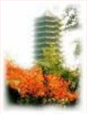
Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

弹性力学与弹性波

1. 由于固体分子间化学键的作用，固体对压缩、拉伸和剪切形变都会产生恢复力（应力）。
2. 对充分小的形变，应力与形变成线性关系（线弹性），大变形时则为非线性弹性。
3. 更大的形变将导致化学键断开，若断开后又形成新的化学键则成为塑性；彻底断开则成为断裂。
4. 小扰动在弹性体中的传播称为弹性波，弹性波又可分为
   纵波（P-波，pressure-wave or primary wave）和
   横波（S-波，shear-wave or secondary wave）.
5. 可以证明 P-波的传播速度c_p 总大于S-波的传播速度c_s.



固体质点的位置、位移与速度

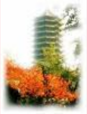
1. 记(x, y) 为质点在参考构型中的位置坐标,
   $(X(x, y, t), Y(x, y, t))$ 为其在t 时刻的位置坐标,
   设 $(X(x, y, 0), Y(x, y, 0)) = (x, y)$.

2. 记位移向量为

$$\vec{\delta} = \begin{bmatrix} \delta^1(x, y, t) \\ \delta^2(x, y, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(x, y, t) \\ Y(x, y, t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3. 记速度向量为

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_t^1(x, y, t) \\ \delta_t^2(x, y, t) \end{bmatrix}$$



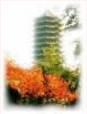
固体的形变与应变

1. 刚体运动（平移与旋转）不产生应力。由此知应力只依赖于相对位移（形变），或位移的梯度（形变梯度）。

2. 由定义，形变梯度为

$$\nabla\vec{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_x^1 & \delta_y^1 \\ \delta_x^2 & \delta_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_x - 1 & X_y \\ Y_x & Y_y - 1 \end{bmatrix} = \varepsilon + \Omega$$

3. ε 和Ω 分别为形变梯度矩阵的对称和反对称分量, 由于 $\Omega\vec{r} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{\delta} - \nabla\vec{\delta}^T)\vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (其中$\vec{\omega} = -\frac{1}{2}(\delta_y^1 - \delta_x^2)\vec{k}$, $\vec{r} = r^1\vec{i} + r^2\vec{j}$) 代表了固体运动的刚体旋转分量，因此形变梯度 $\nabla\vec{\delta}$ 中对应力有贡献的只有ε (称为应变张量).



二维空间中纵波(P-wave)与横波(S-wave)的应变张量

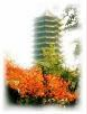
设波沿x-轴的方向传播，

1. 则对纵波有 $X_y(x,y,t)=0,\ Y(x,y,t)\equiv y$, 因此

$$\vec{\delta}(x,y,t)=\begin{bmatrix} X(x,y,t)-x \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon=\begin{bmatrix} X_x(x,t)-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

2. 而对横波则有 $X(x,y,t)\equiv x,\ (Y(x,y,t)-y)_y=0$, 因此

$$\vec{\delta}(x,y,t)=\begin{bmatrix} 0 \\ Y(x,y,t)-y \end{bmatrix}, \quad \varepsilon=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}Y_x(x,y,t) \\ \frac{1}{2}Y_x(x,y,t) & 0 \end{bmatrix}.$$



本构方程

1. 应力与应变的关系由本构方程给出（由材料的性质所决定。对比气体动力学中的状态方程）。

2. 对一维线弹性有

$$\sigma^{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon^{11}, \qquad \sigma^{12} = 2\mu\varepsilon^{12},$$

其中$\lambda > 0$, $\mu > 0$ 称为Lamé 系数, μ 也是材料的剪切模量。

运动方程、动量方程和弹性纵波方程

1. 记质点沿x 方向的运动速度为$u(x,t) = X_t(x,y,t)$, 则有

$$\partial_t \varepsilon^{11}(x,y,t) = \partial_t (X_x(x,y,t) - 1) = X_{tx}(x,y,t) = u_x(x,t).$$

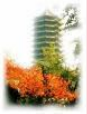
2. 由牛顿第二定律（或动量守恒(平衡)方程）得

$$\rho u_t - \sigma^{11}_x = 0.$$

3. 于是得弹性纵波满足的方程

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & -(\lambda+2\mu) \\ -1/\rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ u \end{bmatrix}_x = 0.$$

这是一个双曲型方程，特征值为$\pm c_p = \pm\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$.



