Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems

Zhiping Li

LMAM and School of Mathematical Sciences
Peking University

一阶双曲型偏微分方程组

考虑一维一阶偏微分方程组：

$$q_t(x,t) + Aq_x(x,t) = 0,$$

其中$q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, A 是m 阶实矩阵.

当矩阵A 的特征值都是实的，且有一组（m个）相应的线性无关的特征向量，则称以上方程组为(强)双曲型的。特别地，当所有实特征值都互不相同时，方程组称为是严格双曲型的。当矩阵A 的特征值都是实的，但相应的线性无关的特征向量少于m个，则称以上方程组为弱双曲型的。

二阶双曲型偏微分方程组

波动方程：

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t),$$

是二阶双曲型偏微分方程.

令$v = u_t$, $w = -au_x$, 则有

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_x = 0.$$

一般二阶双曲型偏微分方程都可以通过变量替换转化为一阶双曲型方程组。

一维守恒律方程组

若存在通量函数$f(q)$, 使得

$$q_t(x,t) + f(q(x,t))_x = 0,$$

且矩阵$\nabla f(q)$ 的特征值都是实的，且有一组（m个）相应的线性无关的特征向量，则称以上方程组为守恒量(密度) q 的双曲守恒律。特别地，当所有实特征值都互不相同时，守恒律方程组称为是严格双曲型的。

守恒律的积分形式

对守恒律方程组在$x_1 < x < x_2$ 上积分得：

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} q(x,t)dx = f(q(x_1,t)) - f(q(x_2,t))$$

这说明，在$[x_1,x_2]$ 上以q 为密度的守恒量关于时间的变化率仅依赖于区域两端点的通量差。

将上式在$[t_1,t_2]$ 上积分，得更一般的积分形式的守恒律方程组

$$\int_{x_1}^{x_2} q(x,t_2)dx = \int_{x_1}^{x_2} q(x,t_1)dx - \int_{t_1}^{t_2}(f(q(x_2,t)) - f(q(x_1,t)))dt$$

这说明，在$[x_1,x_2]$ 上以q 为密度的守恒量的增量等于在相应时间段通过该区域端点净流入的守恒量。

间断解

当守恒律方程组的解充分光滑时，守恒律方程组的微分形式与积分形式是等价的。

在非线性情形，即便初始值很光滑，双曲守恒律方程（组）的解也会产生强间断（激波）。一般地说，积分形式的守恒律方程（组）更真实地刻画了相应的物理现象。

在计算中，除非在解的光滑区域内，算法的设计应该基于积分形式的守恒律方程（组）。

有限体积法— 基于方程的积分形式的离散方法

- 由于解有间断，微分方程在间断处不再成立。
- 传统的差分方法在间断附近会有困难。
- 有限体积法是基于方程的积分形式的离散方法：将区域划分为单元（cells），近似计算q 在单元上的平均值，给出逼近真实通量的数值通量（关键步骤），根据守恒律方程的积分形式计算下一时间步q 在单元上的平均值.
- 利用q 在单元上的近似平均值构造适当的分片多项式, 以期得到q 的某种意义下更好的逼近。这种分片多项式重构在有限体积法的预处理和后处理中都发挥着重要作用。

Riemann 问题— 构造有限体积法的基本工具

双曲型方程的Riemann 问题：既双曲型方程的以下特殊形式的初值问题。

$$q(x,0)=\begin{cases} q_l, & \text{if } x<0; \\ q_r, & \text{if } x>0. \end{cases}$$

- 双曲型方程信息传播速度的有限性。
- 初值的影响区域、决定区域，解对初值的依赖区域。
- 当A 或f 不显含(x,t) 时，由相邻两个单元上的单元平均值（$q_l=Q_{i-1}$，$q_r=Q_i$）所定义的Riemann 问题的解可以计算出一个时间步通过两个单元交界面处的数值通量。

