后令 $u_i = U/\kappa_i$ (例如, 令 $\kappa_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{C_i}\kappa(x)dx$, 这相当于令 $u_i = (\frac{1}{\Delta x}\int_{C_i}\frac{1}{u(x)}dx)^{-1}$) .
- 另一类是给每一个单元界面 $x_{i-1/2}$ 赋一个近似流速 $u_{i-1/2}$. 同样也会有如何定义该流速值的问题.

我们先来考虑第一类方法, 并分别针对颜色方程和守恒型对流方程来构造相应黎曼问题的（近似）解.

颜色方程的波传播型方法 — 要点：$\bar{q}(x,t)$ 沿特征线是常量

对于颜色方程 $\bar{q}_t + u(x)\bar{q}_x = 0$ 和分段常数数据 $\bar{q}(x) = \bar{Q}_i$, $u(x) = u_i$ $(\kappa(x) = \kappa_i)$, $\forall x \in \mathcal{C}_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, 我们考虑在单元界面 $x_{i-1/2}$ 处求解方程的黎曼问题.

此时（标量问题）在间断处产生一个波 $\mathcal{W}_{i-1/2} = \bar{Q}_i - \bar{Q}_{i-1}$.

若 $U > 0$, 则该波将进入 $\mathcal{C}_i$, 因此其波速为 $s_{i-1/2} = u_i$,

若 $U < 0$, 则该波将进入 $\mathcal{C}_{i-1}$, 因此其波速为 $s_{i-1/2} = u_{i-1}$.

$\bar{Q}_i^n = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \bar{q}(x,t_n)dx$ 非守恒量, 其改变量不可表示为通量差, 但 $\bar{q}(x,t)$ 沿特征线是常量, $\bar{Q}_i^n$ 的改变量可以用波及波速计算.

颜色方程的波传播型方法

若 $U>0$, 则在一个时间步内该波将进入 $\mathcal{C}_i$ 的距离为 $s_{i-1/2}\Delta t$, 因此, 该单元上比例为 $s_{i-1/2}\Delta t/\Delta x$ 的一段上的函数值由 $\bar{Q}_i$ 变成了 $\bar{Q}_{i-1}$. 于是有 (比较迎风格式（9.15）)

$$\bar{Q}_i^{n+1}=\bar{Q}_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}s_{i-1/2}\mathcal{W}_{i-1/2}.$$

若 $U<0$, 则有

$$\bar{Q}_{i-1}^{n+1}=\bar{Q}_{i-1}^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}s_{i-1/2}\mathcal{W}_{i-1/2}.$$

令 $\mathcal{A}^+\Delta\bar{Q}_{i-1/2}=s_{i-1/2}^+\mathcal{W}_{i-1/2}$, $\mathcal{A}^-\Delta\bar{Q}_{i-1/2}=s_{i-1/2}^-\mathcal{W}_{i-1/2}$, 其中 $s_{i-1/2}=u_i^++u_{i-1}^-$, 就得到了格式 (比较（4.43）)

$$\bar{Q}_i^{n+1}=\bar{Q}_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathcal{A}^+\Delta\bar{Q}_{i-1/2}+\mathcal{A}^-\Delta\bar{Q}_{i+1/2}).$$

颜色方程的波传播型方法的高分辨率校正

参照常系数问题的高分辨率校正, 我们形式上地引入颜色方程的波传播型方法的高分辨率校正格式

$$\bar{Q}_i^{n+1} = \bar{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathcal{A}^+\Delta \bar{Q}_{i-1/2} + \mathcal{A}^-\Delta \bar{Q}_{i+1/2}) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{F}_{i+1/2} - \tilde{F}_{i-1/2}),$$

$\tilde{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2}|s_{i-1/2}|(1-\frac{\Delta t}{\Delta x}|s_{i-1/2}|)\tilde{\mathcal{W}}_{i-1/2}$, $\tilde{\mathcal{W}}_{i-1/2} = \phi\left(\frac{\mathcal{W}_{I-1/2}}{\mathcal{W}_{i-1/2}}\right)\mathcal{W}_{i-1/2}$, 其中 $\phi(\cdot)$ 为限制器. 当 $\phi(\theta) \equiv 1$ 时, 相应格式的修正方程为

$$q_t + u(x)q_x = -\frac{1}{2}[\Delta x - u(x)\Delta t]u'(x)q_x + O(\Delta x^2).$$

由此可见, 仅当 $u(x)$ 为常数时, 格式才有二阶精度. 因此, 一般情况下, 校正格式形式上只有一阶精度.