运动方程、动量方程和弹性横波方程

1. 记质点沿y 方向的运动速度为$v(x,t) = Y_t(x,y,t)$, 则有

$$\partial_t \varepsilon^{12}(x,y,t) = \frac{1}{2}\partial_t Y_x(x,y,t) = \frac{1}{2} Y_{tx}(x,y,t) = \frac{1}{2} v_x(x,t).$$

2. 由牛顿第二定律（或动量守恒(平衡)方程）得

$$\rho v_t - \sigma^{12}_x = 0.$$

3. 于是得弹性横波满足的方程

$$\begin{bmatrix} \sigma^{12} \\ v \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ -1/\rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^{12} \\ v \end{bmatrix}_x = 0.$$

这也是一个双曲型方程，特征值为$\pm c_s = \pm\sqrt{\mu/\rho}$.

一维拉氏气体动力学（Lagrangian Gas Dynamics）

1. 在欧氏(Eulerian) 气体动力学中，x 指空间中定点，$u(x,t)$ 指t 时刻位于x 点处的流体质点（宏观小微观大）的速度。
2. 在拉氏(Lagrangian) 气体动力学中, ξ 指流体质点的坐标, $U(\xi,t)$ 指t 时刻该质点（宏观小微观大）的速度, 而$X(\xi,t)$ 指该质点在t 时刻所占据的物理位置。
3. 对一维问题，我们可以令$\xi = \int_{x_0}^{x} \mathring{\rho}(s)\, ds$. 此时质点$\xi_1$ 和ξ_2 之间气体的总质量为 $\xi_2 - \xi_1 = \displaystyle\int_{X(\xi_1,t)}^{X(\xi_2,t)} \rho(x,t)dx$.
4. 拉氏速度和欧氏速度间的关系:
   $X_t(\xi,t) = U(\xi,t) = u(X(\xi,t),t)$.

一维拉氏气体动力学（Lagrangian Gas Dynamics）

1. 称单位质量的物质所占的体积为比容（specific volume），记为$V(\xi,t)$. 由定义$V(\xi,t)=1/\rho(X(\xi,t),t)$.
2. 在一维拉氏气体动力学中，由$\int_{X(\xi_1,t)}^{X(\xi_2,t)}\rho(x,t)dx=\int_{\xi_1}^{\xi_2}d\xi$ 有$\frac{\partial X(\xi,t)}{\partial\xi}=V(\xi,t)$, 所以有
$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}V(\xi,t)\,d\xi=\int_{X(\xi_1,t)}^{X(\xi_2,t)}dx=X(\xi_2,t)-X(\xi_1,t).$$
3. 由于$X_t(\xi,t)=U(\xi,t)$, 由上式得
$$V_t(\xi,t)-U_\xi(\xi,t)=0.$$

一维拉氏气体动力学（Lagrangian Gas Dynamics）

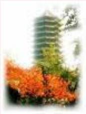
1. 在拉氏坐标下，在$[\xi_1,\xi_2]$ 之间的流体的总动量为 $\int_{\xi_1}^{\xi_2} U(\xi,t)\,d\xi$.

2. 由于在此坐标下，在$[\xi_1,\xi_2]$ 两端点没有流体质点的流入或流出(无对流通量), 所以动量变化仅源于两端的压力差, 既 $\frac{d}{dt}\int_{\xi_1}^{\xi_2} U(\xi,t)\,d\xi = p(\xi_1,t) - p(\xi_2,t)$, 或 $U_t + p_\xi = 0$.