Riemann 问题的真解和近似解

当A 或f 不显含(x,t) 时，双曲型方程（组）Riemann 问题的熵解一般是相似性解，既熵解为x/t 的函数（令 $y=\alpha x$, $s=\alpha t$, $\tilde{q}(y,s)=q(\alpha^{-1}y,\alpha^{-1}s)$, 则可以证明 $\tilde{q}$ 和 q 是同一Riemann 问题的熵解。由熵解的唯一性即得结论）。

- 线性问题的解可以由初值和A 的特征值和特征向量决定。
- 非线性（自治）问题的解也可用类似的方法逼近。
- 由于Riemann 问题的真解计算量太大，在实际计算中对非线性问题通常采用Riemann 问题的近似解。
- Riemann 问题本质上是一维的，但也可以推广至高维。例如对二维问题的多边形（四边形、三角形）单元，可通过计算垂直于单元边的Riemann 问题给出穿越每条边的数值通量。

激波的捕捉（Capturing）与跟踪（Tracking）

1. 捕捉（Capturing）：将跳跃间断条件（jump condition）隐含在算法中，使其能够用尽可能少的网格自动捕捉到激波（间断），且在间断附近不引入非物理振荡。

2. 跟踪（Tracking）：显式地计算出激波位置（间断位置），在解光滑处采用有限差分或有限体积法逼近。

线性波、非线性波与高阶格式

1. 线性双曲型方程源于对小振幅波的研究。例如声波源于物质在分子水平的振荡。类似地，电磁波源于物质在电子水平的振荡。
2. 线性双曲型方程的解通常是光滑的，且可以用不同频率的正弦波合成。
3. 激波是一种非线性现象。
4. 当计算区域是波长的若干（例如10^3）倍量级时，有必要采用高阶格式以减少工作量。

波的传播和涨落 v.s. 数值通量

1. 一般的高阶格式在应用到不连续介质时会遇到困难。
2. 高分辨率有限体积格式在这方面具有优势。
3. “波的传播和涨落”方法是一类直接基于Riemann 问题的解的各种波（激波、中心稀疏波等）及相应波速，而不是数值通量，构造数值格式的方法。

一维管道流 —— 最简单的守恒律方程式

1. 已知流速：$u(x,t)$（单位：长度/时间）。
2. 设$q(x,t)$ 为流体中某种物质的密度（单位：质量/长度）。
3. $\int_{x_1}^{x_2} q(x,t)\,dx$ 表示在$x_1 < x < x_2$ 的一段管道中该物质的总量，其关于时间的变化率仅依赖于（无源无汇）该物质通过端点x_1, x_2 流入该段管道的速率，既:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} q(x,t)\,dx = F_1(t) - F_2(t)$$

其中 $F_i(t) = f(q_i, x_i, t)$ 为通量, $F_i(t) > 0$ 表示向右流, $F_i(t) < 0$ 表示向左流.

一维管道流 —— 最简单的守恒律方程式

1. $f(q,x,t)$ 为通量密度（单位：质量/时间）
2. 当通量不显式地依赖于(x,t), 既$f(q,x,t)\equiv f(q)$, 方程为自治系统。此时有

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} q(x,t)\,dx = -f(q(x,t))\Big|_{x_1}^{x_2}$$

3. 将上式从 t_1 到t_2 积分得积分形式的守恒律方程式：

$$\int_{x_1}^{x_2} q(x,t_2)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} q(x,t_1)\,dx - \int_{t_1}^{t_2} \left(f(q(x_2,t)) - f(q(x_1,t))\right) dt.$$

一维管道流 —— 最简单的守恒律方程式

1. 当 q 和f 充分光滑时，由 $f(q(x,t))\big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} f_x(q(x,t))\,dx$, etc. 得
$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}[q_t(x,t)+f_x(q(x,t))]\,dxdt = 0.$$