颜色方程的波传播型方法的高分辨率校正

注意到我们也可以把无限制器校正格式的修正方程写为

$$q_t + u\left(x + \frac{1}{2}[\Delta x - u(x)\Delta t]\right) q_x = O(\Delta x^2),$$

而两个方程 $q_t + u\left(x + \frac{1}{2}[\Delta x - u(x)\Delta t]\right) q_x = 0$, $q_t + u(x) q_x = 0$ 的解的差别仅在于速度取值点有一个很小的偏差. 除此而外, 无限制器校正格式没有引入一阶的耗散. 因此, 在解的光滑点处, 校正格式的数值表现要明显优于一阶的迎风格式.

当解有间断时, 与形式上二阶的（如 Lax-Wendroff 格式等）格式相比, 带适当限制器的校正格式的数值效果要好很多.

守恒型对流方程黎曼问题 — 要点：单元界面上通量连续

对于守恒型对流方程 $q_t + (u(x)q)_x = 0$ 和分段常数数据 $q(x) = Q_i$, $u(x) = u_i$ $(\kappa(x) = \kappa_i)$, $\forall x \in \mathcal{C}_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$, 我们考虑在单元界面 $x_{i-1/2}$ 处求解方程的黎曼问题:

$$\begin{cases} q_t + u_{i-1}q_x = 0, & q(x,0) = Q_{i-1}, \quad x < x_{i-1/2}, \\ q_t + u_i q_x = 0, & q(x,0) = Q_i, \quad\quad x > x_{i-1/2}. \end{cases}$$

注意, 由于 q 表示单位长度管道内的某物质的量, 因此, 如果管道截面面积有跳跃间断, 则当流体流过间断面时, 其 q 值也会产生跳跃间断. 但由于物质的守恒性, 其通量应该保持不变, 即 $f|_{x^-_{i-1/2}} = f|_{x^+_{i-1/2}}$. 这里 $f = u(x)q(x,t)$ 为通量.

基于守恒型对流方程黎曼问题解的有限体积格式

设 $u(x) > 0$, 设流体由 $\mathcal{C}_{i-1}$ 流入 $\mathcal{C}_i$ 后其 q 值由 Q_{i-1} 变为 $Q^*_{i-1/2}$. 此时, 我们将看到一个波 $\mathcal{W}_{i-1/2} = Q_i - Q^*_{i-1/2}$ 以速度 $s_{i-1/2} = u_i$ 向 $\mathcal{C}_i$ 内传播 (另外还有一个速度为零的波 $Q^*_{i-1/2} - Q_{i-1}$).

在一个时间步内从 $\mathcal{C}_{i-1}$ 流出的物质量为 $Q_{i-1}u_{i-1}\Delta t$.

在一个时间步内流入 $\mathcal{C}_i$ 的物质量为 $Q^*_{i-1/2}u_i\Delta t$.

于是由守恒性得 $Q^*_{i-1/2} = \frac{u_{i-1}}{u_i}Q_{i-1}$.

由此波及波速可得相应的涨落（fluctuation）为:

$$\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2} = s_{i-1/2}\mathcal{W}_{i-1/2} = u_iQ_i - u_{i-1}Q_{i-1},$$

$$\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-1/2} = 0.$$

注意单元两界面上的涨落之和即为通量差, 由此得有限体积格式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathcal{A}^+\Delta Q^n_{i-1/2} + \mathcal{A}^-\Delta Q^n_{i+1/2}) = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(u_i^+Q_i^n - u_{i-1}^+Q^n_{i-1}).$$

基于守恒型对流方程黎曼问题解的有限体积格式

设 $u(x) < 0$, 设流体由 $\mathcal{C}_i$ 流入 $\mathcal{C}_{i-1}$ 后其 q 值由 Q_i 变为 $Q^*_{i-1/2}$. 此时, 我们将看到一个波 $\mathcal{W}_{i-1/2} = Q^*_{i-1/2} - Q_{i-1}$ 以速度 $s_{i-1/2} = u_{i-1}$ 向 $\mathcal{C}_{i-1}$ 内传播 (另外还有一个速度为零的波 $Q_i - Q^*_{i-1/2}$).

在一个时间步内从 $\mathcal{C}_i$ 流出的物质量为 $-Q_i u_i \Delta t$.

在一个时间步内流入 $\mathcal{C}_{i-1}$ 的物质量为 $-Q^*_{i-1/2} u_{i-1} \Delta t$.

