Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

一维双曲型守恒律方程式的积分形式

考虑一维一阶双曲型守恒律方程式：

$$q_t(x,t) + f(q(x,t))_x = 0$$

的积分形式，或称弱形式：

$$\int_{x_l}^{x_r} q(x,t_a)\,dx = \int_{x_l}^{x_r} q(x,t_b)\,dx - \left[\int_{t_b}^{t_a} f(q(x_r,t))\,dt - \int_{t_b}^{t_a} f(q(x_l,t))\,dt\right],$$

$$\forall x_l < x_r, \quad \forall t_b < t_a.$$

特别地，对给定的网格$x_i = ih$, $t_n = n\tau$，可取控制体（也称有限体积，或网格单元）$C_i = (x_{i-\frac{1}{2}},\ x_{i+\frac{1}{2}})$，令$\bar{q}_i^n = \frac{1}{\triangle x}\int_{C_i} q(x,t_n)\,dx$，则有$\bar{q}_i^{n+1} = \bar{q}_i^n - \frac{1}{\triangle x}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+\frac{1}{2}},t))\,dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-\frac{1}{2}},t))\,dt\right]$.

一维双曲型守恒律方程式的有限体积格式

于是，我们可以构造有限体积格式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n\right),$$

其中$Q_i^n \approx \bar{q}_i^n$, $F_{i+\frac{1}{2}}^n$ 是时段$[t_n,\ t_{n+1}]$ 上$x = x_{i+\frac{1}{2}}$ 处的数值通量，

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\triangle t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+\frac{1}{2}}, t))\, dt$$

数值通量近似计算的是$x = x_{i+\frac{1}{2}}$ 处在时段$[t_n,\ t_{n+1}]$ 上的通量积分平均值。

一维双曲型守恒律方程式的守恒型有限体积格式

- 对于双曲守恒律，信息传播速度是有限的，所以当时间步长充分小时，可以认为$F^n_{i-\frac{1}{2}}$ 只依赖于Q^n_{i-1} 和Q^n_i. 例如，可取

$$F^n_{i-\frac{1}{2}} = F(Q^n_{i-1},\ Q^n_i).$$

- 这时有限体积格式可以写为

$$Q^{n+1}_i = Q^n_i - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left(F(Q^n_i,\ Q^n_{i+1}) - F(Q^n_{i-1},\ Q^n_i)\right).$$

- 这是一个守恒型格式。因为对任给的$I < J$, 格式的解满足

$$\triangle x \sum_{i=I}^{J} Q^{n+1}_i = \triangle x \sum_{i=I}^{J} Q^n_i - \triangle t\left[F^n_{J+\frac{1}{2}} - F^n_{I-\frac{1}{2}}\right].$$

扩散方程的数值通量

- 非双曲型的守恒律方程式也可以构造守恒型有限体积格式。
- 例如，对扩散方程，设通量为$f(x, q_x) = -\beta(x) q_x$.
- 若取$F(Q_{i-1}, Q_i) = -\beta_{i-\frac{1}{2}}(Q_i - Q_{i-1})/\triangle x$, 则得显式格式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \frac{\triangle t}{\triangle x^2}\left(\beta_{i+\frac{1}{2}}(Q_{i+1}^n - Q_i^n) - \beta_{i-\frac{1}{2}}(Q_i^n - Q_{i-1}^n)\right).$$

- 若取$F_{i-\frac{1}{2}}^n = -[\beta_{i-\frac{1}{2}}(Q_i^n - Q_{i-1}^n) + \beta_{i-\frac{1}{2}}(Q_i^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1})]/2\triangle x$, 则得Crank-Nicolson 格式.

守恒型有限体积格式的相容性

与一般的差分格式不同，守恒型有限体积格式的相容性是通过数值通量的相容性定义的。守恒型有限体积格式称为与守恒律方程式相容，若格式的数值通量满足以下相容性条件：

1. $F(\bar{q},\bar{q}) = f(\bar{q})$.

   这一条件十分自然，因为若真解$q \equiv \bar{q}$ 恒为常量时，$\frac{1}{\triangle t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x,t))\,dt \equiv f(\bar{q})$ 是与x, t 和$\triangle t$ 均无关的常量。

2. $|F(Q_{i-1},Q_i) - f(\bar{q})| \le L\max(|Q_{i-1}-\bar{q}|,|Q_i-\bar{q}|)$, 其中$L$ 为一常数, 简称为 F 的Lipschitz 连续性条件。

   该条件保证数值通量有一定的逼近质量。这是保证格式收敛性的一个至关重要的技术性条件。

CFL (Courant, Friedrichs and Lewy) 条件

格式的稳定性是格式可用的不可或缺的重要条件。通常作为格式稳定性的一个必要条件的CFL 条件可以表述为

一个数值方法收敛的必要条件: 该数值方法的依赖区域, 至少在 $\triangle x \to 0$, $\triangle t \to 0$ 的极限意义下, 包含偏微分方程的依赖区域。

例如，对抛物型方程，显式格式常要求 $\triangle t = O(\triangle x^2)$.