3. 对于等熵流（或绝热流）有状态方程 $p = p(V)$, （例如, 对等熵流有 $p(V) = \hat{\kappa} V^{-\gamma}$）, 于是得 p-系统

$$\begin{cases} V_t(\xi,t) - U_\xi(\xi,t) = 0, \\ U_t(\xi,t) + p_\xi(V(\xi,t)) = 0. \end{cases}$$

当$p'(V) < 0$ 时，p-系统是双曲型守恒律方程组。

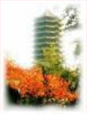


电磁波的 Maxwell 方程

在没有净电荷与电流的情况下，电磁波满足以下 Maxwell 方程:

$$
\begin{cases}
\vec{D}_t - \nabla \times \vec{H} = 0, \\
\vec{B}_t + \nabla \times \vec{E} = 0, \\
\nabla \cdot \vec{D} = 0, \\
\nabla \cdot \vec{B} = 0,
\end{cases}
$$

其中$\vec{D}$ 是电位移，$\vec{E}$ 是电场强度, $\vec{B}$ 是磁感应强度, $\vec{H}$ 是磁场强度, 它们之间有以下关系：$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, 其中 ε 是介电常数, μ 为磁导率, 对于各向同性材料 ε 和 μ 是标量, 一般情况下则为 3×3 二阶张量。



电磁波的 Maxwell 方程

当 ε 和 μ 是常标量时， Maxwell 方程可化简为:

$$\begin{cases} \vec{E}_t - \frac{1}{\varepsilon\mu}\nabla \times \vec{B} = 0, \\ \vec{B}_t + \nabla \times \vec{E} = 0, \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0. \end{cases}$$

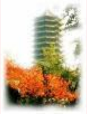
利用后两个方程（$\vec{E}$, $\vec{B}$ 无散）可以证明前两个方程是三维线性双曲型方程组。

平面电磁波和一维 Maxwell 方程

先考虑沿 x-轴传播的平面波。设 E-field 在 y 方向振动，B-field 在 z 方向振动, 既 $\vec{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ E^2(x,t) \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B^3(x,t) \end{bmatrix}$, 此时 ε 和 μ 为常标量的 Maxwell 方程化简为:

$$\begin{cases} E_t^2 + \frac{1}{\varepsilon\mu} B_x^3 = 0, \\ B_t^3 + E_x^2 = 0. \end{cases}$$

系统的系数矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon\mu} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 由此知这是一个双曲系统, 两个特征值分别为 $\pm 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, 因此介质中的电磁波传播速度为 $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.



一阶线性双曲型偏微分方程组

考虑一维一阶线性严格双曲型偏微分方程组：

$$q_t(x,t) + Aq_x(x,t) = 0,$$

其中$q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, A 是m 阶可实对角化的实矩阵.

记矩阵A 的特征值为$\lambda^1 < \ldots < \lambda^m$, $r^1, \ldots, r^m$ 是其相应的右特征向量，$R = [r^1 \ldots r^m]$ 是由右特征向量为列构成的矩阵。则$L = R^{-1}$ 的行$l^1, \ldots, l^m$ 是矩阵A 的相应的左特征向量，且有

$$A = R\Lambda R^{-1}, \quad \text{其中 } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^m \end{bmatrix}.$$

一阶常系数线性双曲型偏微分方程组的对角化

令$w = R^{-1}q$ 或$w^p(x,t) = l^p q(x,t)$, $p = 1, \ldots, m$, 则方程化简为

$$w_t + \Lambda w_x = 0, \quad 或 \quad w_t^p + \lambda^p w_x^p = 0, \ p = 1, 2, \ldots, m.$$

这是m 个独立的对流方程，它们的初值问题的解为

$$w^p(x,t) = w^p(x - \lambda^p t, 0) = l^p q(x - \lambda^p t, 0) = l^p \mathring{q}(x - \lambda^p t).$$

因此，原方程初值问题的解为

$$q(x,t) = Rw(x,t) = \sum_{p=1}^{m} w^p(x,t) r^p = \sum_{p=1}^{m} [l^p \mathring{q}(x - \lambda^p t)] r^p.$$