于是由守恒性得 $Q^*_{i-1/2} = \frac{u_i}{u_{i-1}} Q_i$.

由此波及波速可得相应的涨落（fluctuation）为:

$$\mathcal{A}^+ \Delta Q_{i-1/2} = 0,$$

$$\mathcal{A}^- \Delta Q_{i-1/2} = s_{i-1/2} \mathcal{W}_{i-1/2} = u_i Q_i - u_{i-1} Q_{i-1}.$$

注意单元两界面上的涨落之和即为通量差, 由此得有限体积格式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathcal{A}^+ \Delta Q^n_{i-1/2} + \mathcal{A}^- \Delta Q^n_{i+1/2}) = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(u^-_{i+1} Q^n_{i+1} - u^-_i Q^n_i).$$

基于守恒型对流方程黎曼问题解的有限体积格式

综合以上结果，我们可以得到守恒型对流方程的有限体积格式：

$$
\begin{aligned}
Q_i^{n+1} &= Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2}^n + \mathcal{A}^-\Delta Q_{i+1/2}^n) \\
&= Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(|u_i|Q_i^n - u_{i-1}^+ Q_{i-1}^n + u_{i+1}^- Q_{i+1}^n),
\end{aligned}
$$

以及相应的高分辨率格式

$$
Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2}^n + \mathcal{A}^-\Delta Q_{i+1/2}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{F}_{i+1/2} - \tilde{F}_{i-1/2}),
$$

$\tilde{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2}|s_{i-1/2}|(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|s_{i-1/2}|)\tilde{\mathcal{W}}_{i-1/2}$, $\tilde{\mathcal{W}}_{i-1/2} = \phi\left(\frac{\mathcal{W}_{I-1/2}}{\mathcal{W}_{i-1/2}}\right)\mathcal{W}_{i-1/2}$, 其中 $\phi(\cdot)$ 为限制器.

变系数守恒型对流方程模型问题 —— 差速传送带系统和车流问题

差速传送带系统可以作为分段常系数守恒型对流方程的一个模型问题. 当物件从速度为 u_{i-1} 的传送带传送到速度为 $u_i < u_{i-1}$ 的传送带时, 在两传送带的连接处物件的密度会增加 u_{i-1}/u_i 倍.

车流问题是变系数守恒型对流方程的一个模型问题. 简化假设:

1. 单车道, 车速 $u(x)$ 仅依赖于距离 x (单位: 一辆车的长度);
2. 车流密度 $q(x,t)$ (车辆数/一辆车的长度), $0 \le q(x,t) \le 1$;
3. 因而车流量为 $f(x,q) = u(x)q(x,t)$ (通过车辆数/单位时间);
4. 由此推得 $q(x,t)$ 满足的守恒律方程: $q_t + (u(x)q)_x = 0$;
5. 第 k 辆车 t 时刻的位置 $X_k(t)$ 满足方程 $X_k'(t) = u(X_k(t))$.

注: 对线性对流方程, 质点运动轨迹与特征线重合, 而非线性时则不然. 当速度还依赖于车流密度时, 为更符合实际的非线性方程.

车流问题的另一种提法 —— 颜色方程模型问题

若改用车流量(通过车辆数/单位时间) $\bar{q}(x,t)$ 刻画交通状况, 则

- $\bar{q}(x,t) = u(x)q(x,t)$,
- $\bar{q}_t = (uq)_t = uq_t = -u(uq)_x = -u\bar{q}_x$.

因此, $\bar{q}(x,t)$ 满足颜色方程

$$\bar{q}_t + u(x)\bar{q}_x = 0.$$

由此知, 沿着特征线 $X_k'(t) = u(X_k(t))$ 车流量是常数.

注: 对非线性车流问题以上结论一般不成立.

颜色方程的使用单元界面速度的波传播法

对颜色方程 $\bar{q}_t + u(x)\bar{q}_x = 0$, 设在单元 $\mathcal{C}_{i-1}$ 和 $\mathcal{C}_i$ 的交界面 $x_{i-1/2}$ 上给定速度 $u_{i-1/2}$, 则可令

$$\mathcal{W}_{i-1/2} = \bar{Q}_i - \bar{Q}_{i-1}, \qquad s_{i-1/2} = u_{i-1/2},$$

并定义涨落(fluctuations)

$$\mathcal{A}^+\Delta\bar{Q}_{i-1/2} = s^+_{i-1/2}\mathcal{W}_{i-1/2}, \quad \mathcal{A}^-\Delta\bar{Q}_{i-1/2} = s^-_{i-1/2}\mathcal{W}_{i-1/2}.$$