而对对流方程$q_t + \bar{u} q_x = 0$，显式格式常要求 $\nu := \frac{\bar{u}\triangle t}{\triangle x} \leq 1$.

对一般双曲方程组，显式格式常要求 $\nu := \frac{\triangle t}{\triangle x} \max_p |\lambda^p| \leq 1$.

CFL 条件只是必要条件

CFL 条件只是必要条件。

例如，数值通量： $F(Q_{i-1}, Q_i) = \frac{1}{2}(f(Q_{i-1}) + f(Q_i))$ 当时间步长充分小时满足CFL 条件，但恒不稳定的.

例如，对对流方程, $f(q) = \bar{u}q$, 取 $Q_j^0 = e^{\mathrm{i}\xi j\triangle x}$, 则对给定的 $\nu > 0$
有 $Q_j^n = (1 - \mathrm{i}\nu \sin \xi\triangle x)Q_j^{n-1} = (1 - \mathrm{i}\nu \sin \xi\triangle x)^n Q_j^0$.

取 $\xi = \pi/(2\triangle x)$, 则当 $n \to \infty$ 时, 有 $|Q_j^n| = (1 + \nu^2)^{n/2} \to \infty$.

Lax-Friedrichs 格式

Lax-Friedrichs 格式：

$$Q_i^{n+1} = \frac{1}{2}(Q_{i-1}^n + Q_{i+1}^n) - \frac{\triangle t}{2\triangle x}[f(Q_{i+1}^n) - f(Q_{i-1}^n)].$$

这相当于取数值通量：

$$F(Q_{i-1}^n, Q_i^n) = \frac{1}{2}(f(Q_{i-1}^n) + f(Q_i^n)) - \frac{\triangle x}{2\triangle t}(Q_i^n - Q_{i-1}^n).$$

Lax-Friedrichs 格式的二阶修正方程是$q_t + f(q)_x = \beta q_{xx}$, 其中 $\beta = \frac{1}{2}(\triangle x)^2/\triangle t$. 当网格比$\triangle t/\triangle x$ 固定为常量时, β 随网格尺度一起趋于零, 此时格式在传统意义下也是相容的。

增加的项可以解释为人工粘性，用以耗散不稳定数值通量引起的反扩散通量成分。不过由于人工粘性过大，格式逼近精度不高。

双曲型方程组的特征与迎风方法

- 双曲型方程组关键性质是其解的信息是以（特征）波的形式以各自的（特征）速度沿不同的特定的（特征）方向传播。
- 我们应该充分利用解的这种结构及相关信息来构造数值通量和数值格式。
- 迎风方法的基本思想是：对于每一个特征变量，我们从其自身信息来源的方向获取其未来的信息。

对流方程的迎风方法

- 对流方程 $q_t + \bar{u} q_x = 0.$
- 当 $\bar{u} > 0$ 时，取$F^n_{i-\frac{1}{2}} = \bar{u} Q^n_{i-1}$, 得

$$Q^{n+1}_i = Q^n_i - \frac{\bar{u}\triangle t}{\triangle x}(Q^n_i - Q^n_{i-1}).$$

- 当 $\bar{u} < 0$ 时，取$F^n_{i-\frac{1}{2}} = \bar{u} Q^n_i$, 得

$$Q^{n+1}_i = Q^n_i - \frac{\bar{u}\triangle t}{\triangle x}(Q^n_{i+1} - Q^n_i).$$

- 一般可取$F^n_{i-\frac{1}{2}} = \bar{u}^- Q^n_i + \bar{u}^+ Q^n_{i-1}$. CFL 条件：$|\frac{\bar{u}\triangle t}{\triangle x}| \leq 1.$

对流方程的波的传播形式的迎风格式

- 记$\mathcal{W}^n_{i-\frac{1}{2}} := Q^n_i - Q^n_{i-1}$, $\bar{u}^+ := \max(\bar{u}, 0)$, $\bar{u}^- := \min(\bar{u}, 0)$, 则迎风格式可以写为波的传播形式

$$Q^{n+1}_i = Q^n_i - \frac{\triangle t}{\triangle x}(\bar{u}^+\mathcal{W}^n_{i-\frac{1}{2}} + \bar{u}^-\mathcal{W}^n_{i+\frac{1}{2}}).$$

- 一般在$x_{i-\frac{1}{2}}$处, 跳跃间断$\mathcal{W}^n_{i-\frac{1}{2}}$被系统分解为两个涨落波：既向前传播的涨落波$\bar{u}^+\mathcal{W}^n_{i-\frac{1}{2}}$和向后传播的涨落波$\bar{u}^-\mathcal{W}^n_{i-\frac{1}{2}}$. 前者用以修正$Q^{n+1}_i$, 后者用以修正$Q^{n+1}_{i-1}$.