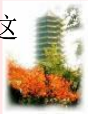
一阶常系数线性双曲型方程组的特征与黎曼不变量

- 第p $(1 \le p \le m)$ 族特征方程：$X_p'(t) = \lambda^p$;
- 第p $(1 \le p \le m)$ 族特征线：$X_p(t) = X_p(0) + \lambda^p t$;
- 沿第p $(1 \le p \le m)$ 族特征线$X_p(t)$，$\frac{d}{dt} w^p(X_p(t), t) = 0$;
- $w^p(q) = l^p q$ 称为第p $(1 \le p \le m)$ 族特征的黎曼不变量;
- 沿p $(1 \le p \le m)$ 族特征线$X_p(t) = X_p(0) + \lambda^p t$ 传播的p 族波的波型是特征向量 r^p, 波的传播速度为λ^p, 波的强度是黎曼不变量 $w^p(x,t) = l^p \mathring{q}(x - \lambda^p t)$.

注: 严格地说, 常系数线性情形的这种黎曼不变量的定义与一般情形的定义并不相同, 它们是某种意义上的一种互补关系。

一阶常系数线性双曲型方程组的简波解

- 可以将一阶常系数线性双曲型方程组的解视为m 个波的叠加，其中每个波以其自身的特征速度传播并保持形状不变。
- 第p 个波的形状为$\mathring{w}^p(x)r^p$，其传播速度为λ^p.
- 若$w^p(x,0)=\mathring{w}^p(x)\equiv\bar{w}^p$, $\forall p\neq i$, 则有
$$q(x,t)=\mathring{w}^i(x-\lambda^i t)r^i+\sum_{p\neq i}\bar{w}^p r^p=\mathring{q}(x-\lambda^i t).$$
  这表明解 $q(x,t)$ 在相空间中的轨迹落在一条 i-积分曲线上. 注意在每条 i-积分曲线上 $w^p(q)$ 为一常数, $\forall p\neq i$ (i-黎曼不变量的一般定义).
- 此时，方程组的解与退化方程 $w_t^i+\lambda^i w_x^i=0$ 的解$1-1$ 对应.
- 这种解称为简波解。非线性问题中也有类似形式的解，在这种解中只有属于一个特征族的波在空间传播。



一阶常系数线性双曲型方程组的简波解

- 对于一般的具有紧支集的初值，当时间充分大之后，初值问题的解将完全分离成 m 个以各自的特征速度传播的简波.
- 例如，对于声波方程

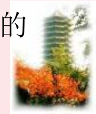
$$\begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & K_0 \\ 1/\rho_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}_x = 0.$$

- 方程组的特征值和右特征向量分别为

$$\lambda^{\pm} = \pm c_0 = \pm\sqrt{K_0/\rho_0},$$

$$r^1 = r^- = \begin{bmatrix} -\rho_0 c_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r^2 = r^+ = \begin{bmatrix} \rho_0 c_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

由$q(x,t) = \mathring{w}^1(x-\lambda^1 t)r^1 + \mathring{w}^2(x-\lambda^2 t)r^2$, 对一个紧支集的声源，可以观察到向左、右传播的两个简波。



双曲型方程组的依赖区域

- 由一维常系数线性双曲型方程组初值问题解的表达式

$$q(x,t) = Rw(x,t) = \sum_{p=1}^{m} w^p(x,t) r^p = \sum_{p=1}^{m} [l^p \mathring{q}(x-\lambda^p t)] r^p$$

  知在x-t 空间中的点(X,T) 处，解$q(X,T)$ 的值只依赖于初始时刻$\mathring{q}$ 在m 个点$X-\lambda^p t$, $p=1,\dots,m$, 处的值。所以称集合$D(\Omega,T)=\{X-\lambda^p t : p=1,\dots,m,\ X\in\Omega\}$ 为方程组的解在T 时刻关于集合Ω 在初始时刻的依赖区域。