于是由波传播法给出计算格式

$$\bar{Q}_i^{n+1} = \bar{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathcal{A}^+\Delta\bar{Q}^n_{i-1/2} + \mathcal{A}^-\Delta\bar{Q}^n_{i+1/2}).$$

守恒型对流方程的使用单元界面速度的波传播法和通量差法

对守恒型对流方程 $q_t + (u(x)q)_x = 0$, 可以同上一样地定义涨落 (fluctuations), 但由此导出的格式是非守恒的. 因为, 通量差分裂公式一般不成立, 即 $f(Q_i) - f(Q_{i-1}) \neq \mathcal{A}^-\Delta Q_{i-1/2} + \mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2}$.

我们可以通过以下方式构造守恒型格式(见 (4.52), (4.53)).

- 定义迎风通量 $F_{i-1/2} = u^+_{i-1/2}Q_{i-1} + u^-_{i-1/2}Q_i$,
- 定义 $\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2} = F_i - F_{i-1/2}$, $\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-1/2} = F_{i-1/2} - F_{i-1}$,
- 对任取的 F_i, 得等价于通量差公式的守恒型波传播格式

$$
\begin{aligned}
Q_i^{n+1} &= Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathcal{A}^+\Delta Q^n_{i-1/2} + \mathcal{A}^-\Delta Q^n_{i+1/2}) \\
&= Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F^n_{i+1/2} - F^n_{i-1/2}).
\end{aligned}
$$

等价于通量差公式的守恒型波传播格式

- 若取 F_i 为 $\mathcal{C}_i$ 上的近似通量 $F_i = (u^+_{i-1/2} + u^-_{i+1/2})Q_i$, 则 $\mathcal{A}^{\pm}\Delta Q^n_{i-1/2}$ 也可以视为跨过界面时的通量差. (**观点一**)

- 如, 当 $u > 0$ 时, 有 $F_{i-1/2} = u_{i-1/2}Q_{i-1}$, $F_i = u_{i-1/2}Q_i$, 和

$\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2} = u_{i-1/2}(Q_i - Q_{i-1})$, $\mathcal{A}^-\Delta Q_{i-1/2} = (u_{i-1/2} - u_{i-3/2})Q_{i-1}$. 值得注意的是尽管 $u > 0$, 但此时不仅有右行波, 也有左行波. 而且

1. 将方程写为 $q_t + u(x)q_x + u'(x)q = 0$, 则易见 $\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2}$ 和 $\mathcal{A}^-\Delta Q_{i+1/2}$ 为方程中后两项的一阶差分近似(**观点二**);
2. 由此得到的格式 $Q^{n+1}_i = Q^n_i - \frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1/2}Q^n_i - u_{i-1/2}Q^n_{i-1})$ 因而也只有一阶精度.

等价于通量差公式的守恒型波传播格式

- 将方程写为 $q_t + u(x)q_x = -u'(x)q$, 即带源项的颜色方程, 则 $\mathcal{W}_{i-1/2}$, $s_{i-1/2}$, $\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2}$ 与颜色方程波传播法的相应量相同; 而 $\mathcal{A}^-\Delta Q_{i+1/2}$ 则可视为在单元 $\mathcal{C}_i$ 中以适当的方式引入了能保证守恒性的近似源项(**观点三**).

- 相应的高分辨率格式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathcal{A}^+\Delta Q_{i-1/2}^n + \mathcal{A}^-\Delta Q_{i+1/2}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{F}_{i+1/2} - \tilde{F}_{i-1/2}),$$

$\tilde{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2}|s_{i-1/2}|(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|s_{i-1/2}|)\tilde{\mathcal{W}}_{i-1/2}$, $\tilde{\mathcal{W}}_{i-1/2} = \phi\left(\frac{\mathcal{W}_{I-1/2}}{\mathcal{W}_{i-1/2}}\right)\mathcal{W}_{i-1/2}$, 其中 $\phi(\cdot)$ 为限制器. 可以证明, 当 $\phi(\theta) \equiv 1$ 时, 将第一个 $s_{i-1/2}$ 取作 $u_{i-1/2}$, 第二个 $s_{i-1/2}$ 取做 $\frac{\Delta(uQ)_{i-1/2}}{\Delta Q_{i-1/2}}$, 其中 $u_i = \frac{u_{i+1/2}+u_{i-1/2}}{2}$, 则该高分辨率格式有形式上的二阶精度.

作业: 8.1，8.3，8.4

Thank You!