2. 再由x_1，x_2，t_1，t_2 的任意性，得微分形式的守恒律方程式
$$q_t(x,t)+f_x(q(x,t)) = 0.$$

3. 特别地，当$f(q(x,t)) = \bar{u}q(x,t)$ 时，得齐次对流方程（advection, convection, one-way wave equation）
$$q_t(x,t)+\bar{u}q_x(x,t) = 0.$$

对流方程的特征线与通解

1. 考虑对流方程$q_t + \bar{u} q_x = \Psi(x, t)$;

2. 特征方程：$X'(t) = \bar{u}$;

3. 特征线：$x - \bar{u}t = const.$;

4. 沿着每条特征线$X(t)$, 对流方程简化为常微分方程：

$$\frac{d}{dt} q(X(t), t) = q_t(X(t), t) + X'(t) q_x(X(t), t) = q_t + \bar{u} q_x = \Psi(X(t), t);$$

5. 因此得对流方程初值问题的通解:
$q(x, t) = \tilde{q}(x - \bar{u}t) + \int_0^t \Psi(x - \bar{u}(t - s))ds$, 其中$\tilde{q}(x)$ 为初值.

6. 特别地, 对齐次对流方程初值问题, 有$q(x, t) = \tilde{q}(x - \bar{u}t)$.

常系数线性双曲型方程组的特征方程和黎曼不变量

- $q_t + Aq_x = 0$, 其中$R^{-1}AR = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$;
- 第i $(1 \le i \le m)$ 族特征方程：$X_i'(t) = \lambda_i$;
- 第i $(1 \le i \le m)$ 族特征线：$X_i(t) = X_i(0) + \lambda_i t$;
- 令$w = R^{-1}q$, 则有$w_t + \Lambda w_x = 0$;
- 沿第i $(1 \le i \le m)$ 族特征线$X_i(t)$，$\frac{d}{dt} w_i(X_i(t), t) = 0$;
- w_i 称为第i $(1 \le i \le m)$ 族特征的黎曼不变量;
- 通解：$q(x,t) = \sum_{i=1}^{m} r^i w_i(x - \lambda_i t, 0) = \sum_{i=1}^{m} r^i l^i q(x - \lambda_i t, 0)$,
  其中l^i, r^i 分别是A 的从属于λ_i 的左右特征向量。

常系数对流方程初值问题的解

1. 对流方程（advection, convection, one-way wave equation）

$$q_t(x,t) + \bar{u} q_x(x,t) = 0.$$

2. 初始条件：$q(x,t_0) = q^0(x)$, $-\infty < x < \infty$;

3. 于是, 若 $x - \bar{u}t = x_0 - \bar{u}t_0$, 则有 $q(x,t) = q(x_0,t_0) = q^0(x_0)$.
由此得初值问题的解:

$$q(x,t) = q^0(x - \bar{u}(t - t_0)), \quad t \geq t_0.$$

常系数对流方程初边值问题的解

1. 初始条件：$q(x, t_0) = q^0(x),\ a < x < b;$
2. 边界条件：$q(a, t) = g_0(t),\ t \geq t_0,\ 当\bar{u} > 0;$
   $q(b, t) = g_1(t),\ t \geq t_0,\ 当\bar{u} < 0;$
3. 初边值问题的解:

$$q(x,t) = \begin{cases} g_0(t - (x-a)/\bar{u}), & \text{if } a < x < a + \bar{u}(t - t_0), \\ q^0(x - \bar{u}(t - t_0)), & \text{if } a + \bar{u}(t - t_0) < x < b, \end{cases} \quad \text{if } \bar{u} > 0;$$

$$q(x,t) = \begin{cases} q^0(x - \bar{u}(t - t_0)), & \text{if } a < x < b + \bar{u}(t - t_0), \\ g_1(t - (x-b)/\bar{u}), & \text{if } b + \bar{u}(t - t_0) < x < b, \end{cases} \quad \text{if } \bar{u} < 0;$$