对流方程迎风格式的不同解释—(设 $\bar{u} > 0$)

1. 特征线法加线性插值：

$$Q_i^{n+1} \approx q(x_i, t_{n+1}) = q(x_i - \bar{u}\triangle t, t_n) \approx \frac{\bar{u}\triangle t}{\triangle x} q_{i-1}^n + \left(1 - \frac{\bar{u}\triangle t}{\triangle x}\right) q_i^n.$$

2. 数值通量：取Q_i^n 为单元平均值，当CFL 条件满足时，在线段 $\{x_{i-\frac{1}{2}}\} \times [t_n, t_{n+1}]$ 上，$q(x,t) \approx Q_{i-1}^n$，因此取$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \bar{u}Q_{i-1}^n$.

3. 取Q_i^n 为单元平均值，则当CFL 条件满足时，分片常数的波以特征速度 $\bar{u}$ 传播，在第i 个单元上，单元平均值的改变量为

$$-\frac{\bar{u}\triangle t}{\triangle x} \triangle Q_{i-\frac{1}{2}}^n = -\frac{\bar{u}\triangle t}{\triangle x}(Q_i^n - Q_{i-1}^n),$$

注：$\bar{u} > 0$ 时，$\bar{u}^+ \mathcal{W}_{i-\frac{1}{2}}^n = \bar{u}\triangle Q_{i-\frac{1}{2}}^n$，$\bar{u}^- \mathcal{W}_{i-\frac{1}{2}}^n = 0$.

REA 算法的基本思想—重构、发展、平均

REA (Reconstruct-Evolve-Average) 算法:

1. 重构步：利用单元平均值 Q_i^n 重构一个分片多项式函数 $\tilde{q}^n(x, t_n)$. 例如，最简单的 $\tilde{q}^n(x, t_n) = Q_i^n, \forall x \in C_i$.
2. 发展步：在时间层 t_n 上以 $\tilde{q}^n(x, t_n)$ 为初值, 精确（或近似）求解 $\triangle t$ 时间步后双曲方程组的解 $\tilde{q}^n(x, t_{n+1})$.
3. 平均步：计算 t_{n+1} 时刻的单元平均值 $Q_i^{n+1} = \frac{1}{\triangle x} \int_{C_i} \tilde{q}^n(x, t_{n+1})\, dx$.

注意：为了使对应于相邻单元黎曼问题（或类似问题）的解不会相互重叠, 要求$\max_p |\lambda^p| \triangle t / \triangle x \leq 1/2$.

自治双曲型守恒律方程(组)黎曼问题熵解的相似性

- 设自治双曲型守恒律方程(组)黎曼问题
$$q_t + f(q)_x = 0, \quad q(x,0) = \begin{cases} q_l & \text{if} \quad x < 0; \\ q_r, & \text{if} \quad x > 0. \end{cases}$$
有满足熵条件的弱解（又称熵解） $q(x,t)$.
- 任取$\alpha > 0$, 令$x = \alpha y$, $t = \alpha s$, $\hat{q}(y,s) := q(\alpha y, \alpha s)$, 则 $\hat{q}(y,s)$ 是以下黎曼问题的熵解:
$$\hat{q}_s + f(\hat{q})_y = 0, \quad \hat{q}(y,0) = \begin{cases} q_l & \text{if} \quad y < 0; \\ q_r, & \text{if} \quad y > 0. \end{cases}$$
- $\because$ 满足熵条件的弱解唯一, $\therefore$ $q(y,s) = \hat{q}(y,s) := q(\alpha y, \alpha s)$. 由 $\alpha > 0$ 的任意性即得熵解的相似性.

REA 算法的数值通量函数

- 数值通量$F^n_{i-\frac{1}{2}}$ 近似的是一个时间步上通量的积分平均值，既

$$F^n_{i-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\triangle t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-\frac{1}{2}},t))\,dt.$$

- 将$q(x_{i-\frac{1}{2}},t)$ 换为$\tilde{q}(x_{i-\frac{1}{2}},t)$, 后者由黎曼问题解的相似性为常数，记其为$Q^{\downarrow}_{i-\frac{1}{2}} = q^{\downarrow}(Q_{i-1},Q_i)$. 因此，在REA 算法中可以将数值通量定义为

$$F^n_{i-\frac{1}{2}} := f(q^{\downarrow}(Q^n_{i-1},Q^n_i)).$$

最简单的 REA 算法 Godunov 方法

1. 计算 $x_{i-\frac{1}{2}}$ 处的黎曼问题的（近似）解 $q^{\downarrow}(Q_{i-1}^n, Q_i^n)$.
2. 计算数值通量

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n) = f(q^{\downarrow}(Q_{i-1}^n, Q_i^n)).$$

3. 用通量差公式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n\right)$$

计算 t_{n+1} 时刻的单元平均值。

波传播形式的 Godunov 方法

- 与对流方程的迎风格式类似地，我们也可以通过研究波（特征量）的传播用Godunov 方法来构造格式。这类算法可以推广至非守恒的双曲型方程组。

- 常系数线性双曲型方程组黎曼问题的解可以表示为一族波

$$Q_i^n - Q_{i-1}^n = \sum_{p=1}^{m} \alpha_{i-\frac{1}{2}}^p r^p = \sum_{p=1}^{m} \mathcal{W}_{i-\frac{1}{2}}^p,$$

  其中$\alpha_{i-\frac{1}{2}} = R^{-1}(Q_i^n - Q_{i-1}^n)$.