- 对任给的$T>0$, 当Ω 有界时，双曲型方程的依赖区域也总是有界的，这反映了信息传播速度的有限性。

- 即便Ω 只是一个点，在非线性情形，其依赖区域一般也是一个有界区间。

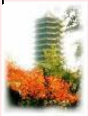
双曲型方程组的影响区域

- 由一维常系数线性双曲型方程组初值问题解的表达式

$$q(x,t) = Rw(x,t) = \sum_{p=1}^{m} w^p(x,t) r^p = \sum_{p=1}^{m} [l^p \mathring{q}(x - \lambda^p t)] r^p$$

知在x_0 处的初始值$\mathring{q}(x_0)$ 只会沿特征线 $x = x_0 + \lambda^p t$, $p = 1, \ldots, m$, 传播，从而影响这些特征线上方程组的解的取值。因此将这些特征线称为x_0 点的影响区域。一般地，定义 $I(\Omega) = \{x + \lambda^p t : p = 1, \ldots, m,\ x \in \Omega,\ t > 0\}$ 为区域Ω 的影响区域。

- 在非线性情形，即便只是一个点，其影响区域一般也是一个区域，且在任意有限时间内，它是一个有限区域。



双曲型方程组的决定区域

- 由一维常系数线性双曲型方程组初值问题解的表达式

$$q(x,t) = Rw(x,t) = \sum_{p=1}^{m} w^p(x,t) r^p = \sum_{p=1}^{m} [l^p \overset{\circ}{q}(x - \lambda^p t)] r^p.$$

知：一旦给定了区域Ω 上的初值, 双曲型方程组的解在集合$K(\Omega) = \{(x,t) : x - \lambda^p t \in \Omega, 1 \le p \le m,\ t > 0\}$ 上的取值就被完全确定了，而不在$K(\Omega)$ 中的点上解的值则不能完全由Ω 上的初值完全确定。因此称$K(\Omega)$为Ω 的决定区域。

常系数线性双曲型方程组的黎曼问题

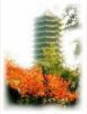
- 常系数线性双曲型方程组的黎曼问题：

$$\begin{cases} q_t + Aq_x = 0, \\ \mathring{q}(x) = \begin{cases} q_l, & \text{if } x < 0, \\ q_r, & \text{if } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

其中q_l, q_r 为常向量。

- 对方程式情形，$q_t + \bar{u}q_x = 0$ 的解为$q(x,t) = \mathring{q}(x - \bar{u}t)$, 所以有

$$q(x,t) = \begin{cases} q_l, & \text{if } x - \bar{u}t < 0, \\ q_r, & \text{if } x - \bar{u}t > 0. \end{cases}$$



常系数线性双曲型方程组黎曼问题黎曼不变量形式

- 对方程组情形，设A 的特征值和左、右特征向量分别为$\{\lambda^p\}_{p=1}^m$, $\{l^p\}_{p=1}^m$, $\{r^p\}_{p=1}^m$, 则方程组可以写为

$$w_t^p + \lambda^p w_x^p = 0, \quad p = 1, \dots, m,$$

其中 $w(x,t) = R^{-1}q(x,t) = Lq(x,t)$.

- 将q_l 和q_r 做分解$q_l = \sum_{p=1}^m w_l^p r^p$, $q_r = \sum_{p=1}^m w_r^p r^p$.
- 于是，相应的黎曼初值可以写为

$$\mathring{w}^p(x) = \begin{cases} w_l^p, & \text{if } x < 0, \\ w_r^p, & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

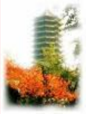
常系数线性双曲型方程组黎曼问题的解

- 常系数线性双曲型方程组黎曼问题的黎曼不变量的解为:

$$w^p(x,t) = \begin{cases} w_l^p, & \text{if } x - \lambda^p t < 0, \\ w_r^p, & \text{if } x - \lambda^p t > 0, \end{cases} \qquad p = 1, \ldots, m.$$