变系数守恒型管道流方程

1. 变系数守恒型管道流方程：$q_t(x,t)+(u(x)q(x,t))_x=0.$
2. 特征方程：$X'(t)=u(X(t))$ (也是质点的轨迹方程);
3. 沿特征线解满足常微分方程:

$$\frac{d}{dt}q(X(t),t)=q_t(X(t),t)+X'(t)q_x(X(t),t)$$
$$=q_t(X(t),t)+(u(X(t))q(X(t),t))_x-u'(X(t))q(X(t),t)$$
$$=-u'(X(t))q(X(t),t).$$

例如变截面管道中的不可压流，令$\kappa(x)$ 为管道截面的面积，则流量速率$\kappa(x)u(x)=:U$ 为常量 (密度 q 量纲为：质量/长度).

变系数非守恒型管道流方程（Color Equation）

1. 若密度$\tilde{q}$ 量纲取为：质量/体积。
2. 则总量为$\int_{x_1}^{x_2} \kappa(x)\tilde{q}(x,t)\,dx$, 通量为$f(\tilde{q}) = U\tilde{q}$.
3. 由守恒律得$\kappa(x)\tilde{q}_t(x,t) + U\tilde{q}_x(x,t) = 0$, 或
$$\tilde{q}_t(x,t) + u(x)\tilde{q}_x(x,t) = 0.$$
4. 特征方程：$X'(t) = u(X(t))$ (也是质点的轨迹方程);
5. 沿特征线解满足常微分方程:
$$\frac{d}{dt}\tilde{q}(X(t),t) = \tilde{q}_t(X(t),t) + X'(t)\tilde{q}_x(X(t),t) = 0.$$

注：算子$\partial_t + u\partial_x$ 称为随体导数，因为它反映的是随着运动质点所观察到的物质密度的变化率。

扩散方程和对流-扩散方程（抛物型偏微分方程）

由于分子的热运动，除了随流体的运动之外，物质的分子有一个由密度较大的区域向密度较小的区域的一个净运动 (扩散效应)，流体的流速 $\bar{u}$ 应视为分子的平均运动速度。

1. 当 $\bar{u}=0$ 时，由扩散的Fick 定律：通量为 $f(q_x)=-\beta q_x$，其中 β 为扩散系数。于是由守恒律得扩散方程：

$$q_t=\beta q_{xx} \quad \text{或} \quad q_t=(\beta(x)q_x)_x.$$

2. 当 $\bar{u}\neq 0$ 时，通量为 $f(q,q_x)=\bar{u}q-\beta q_x$，于是由守恒律得对流-扩散方程：

$$q_t+\bar{u}q_x=\beta q_{xx} \quad \text{或} \quad q_t+(\bar{u}q)_x=(\beta(x)q_x)_x.$$

能量守恒与热方程

q 为温度（非守恒量），内能为守恒量，内能密度 $E(x,t)=\kappa(x)q(x,t)$, 其中κ 为材料的热容.

1. 由热（能）通量的 Fourier 定律：热（能）通量为 $f(q_x)=-\beta q_x$, 其中β 为热传导系数。于是由守恒律得热传导方程：

$$(\kappa q)_t=(\beta q_x)_x.$$

2. 一般地, 若变量为 q, 守恒量为 κq, 其中 κ 称为容函数。则当通量为 $f(q)$ 时, 便得守恒律：

$$(\kappa q)_t+f(q)_x=0.$$

源项的影响与平衡方程

当 (x_1, x_2) 上有源或汇时，则守恒量的变化率还必须考虑源和汇的贡献。

1. 设源的密度（量纲：守恒量/长度）为 $\Psi(q, x, t)$. 则有
$$\int_{x_1}^{x_2} [q_t(x,t) + f_x(q(x,t))]\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \Psi(q(x,t), x, t)\, dx.$$
或
$$q_t(x,t) + f_x(q(x,t)) = \Psi(q(x,t), x, t).$$
2. 例如，对热平衡问题，当 $\Psi(q, x, t) = D(q_0 - q(x,t))$ 时，得：
$$(\kappa q)_t = (\beta q_x)_x + D(q_0 - q(x,t)).$$