- 这些波分别以相应的特征速度 $\lambda^1 < \cdots < \cdots < \lambda^m$ 传播。

波传播形式的 Godunov 方法

- 设$\lambda^k > 0$, 则经过$\triangle t$ 时间($\max_p |\lambda^p|\triangle t \le \triangle x$) 后，第$i$ 个单元C_i 上比例为$\lambda^k\triangle t/\triangle x$ 的线段上解有相应的增量$-\mathcal{W}^k_{i-\frac{1}{2}}$.
- 设$\lambda^k < 0$, 则经过$\triangle t$ 时间($\max_p |\lambda^p|\triangle t \le \triangle x$) 后，第$i$ 个单元C_i 上比例为$|\lambda^k|\triangle t/\triangle x$ 的线段上解有相应的增量$\mathcal{W}^k_{i+\frac{1}{2}}$.
- 因此，C_i 上解的平均值变成了

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left[\sum_{p=1}^{m}(\lambda^p)^+\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}} + \sum_{p=1}^{m}(\lambda^p)^-\mathcal{W}^p_{i+\frac{1}{2}}\right].$$

波传播形式的 Godunov 方法

- 令$\mathcal{A}^-\triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{p=1}^{m}(\lambda^p)^-\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}}$, 称为$\triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}}$ 的左行涨落波.
- 令$\mathcal{A}^+\triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{p=1}^{m}(\lambda^p)^+\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}}$, 称为$\triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}}$ 的右行涨落波.
- 因此，格式又可以写成涨落波传播公式的形式：

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left[\mathcal{A}^+\triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}} + \mathcal{A}^-\triangle Q^n_{i+\frac{1}{2}}\right].$$

- 对于非线性双曲型方程组, 只要能将黎曼问题的解(近似)分解成左行和右行涨落波, 则可以用以上公式计算其近似解。

波传播形式的 Godunov 方法

- 对于常系数线性双曲型方程组$q_t + Aq_x = 0$, 有 $\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}} = \alpha^p_{i-\frac{1}{2}} r^p$, 该波以其特征速度$\lambda^p$ ($Ar^p = \lambda^p r^p$) 传播。
- 记 $\Lambda^\pm = \mathrm{diag}((\lambda^1)^\pm, \cdots, (\lambda^m)^\pm)$, 定义$A^\pm = R\Lambda^\pm R^{-1}$.
- 记$\triangle Q_{i-\frac{1}{2}} = Q_i - Q_{i-1} = R\alpha_{i-\frac{1}{2}}$, 则有

$$A^+\triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}} = R\Lambda^+\alpha_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{p=1}^{m}(\lambda^p)^+\alpha^p_{i-\frac{1}{2}} r^p = \mathcal{A}^+\triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}}.$$

$$A^-\triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}} = R\Lambda^-\alpha_{i-\frac{1}{2}} = \sum_{p=1}^{m}(\lambda^p)^-\alpha^p_{i-\frac{1}{2}} r^p = \mathcal{A}^-\triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}}.$$

波传播形式的 Godunov 方法

- 另一方面，对于常系数线性双曲型方程组$q_t + Aq_x = 0$, 其在$x_{i-\frac{1}{2}}$ 处黎曼问题的解为

$$Q^{\downarrow}_{i-\frac{1}{2}} = q^{\downarrow}(Q_{i-1}, Q_i) = Q_{i-1} + \sum_{p:\lambda^p<0} \mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}} = Q_i - \sum_{p:\lambda^p>0} \mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}},$$

其中$\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}} = l^p(Q_i - Q_{i-1})r^p = \alpha^p_{i-\frac{1}{2}} r^p$. 因此，

$$F^n_{i-\frac{1}{2}} = AQ^{\downarrow}_{i-\frac{1}{2}} = AQ_{i-1} + \sum_p (\lambda^p)^- \mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}} = AQ_i - \sum_p (\lambda^p)^+ \mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}}.$$

- 由此得

$$F^n_{i+\frac{1}{2}} - F^n_{i-\frac{1}{2}} = \sum_p (\lambda^p)^- \mathcal{W}^p_{i+\frac{1}{2}} + \sum_p (\lambda^p)^+ \mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}} = \mathcal{A}^-\triangle Q^n_{i+\frac{1}{2}} + \mathcal{A}^+\triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}}.$$

波传播形式的 Godunov 方法

- 于是由通量差公式
$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left(F^n_{i+\frac{1}{2}} - F^n_{i-\frac{1}{2}}\right)$$
同样也得出涨落波传播公式
$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left(\mathcal{A}^- \triangle Q^n_{i+\frac{1}{2}} + \mathcal{A}^+ \triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}}\right).$$
- 因此，涨落波传播公式也称为波传播形式的 Godunov 方法。

注： 若 $A\triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}} = 0$，则 0 是$A$ 的特征值。此时可等效地取 $q^{\downarrow}(Q_{i-1}, Q_i) = Q_i$ 或 Q_{i-1} 或 $Q_{i-1} + \gamma\triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}}$, $\forall\gamma \in [0, 1]$.