- 因此，常系数线性双曲型方程组黎曼问题的解可以表示为

$$q(x,t) = Rw(x,t) = \sum_{p=1}^{m} w^p(x,t) r^p = \sum_{p:\lambda^p < x/t} w_r^p r^p + \sum_{p:\lambda^p > x/t} w_l^p r^p.$$



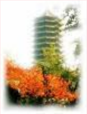
常系数线性双曲型方程组黎曼问题解的结构

- 由此可见，常系数线性双曲型方程组过原点的m 条特征线$x = \lambda^p t$, $p = 1, \ldots, m$, 将上半平面分为了$m+1$ 个子区域，从左到右跨过第p 条特征线时, 解有一个跳跃 (见图 3.3).
$$W^p = (w_r^p - w_l^p) r^p \triangleq \alpha^p r^p \quad p = 1, \ldots, m.$$

- 注意，沿第p 条特征线，解的跳跃量一定是A 的第p 个特征向量r^p 的倍数，于是有$[f]_p = \lambda_p [q]_p$, 既

$$f(q_p) - f(q_{p-1}) = A(q_p - q_{p-1}) = A\alpha^p r^p = \lambda^p \alpha^p r^p = \lambda^p (q_p - q_{p-1}).$$

注： 非线性问题弱解的间断也满足所谓的Rankine-Hugoniot 跳跃间断条件$[f]_p = s^p [q]_p$, 其中 s^p 为第 p 族激波的传播速度.



常系数线性双曲型方程组黎曼问题解的结构

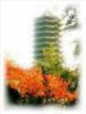
- 记$q_r - q_l = \alpha^1 r^1 + \cdots + \alpha^m r^m$, 或 $\alpha = R^{-1}(q_r - q_l)$, 记$W^p = \alpha^p r^p$, 则常系数线性双曲型方程组黎曼问题的解又可以表示为

$$q(x,t) = q_l + \sum_{p:\lambda^p < x/t} W^p = q_r - \sum_{p:\lambda^p > x/t} W^p.$$

或

$$q(x,t) = q_l + \sum_{p=1}^{m} H(x - \lambda^p t) W^p = q_r - \sum_{p=1}^{m} H(\lambda^p t - x) W^p.$$

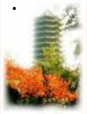
其中$H(\cdot)$ 为Heaviside 函数。



两个方程的常系数方程组的黎曼问题的相平面方法

- m 个方程的常系数线性双曲型方程组黎曼问题的解从左到右从 q_l 变到q_r 要跨过m 条特征线，经过$m-1$ 个中间状态 q_l+W^1, $q_l+W^1+W^2$, $\cdots$, $q_l+W^1+\cdots+W^{m-1}$.
- 从第i 个状态到第$i+1$ 个状态的跳跃$W^{i+1}=\alpha^{i+1}r^{i+1}$ 是A 的属于λ^{i+1} 的特征向量, $i=0,1,\cdots,m-1$。
- 对于两个方程的方程组, 只有一个中间状态q_m, 这时，这一过程可以在相平面（状态空间）上简单表出：

$$q_l=w_l^1r^1+w_l^2r^2,\quad q_r=w_r^1r^1+w_r^2r^2 \quad\Rightarrow\quad q_m=w_r^1r^1+w_l^2r^2.$$



两个方程的方程组的黎曼问题的相平面方法

- 称与q_l 之差满足 $f(q) - f(q_l) = \lambda^1(q - q_l)$ 的所有状态 q 组成点集为过 q_l 的1-Hugoniot 点集。类似地，称与q_r 之差满足 $f(q) - f(q_r) = \lambda^2(q - q_r)$ 的所有状态 q 组成点集为过 q_r 的2-Hugoniot 点集 (见图 3.4(a))。
- 称相空间中 r^1 向量场的积分曲线为1-积分曲线，称相空间中 r^2 向量场的积分曲线为2-积分曲线。
- 对于常系数线性问题，过 q_l 的1-Hugoniot 点集与1-积分曲线重合，统称 1-特征（1-波）；过 q_r 的2-Hugoniot 点集与2-积分曲线重合，统称 2-特征（2-波）；它们都是直线。
- 由$q_m - q_l = (w_r^1 - w_l^1)r^1$ 和$q_r - q_m = (w_r^2 - w_l^2)r^2$ 知q_m 必落在过q_l 的1-特征（1-波）上，同时它必落在过q_r 的2-特征（2- 波）上. 因此，在相平面上，q_m 恰为过q_l 的1-特征和过q_r 的2-特征的交点 (见图 3.5)。