反应流方程

设一维常速管道流中有浓度分别为 q^1 和 q^2 的放射性同位素，其中浓度为 q^1 的同位素以速率 α 指数衰减至另一种同位素。

1. 则对于第一种同位素而言，相当于有一个密度为 $\Psi(q^1, q^2) = -\alpha q^1$ 的源。因此有

$$q^1_t + \bar{u} q^1_x = -\alpha q^1.$$

2. 而对于第二种同位素而言，相当于有一个密度为 $\Psi(q^1, q^2) = \alpha q^1$ 的源。因此有

$$q^2_t + \bar{u} q^2_x = \alpha q^1.$$

一维管道流的质量守恒方程和动量守恒方程

- 设ρ 为质量密度（量纲：质量/长度），u 为流速（量纲：长度/时间），则有质量守恒方程：

$$\rho_t + (u\rho)_x = 0$$

- 若质量密度的变化会对流速产生影响时，速度u 也必然是变量。注意，虽然速度不是守恒量，但动量$\int_{x_1}^{x_2} \rho u \, dx$ 是守恒量。动量的通量由两部分组成。
- 动量的对流通量：动量密度· 流速$= (\rho u) \cdot u = \rho u^2$.
- 动量的冲量通量：动量变化率$=$ 外力主向量（压力p）.
- 于是得动量守恒方程：

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0.$$

一维管道流的能量守恒方程与状态方程

- 以上两个方程不封闭，因为压力p 未知。压力非守恒量，压力单位时间所做的功pu 与守恒量能量E 相关。
- 设E 为能量密度（量纲：能量/长度）。
- 能量的对流通量：能量密度· 流速 $= Eu$.
- 能量的外力做功通量：能量变化率= 外力（压力p）· 流速 $= pu$.
- 于是得能量守恒方程：

$$E_t + [(E + p)u]_x = 0.$$

- 压力p 仍未知。一般需要通过与介质的物理性质相关的状态方程将压力p 表示成为ρ, ρu 和E 的函数$p = p(\rho, \rho u, E)$.

一维等熵流方程组

- 对于等熵流，压力可以表示为质量密度的函数 $p = P(\rho)$, 其中P 满足$P' > 0, \forall \rho > 0$.

- 此时由质量守恒方程和动量守恒方程得封闭的方程组：

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = 0. \end{cases}$$

一维等熵流方程组

- 一维等熵流方程组也可以写成 $q_t + f(q)_x = 0$, 其中

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix}; \quad f(q) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^2 \\ (q^2)^2/q^1 + P(q^1) \end{bmatrix}.$$

- 也可以写成拟线性方程组 $q_t + f'(q)q_x = 0$, 其中

$$f'(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ P'(q^1) - (q^2/q^1)^2 & 2q^2/q^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ P'(\rho) - u^2 & 2u \end{bmatrix}.$$

- $f'(q)$ 的特征多项式为 $\lambda^2 - 2u\lambda + (u^2 - P'(\rho)) = 0$, 它有两个实根 $\lambda^{\pm} = u \pm \sqrt{P'(\rho)}$.

- 因此, 由 $P' > 0$ 知: 一维等熵流方程组是严格双曲型方程组.

线性声波方程

1. 声波可以由等熵流方程刻画，特别是在系统定常态附近微小光滑扰动的声波可以用线性化的等熵流方程描述。

2. 此时，$q(x,t) = q_0 + \tilde{q}(x,t)$, 其中$\tilde{q}(x,t)$ 及其各阶导数$\ll 1$.