通量差分裂方法

- 对于常系数线性双曲型方程组，数值通量可以写成

$$F^n_{i-\frac{1}{2}} = AQ_{i-1} + \sum_p (\lambda^p)^- \mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}} = f(Q_{i-1}) + \mathcal{A}^- \triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}}.$$

$$F^n_{i-\frac{1}{2}} = AQ_i - \sum_p (\lambda^p)^+ \mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}} = f(Q_i) - \mathcal{A}^+ \triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}}.$$

- 这可以视为将通量差分裂成为左、右行涨落波：

$$f(Q_i) - f(Q_{i-1}) = \mathcal{A}^- \triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}} + \mathcal{A}^+ \triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}},$$

而左、右行涨落波可以分别用来更新Q_{i-1} 和Q_i.

通量差分裂方法

- 一般地，我们将具有以下形式的通量差分裂公式

$$f(Q_i) - f(Q_{i-1}) = \mathcal{A}^- \triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}} + \mathcal{A}^+ \triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}}$$

  结合涨落波传播公式得到的方法统称为通量差分裂方法。

- 对通量差分裂方法，总可以等价地定义数值通量

$$F^n_{i-\frac{1}{2}} = f(Q_{i-1}) + \mathcal{A}^- \triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}} = f(Q_i) - \mathcal{A}^+ \triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}}.$$

  因此，通量差分裂方法都是守恒型的方法。

通量向量分裂方法

- 常系数线性双曲型方程组(黎曼问题)的通量也可以写成

$$f^n_{i-\frac{1}{2}} = (A^+ + A^-)Q^n_{i-1} + A^-(Q^n_i - Q^n_{i-1}) = A^+Q^n_{i-1} + A^-Q_i.$$

- 这可以理解为对通量（向量）的一种分裂（黎曼问题迎风通量分裂）。其中$A^+Q^n_{i-1}$ 是$AQ^n_{i-1} = f(Q^n_{i-1})$ 的右行分量，$A^-Q^n_i$ 是$AQ^n_i = f(Q^n_i)$ 的左行分量。

- 一般地，有了通量（向量）分裂公式，则可利用通量差公式构造 Godunov 型格式。

通量向量分裂方法与通量差分裂方法的关系

- 对非线性问题，通量向量分裂与通量差分裂一般不同。
- 但若给定一种通量向量分裂方法$f(Q_{i-1}) = f_{i-1}^{(-)} + f_{i-1}^{(+)}$ 和 $f(Q_i) = f_i^{(-)} + f_i^{(+)}$. 则我们可以据此定义左行和右行涨落波

$$\mathcal{A}^-\triangle Q_{i-\frac{1}{2}} = f_i^{(-)} - f_{i-1}^{(-)}, \quad \mathcal{A}^+\triangle Q_{i-\frac{1}{2}} = f_i^{(+)} - f_{i-1}^{(+)}.$$

- 进一步可以 (由关系式 (4.55)) 定义数值通量

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = f_{i-1}^{(+)} + f_i^{(-)}$$

- 因此，我们无需专门单独研究通量向量分裂型方法。

Roe 方法

- 对于常系数线性双曲型方程组，数值通量可以写成

$$F^n_{i-\frac{1}{2}} = AQ^n_{i-1} + \sum_p (\lambda^p)^- \mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}} = f(Q^n_{i-1}) + \mathcal{A}^- \triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}}.$$

$$F^n_{i-\frac{1}{2}} = AQ^n_{i} - \sum_p (\lambda^p)^+ \mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}} = f(Q^n_{i}) - \mathcal{A}^+ \triangle Q^n_{i-\frac{1}{2}}.$$

- 自然地，我们也可以等价地取其平均值，既

$$F^n_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}A(Q^n_i + Q^n_{i-1}) - \frac{1}{2}|A|(Q^n_i - Q^n_{i-1}).$$

- 或写成可推广至非线性问题的形式：

$$F^n_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[f(Q^n_{i-1}) + f(Q^n_i)\right] - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m} |\lambda^p| \mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}}.$$

Roe 方法

- 由通量差方法得相应的格式（称为Roe 格式）为

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{1}{2}\frac{\triangle t}{\triangle x}\left[f(Q_{i+1}^n) - f(Q_{i-1}^n)\right] + \frac{1}{2}\frac{\triangle t}{\triangle x}\sum_{p=1}^{m}\left(|\lambda^p|\mathcal{W}_{i+\frac{1}{2}}^p - |\lambda^p|\mathcal{W}_{i-\frac{1}{2}}^p\right).$$

- 这相当于通过加入一定量的扩散对不稳定的取平均值的数值通量进行了适当地修正.