线性声波方程及其特征

- 当空气的对流速度$u_0 = 0$ 时，线性声波方程可以写为

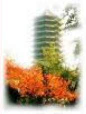
$$\begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & K_0 \\ 1/\rho_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}_x = 0.$$

- 方程组的特征值和左、右特征向量分别为(见图 3.6(a))

$$\lambda^{\pm} = \pm c_0 = \pm\sqrt{K_0/\rho_0},$$

$$r^1 = r^- = \begin{bmatrix} -\rho_0 c_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r^2 = r^+ = \begin{bmatrix} \rho_0 c_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$l^1 = l^- = \frac{1}{2Z_0}[-1 \ \ Z_0], \quad l^2 = l^+ = \frac{1}{2Z_0}[1 \ \ Z_0].$$



线性声波方程黎曼问题的解

- 沿特征的跳跃间断量强度由$\alpha = R^{-1}(q_r - q_l)$ 给出，既

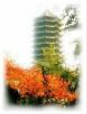
$$\alpha^1 = l^1(q_r - q_l) = \frac{-(p_r - p_l) + Z_0(u_r - u_l)}{2Z_0},$$

$$\alpha^2 = l^2(q_r - q_l) = \frac{(p_r - p_l) + Z_0(u_r - u_l)}{2Z_0}.$$

- 波型分别为r^1 和r^2, 一波为$W^1 = \alpha^1 r^1$, 二波为$W^2 = \alpha^2 r^2$.
- 中间状态为

$$q_m = q_l + \alpha^1 r^1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (p_r + p_l) - Z_0(u_r - u_l) \\ (u_r + u_l) - (p_r - p_l)/Z_0 \end{bmatrix},$$

在相平面上，它是由过q_l 的 1-积分曲线与过q_r 的 2-积分曲线的交点 (见图 3.6(b), 其中 $u_l = u_r = 0$)。



线性声波方程耦合对流方程的特征

- 线性声波方程耦合对流方程可以写为

$$\begin{bmatrix} p \\ u \\ \phi \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} u_0 & K_0 & 0 \\ 1/\rho_0 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ u \\ \phi \end{bmatrix}_x = 0.$$

- 记$c_0 = \sqrt{K_0/\rho_0}$, $Z_0 = \rho_0 c_0$, 则方程组的特征值和右特征向量分别为

$$\lambda^1 = u_0 - c_0, \quad \lambda^2 = u_0, \quad \lambda^3 = u_0 + c_0,$$

$$r^1 = \begin{bmatrix} -Z_0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r^3 = \begin{bmatrix} Z_0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

线性声波方程耦合对流方程黎曼问题的解

- 于是对线性声波方程耦合对流方程有

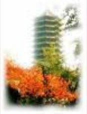
$$R = \begin{bmatrix} -Z_0 & 0 & Z_0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2Z_0} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2Z_0} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

- 对黎曼初值q_l, q_r, 令$\alpha = R^{-1}(q_r - q_l)$, 既

$$\alpha^1 = \frac{1}{2Z_0}[-(p_r - p_l) + Z_0(u_r - u_l)],$$

$$\alpha^2 = \phi_r - \phi_l,$$

$$\alpha^3 = \frac{1}{2Z_0}[(p_r - p_l) + Z_0(u_r - u_l)].$$



线性声波方程耦合对流方程黎曼问题的解

- 于是对线性声波方程耦合对流方程黎曼问题的解为(见图 3.7)

$$q(x,t)=\begin{cases} q_l, & \text{if} \quad x<(u_0-c_0)t,\\ q_l+\alpha^1 r^1, & \text{else if} \quad x<u_0 t,\\ q_l+\alpha^1 r^1+\alpha^2 r^2, & \text{else if} \quad x<(u_0+c_0)t,\\ q_r, & \text{else if} \quad x>(u_0+c_0)t. \end{cases}$$