3. 忽略高阶小量得线性声波方程: $\tilde{q}_t + f'(q_0)\tilde{q}_x = 0$，或

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_t + (\widetilde{\rho u})_x = 0, \\ (\widetilde{\rho u})_t + (-u_0^2 + P'(\rho_0))\tilde{\rho}_x + 2u_0(\widetilde{\rho u})_x = 0. \end{cases}$$

线性声波方程

1. 由于$\tilde{u}$ 和$\tilde{p}$ 为可以直接测量的物理量，故常常将线性声波方程化为关于 $\tilde{u}$ 和$\tilde{p}$ 的方程组。
2. 由$p_0 + \tilde{p} = P(\rho_0 + \tilde{\rho}) = P(\rho_0) + P'(\rho_0)\tilde{\rho} + \dots$
   得 $\tilde{p} \approx P'(\rho_0)\tilde{\rho}$.
3. 由$(\rho u)_0 + \widetilde{\rho u} = \rho u = (\rho_0 + \tilde{\rho})(u_0 + \tilde{u}) = \rho_0 u_0 + \tilde{\rho} u_0 + \rho_0 \tilde{u} + \tilde{\rho}\tilde{u}$,
   得 $\widetilde{\rho u} \approx u_0 \tilde{\rho} + \rho_0 \tilde{u}$.
4. 记$K_0 = \rho_0 P'(\rho_0)$, 称为体压缩模量，则得线性声波方程:

$$\begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{u} \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} u_0 & K_0 \\ 1/\rho_0 & u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{u} \end{bmatrix}_x .$$

线性声波方程的特征

1. 为记号简单起见，省略 ~，记

$$q = \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} u_0 & K_0 \\ 1/\rho_0 & u_0 \end{bmatrix}.$$

2. 则由 $\det(\lambda I - A) = (\lambda - u_0)^2 - K_0/\rho_0$ 得：

$$\lambda^{\pm} = u_0 \pm \sqrt{K_0/\rho_0} = u_0 \pm \sqrt{P'(\rho_0)}.$$

3. 称 $c_0 = \sqrt{K_0/\rho_0} = \sqrt{P'(\rho_0)}$ 为该气体中的声速。

4. 一般有$\lambda^{\pm}(A) = u_0 \pm c_0$。特别地，当$u_0 = 0$ 时，$\lambda^{\pm}(A) = \pm c_0$。

线性声波方程初值问题的通解

1. 记介质的阻抗 $Z_0 = \rho_0 c_0$. 则 A 的右特征向量分别为

$$r^1 = r^- = \begin{bmatrix} -\rho_0 c_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r^2 = r^+ = \begin{bmatrix} \rho_0 c_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. 令$w = R^{-1}q$, 其中矩阵$R = [r^1, r^2]$, 则有通解表达式:

$$q(x,t) = \sum_{i=1}^{2} r^i w_i(x - \lambda_i t, 0) = \sum_{i=1}^{2} r^i l^i q(x - \lambda_i t, 0),$$

其中l^i 是R^{-1} 的第i 行，是A 的从属于λ^i 的左特征向量。

$$R^{-1} = \frac{1}{2Z_0} \begin{bmatrix} -1 & Z_0 \\ 1 & Z_0 \end{bmatrix}.$$

线性声波方程初值问题通解的分量形式

1. 黎曼不变量 $w = R^{-1}q$ 的初始值的分量为

$$\mathring{w}_1(x) = \frac{1}{2Z_0}[-\mathring{p}(x)+Z_0\,\mathring{u}(x)];\quad \mathring{w}_2(x) = \frac{1}{2Z_0}[\mathring{p}(x)+Z_0\,\mathring{u}(x)].$$

2. 初值问题通解分量表达式：

$$p(x,t) = \frac{1}{2}[\mathring{p}(x+c_0t)+\mathring{p}(x-c_0t)]-\frac{Z_0}{2}[\mathring{u}(x+c_0t)-\mathring{u}(x-c_0t)];$$

$$u(x,t) = \frac{-1}{2Z_0}[\mathring{p}(x+c_0t)-\mathring{p}(x-c_0t)]+\frac{1}{2}[\mathring{u}(x+c_0t)+\mathring{u}(x-c_0t)].$$

作业: 2.1，2.2，2.4

Thank You!