Roe 方法

- 在涨落波形式的公式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left[\sum_{p=1}^{m}(\lambda^p)^+\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}} + \sum_{p=1}^{m}(\lambda^p)^-\mathcal{W}^p_{i+\frac{1}{2}}\right]$$

中，做替换$(\lambda^p)^+ = \frac{1}{2}(\lambda^p + |\lambda^p|)$, $(\lambda^p)^- = \frac{1}{2}(\lambda^p - |\lambda^p|)$, 也可以直接得到Roe 格式。

- 这种做法也可以推广至非线性情形。

Roe 方法

- 另外，对线性问题，Roe 格式中的修正项
$$\frac{1}{2}\frac{\triangle t}{\triangle x}\sum_{p=1}^{m}\left(|\lambda^p|\mathcal{W}^p_{i+\frac{1}{2}} - |\lambda^p|\mathcal{W}^p_{i-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}|A|\frac{\triangle t}{\triangle x}\delta_x^2 Q_i^n$$
是一个耗散项（正的q_{xx} 项）。
- 因此，Roe 格式也可以认为是在不稳定格式基础上加上了适当的粘性项后得到的格式。

基于迎风格式的最简单的 Godunov 方法

- 计算 $x_{i-\frac{1}{2}}$ 处的黎曼问题的（近似）解 $q^{\downarrow}(Q_{i-1}^n, Q_i^n)$.
- 直接计算数值通量 $F_{i-\frac{1}{2}}^n = \mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n)) = f(q^{\downarrow}(Q_{i-1}^n, Q_i^n))$.
- 或将通量差分解成左行和右行涨落波$\mathcal{A}^-\triangle Q_{i-\frac{1}{2}}^n$, $\mathcal{A}^+\triangle Q_{i-\frac{1}{2}}^n$.
- 用通量差公式或涨落波传播公式

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n\right),$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left[\mathcal{A}^+\triangle Q_{i-\frac{1}{2}}^n + \mathcal{A}^-\triangle Q_{i+\frac{1}{2}}^n\right]$$

计算 t_{n+1} 时刻的单元平均值。

通过增加修正项提高格式的逼近精度

一般的基于迎风格式的 Godunov 方法

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left(\mathcal{A}^- \triangle Q_{i+\frac{1}{2}}^n + \mathcal{A}^+ \triangle Q_{i-\frac{1}{2}}^n\right)$$

只有一阶精度。

为了提高逼近精度，通常可以考虑增加适当的修正项：

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left(\mathcal{A}^- \triangle Q_{i+\frac{1}{2}}^n + \mathcal{A}^+ \triangle Q_{i-\frac{1}{2}}^n\right) - \frac{\triangle t}{\triangle x}\left(\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^n\right).$$

一维线性双曲型方程组的 Lax-Wendroff 方法

- 对于一维线性双曲型方程组$q_t + Aq_x = 0$, 由Taylor 展开, 有

$$q(x, t_{n+1}) = q(x, t_n) + \triangle t q_t(x, t_n) + \frac{1}{2}(\triangle t)^2 q_{tt}(x, t_n) + \cdots .$$

- 又由方程有 $q_t = -Aq_x$, 及

$$q_{tt} = -Aq_{xt} = A^2 q_{xx}.$$

- 因此，方程组的解有展开式

$$q(x, t_{n+1}) = q(x, t_n) - \triangle t A q_x(x, t_n) + \frac{1}{2}(\triangle t)^2 A^2 q_{xx}(x, t_n) + \cdots .$$

一维线性双曲型方程组的 Lax-Wendroff 方法

- 由此得具有二阶逼近精度的 Lax-Wendroff 格式:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\triangle t}{2\triangle x}A(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) + \frac{1}{2}\left(\frac{\triangle t}{\triangle x}\right)^2 A^2(Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i+1}^n).$$

- 这相当于在 Godunov 方法中取数值通量

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}A(Q_{i-1}^n + Q_i^n) - \frac{1}{2}\frac{\triangle t}{\triangle x}A^2(Q_i^n - Q_{i-1}^n).$$

由 $A = A^+ + A^-$, $|A| = A^+ - A^-$ 知 $\frac{1}{2}A = A^+ - \frac{1}{2}|A|$, $\frac{1}{2}A = A^- + \frac{1}{2}|A|$. 因此，该数值通量也可以写成

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = (A^+Q_{i-1}^n + A^-Q_i^n) + \frac{1}{2}|A|\left(I - \frac{\triangle t}{\triangle x}|A|\right)(Q_i^n - Q_{i-1}^n).$$

- 此时，格式的局部截断误差主项是色散项q_{xxx}.