- 特别地，跨过第二特征线时，二波的间断跳跃为

$$\alpha^2 r^2=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \phi_r-\phi_l \end{bmatrix}.$$

既在跳跃间断线两端，压力和速度都是连续的。这样的波称为接触间断。

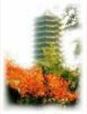
对角化系统和入流边界条件

1. 设线性双曲型方程组的对角化系统为

$$w_t^p + \lambda^p w_x^p = 0, \quad p = 1, 2, \cdots, m.$$

2. 当$\lambda^p > 0$, 则需要在$x = a$ 处提供w^p 的信息, 而当$\lambda^p < 0$, 则需要在$x = b$ 处提供w^p 的信息.

3. 入流边界条件：若系统有n 个负特征值和$m-n$ 个正特征值, 则需要在边界b 处给出n 个相互独立的包含前n 个黎曼不变量w^I 信息的边界条件，在边界a 处出$m-n$ 个相互独立的包含后$m-n$ 个黎曼不变量w^{II} 信息的边界条件.

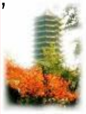


入流边界条件的形式

1. 在边界$x=b$ 处的入流边界条件一般可以写为
$$w^{I}(b,t)=B_2 w^{II}(b,t)+g_2(t).$$
2. 在边界$x=a$ 处的入流边界条件一般可以写为
$$w^{II}(a,t)=B_1 w^{I}(a,t)+g_1(t).$$
3. 其中w^{I} 是对应于n 个负特征值$\lambda^1,\cdots,\lambda^n$ 的黎曼不变量, 而w^{II} 是对应于$m-n$ 个负特征值$\lambda^{n+1},\cdots,\lambda^m$ 的黎曼不变量. $w=\begin{bmatrix} w^{I} \\ w^{II} \end{bmatrix}$.

边界条件通常要根据问题的物理背景提出

1. 理论上说，我们总可以将方程组用黎曼不变量对角化，因此边界条件总可以以入流边界条件的形式给出。
2. 但在应用中，一般不需要做对角化，边界条件通常可以根据物理问题确定。一般来说，边界条件不是以特征形式（入流边界条件的形式）给出的。
3. 例如，对区间$[a, b]$ 上的声波方程（$u_0 = 0$），可在两端点令$u(a, t) = u(b, t) = 0$, 既气体不能流出区域（也不能向内运动，否则将形成真空），这就是所谓的固壁边界条件。由于$W^1 = -p + Z_0 u$, $W^2 = p + Z_0 u$, 所以固壁边界条件的特征形式为：$W^2(a, t) = -W^1(a, t)$ 和$W^1(b, t) = -W^2(b, t)$, 因此也称其为全反射边界条件。



边界条件通常要根据问题的物理背景提出

1. 又如，对区间$[a,\ b]$ 上的声波方程（$u_0 = 0$），可在两端点令$W^2(a,t) = 0$ 及$W^1(b,t) = 0$, 既出流边界条件（outflow boundary condition），或吸收边界条件。由于$W^1 = -p + Z_0 u$, $W^2 = p + Z_0 u$, 所以出流边界条件的物理变量形式为：$p(a,t) = -Z_0 u(a,t)$ 和$p(b,t) = Z_0 u(b,t)$。

2. 周期边界条件也是常用的边界条件：$q(a,t) = q(b,t) \ \Leftrightarrow$ $W^2(a,t) = W^2(b,t),\ W^1(b,t) = W^1(a,t)$.

作业: 2.5，3.1 (a), (b)，3.4

Thank You!