一维线性双曲型方程组的 Beam-Warming 方法

- 若将q_x 的一阶中心差商换为迎风二阶差商（设A 正定）：

$$q_x(x_i,t_n)=\frac{1}{2\triangle x}\left[3q(x_i,t_n)-4q(x_{i-1},t_n)+q(x_{i-2},t_n)\right]+O(\triangle x^2),$$

$$q_{xx}(x_i,t_n)=\frac{1}{\triangle x^2}\left[q(x_i,t_n)-2q(x_{i-1},t_n)+q(x_{i-2},t_n)\right]+O(\triangle x),$$

- 则得具有二阶逼近精度的 Beam-Warming 格式:

$$Q_i^{n+1}=Q_i^n-\frac{\triangle t}{2\triangle x}A(3Q_i^n-4Q_{i-1}^n+Q_{i-2}^n)+\frac{1}{2}(\frac{\triangle t}{\triangle x})^2A^2(Q_i^n-2Q_{i-1}^n+Q_{i-2}^n).$$

- 这相当于在 Godunov 方法中取数值通量

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n=AQ_{i-1}^n-\frac{1}{2}A\left(I-\frac{\triangle t}{\triangle x}A\right)(Q_{i-1}^n-Q_{i-2}^n).$$

- 此时，格式的局部截断误差主项也是色散项q_{xxx}.

Lax-Wendroff 格式和 Beam-Warming 格式的局限性

1. 数值实验结果表明 Lax-Wendroff 格式和 Beam-Warming 格式不能有效捕捉间断解. 这可以认为是色散效应，尤其是高频的色散效应 (见图 6.1)。

2. 将 Lax-Wendroff 格式的数值通量写为以下形式

$$F^n_{i-\frac{1}{2}} = (A^+ Q^n_{i-1} + A^- Q^n_i) + \frac{1}{2}|A|(I - \frac{\triangle t}{\triangle x}|A|)(Q^n_i - Q^n_{i-1}).$$

既在迎风通量基础上加上一个反扩散通量（CFL条件成立）.

3. 这样做在解光滑且变化平缓处提高了逼近精度，但在解不光滑或局部变化陡峭之处的邻域中则会由于数值粘性过小而使数值解产生振荡 (见p.101, Fig. 6.1)。

数值通量限制器

在迎风通量基础上加上一个反扩散通量使得在解光滑且变化平缓处提高了逼近精度，但在解局部变化陡峭之处反而起了反作用。这一事实启发了数值通量限制器的概念。

设$\mathcal{F}_L(Q_{i-1}, Q_i)$ 和$\mathcal{F}_H(Q_{i-1}, Q_i)$ 分别为低阶和高阶的数值通量。

令 $F^n_{i-\frac{1}{2}} = \mathcal{F}_L(Q^n_{i-1}, Q^n_i) + \Phi^n_{i-\frac{1}{2}} \left[\mathcal{F}_H(Q_{i-1}, Q_i) - \mathcal{F}_L(Q_{i-1}, Q_i)\right]$,
其中 $\Phi^n_{i-\frac{1}{2}}$ 在解变化平缓处取值为 1, 而在解变化陡峭处取值为 0. 数值实验结果表明，适当选取限制器的确可以有效的提高数值解的分辨率，同时避免数值振荡 (见p.104, Fig. 6.2)。

注：Lax-Wendroff 格式和Beam-Warming 格式中的低阶通量 $\mathcal{F}_L(Q^n_{i-1}, Q^n_i)$ 是分片常数(迎风)通量，校正通量 $\mathcal{F}_H(Q_{i-1}, Q_i) - \mathcal{F}_L(Q_{i-1}, Q_i)$ 则依赖于变化率$\Delta Q^n_{i-1/2}/\Delta x$.

分片线性重构的 REA 算法

在 REA 算法 4.1 中, 将分片常数重构换为分片线性重构得

$$\tilde{q}^n(x, t_n) = Q_i^n + \sigma_i^n (x - x_i), \quad x_{i-\frac{1}{2}} \le x < x_{i+\frac{1}{2}}.$$

注意, $\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{q}^n(x, t_n) dx = Q_i^n$, 即积分平均值与斜率 σ_i^n 的取值无关, 仍为 Q_i^n.

对任取的斜率 σ_i^n, 分片线性重构是守恒的.

又, REA 算法的第二、三步, 即发展步与积分平均步, 是守恒的, 因此, 分片线性重构的 REA 算法是守恒型算法.

对流方程的基于分片线性重构的迎风格式 $(\bar{u} > 0)$

对于对流方程 $q_t + \bar{u} q_x = 0$, 有 $\tilde{q}^n(x, t_{n+1}) = \tilde{q}^n(x - \bar{u}\Delta t, t_n)$, 于是, 当 $\bar{u} > 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
Q_i^{n+1} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}} - \bar{u}\Delta t}^{x_{i+\frac{1}{2}} - \bar{u}\Delta t} \tilde{q}^n(x, t_n) dx \\
&= \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}\left(Q_{i-1}^n + \frac{1}{2}(\Delta x - \bar{u}\Delta t)\sigma_{i-1}^n\right) + (1 - \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x})\left(Q_i^n - \frac{1}{2}\bar{u}\Delta t \sigma_i^n\right) \\
&= Q_i^n - \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}(Q_i^n - Q_{i-1}^n) - \frac{1}{2}\frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}(\Delta x - \bar{u}\Delta t)(\sigma_i^n - \sigma_{i-1}^n).
\end{aligned}
$$

令 $F_{i-\frac{1}{2}}^n = \bar{u} Q_{i-1}^n + \frac{1}{2}\bar{u}(1 - \frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x})\Delta x \sigma_{i-1}^n$, 则该格式相当于在迎风通量上加上一个依赖于斜率的校正通量。

对流方程的基于分片线性重构的迎风格式 ($\bar{u}<0$)

当 $\bar{u}<0$ 时,

$$
\begin{aligned}
Q_i^{n+1} &= \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}-\bar{u}\Delta t}^{x_{i+\frac{1}{2}}-\bar{u}\Delta t} \tilde{q}^n(x,t_n)dx \\
&= (1+\frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x})\Big(Q_i^n-\frac{1}{2}\bar{u}\Delta t\sigma_i^n\Big)-\frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}\Big(Q_{i+1}^n-\frac{1}{2}(\Delta x+\bar{u}\Delta t)\sigma_{i+1}^n\Big) \\
&= Q_i^n-\frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}(Q_{i+1}^n-Q_i^n)+\frac{1}{2}\frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x}(\Delta x+\bar{u}\Delta t)(\sigma_{i+1}^n-\sigma_i^n).
\end{aligned}
$$

令 $F_{i-\frac{1}{2}}^n=\bar{u}Q_i^n-\frac{1}{2}\bar{u}(1+\frac{\bar{u}\Delta t}{\Delta x})\Delta x\sigma_i^n$, 则该格式相当于在迎风通量上加上一个依赖于斜率的校正通量。

对流方程的基于分片线性重构的迎风格式的数值通量

$$
F_{i-\frac{1}{2}}^n=(\bar{u}^+Q_{i-1}^n+\bar{u}^-Q_i^n)+\frac{1}{2}(1-\frac{|\bar{u}|\Delta t}{\Delta x})(\bar{u}^+\sigma_{i-1}^n\Delta x-\bar{u}^-\sigma_i^n\Delta x).
$$

分片线性重构斜率的选择

一些最直观的选择：

- 中心斜率：$\sigma_i^n = \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x}$, $\Rightarrow$ Fromm 格式.
- 迎风斜率：$\sigma_i^n = \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x}$, $\bar{u} > 0$, $\Rightarrow$ Beam-Worming 格式.
- 背风斜率：$\sigma_i^n = \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x}$, $\bar{u} > 0$, $\Rightarrow$ Lax-Wendroff 格式.

分片线性重构引起的数值振荡—斜率限制器的引入

以上选择在解光滑的区域都具有二阶精度。但在解的间断处附近都会引起数值振荡。

例如，对分片常数的数据

$$Q_i^n = \begin{cases} 1, & i \le J; \\ 0, & i > J, \end{cases}$$

当取 $0 < \bar{u}\Delta t < \Delta x$ 时，则会有 $Q_J^{n+1} > 1$ (见p.108, Fig. 6.4). 要不振荡，则σ_J^n 必须取为零 (< 0 振荡，> 0 相当于增强扩散，无意义且导致精度下降).

据此，Van Leer 首先引入了斜率限制器的思想：即在解的跳跃间断附近对 σ_i^n 的选择加以适当的限制以避免数值振荡。

一维函数总变差的定义

- 一维网格函数总变差的定义：

$$TV(Q) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |Q_i - Q_{i-1}|.$$

- 一般一维函数 $q(x)$ 总变差的定义：记剖分集合 $\Xi = \{-\infty = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_N = \infty,\ N \in \mathcal{N}\}$, 定义

$$TV(q) = \sup_{\Xi} \sum_{i=1}^{N} |q(\xi_i) - q(\xi_{i-1})|.$$

- $TV(Q)$, $TV(q)$ 有界的必要条件：

$$Q_i,\ q(x) \to q^{\pm},\ 当\ \ i, x \to \pm\infty.$$

一维函数总变差的定义

- 一般一维函数 $q(x)$ 总变差的另一种定义：

$$TV(q) = \limsup_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon} |q(x) - q(x-\epsilon)| \, dx.$$

- 当 q 广义可微时，以上定义的等价定义：

$$TV(q) = \int_{-\infty}^{\infty} |q'(x)| \, dx.$$

作业: 4.1，4.3(a),(d)，6.1

Thank You!