2023 年秋季学期随机分析课程作业与相关信息

December 30, 2023

主要教材:

1. Karatzas I., Shreve S.E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* 2nd ed. Springer 1991 [KS]
2. 龚光鲁, 钱敏平. 随机微分方程引论 第三版 电子工业出版社 北京 2019 [GQ]

主要参考书目:

3. Revuz D., Yor M. *Continuous Martingale and Brownian Motion.* 3rd ed. Springer 1999 [RY]
4. Chung K.L., Williams R.J. *Introduction to Stochastic Integration.* 2nd ed. Birkhäuser 1990 [CW1]
   龚光鲁 译 钟开莱随机积分导论 第二版 世界图书出版公司 2021 [CW2]
5. 刘勇 应用随机分析讲义 2023 版 [Liu]
   https://www.math.pku.edu.cn/teachers/liuyong/asa/lectnote23.pdf

更多教学信息:

http://www.math.pku.edu.cn/teacher/liuyong/teachingindex.html

Contents

1 9 月 12 日

1. 阅读 [GQ] p2-3 引理 1.1、引理 1.2 和引理 1.3.
2. 阅读 [Liu] 第四章定理 4.1.1.
3. 阅读 [Liu] 第 5.1-5.4 节.

2 9 月 14 日 (有提示)

1. 设 ξ_t 是定义在带流概率空间取值于 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 的轨道右连续的随机过程. 若 G 是开集, 证明 $\tau(\omega) = \inf\{t > 0, \xi_t \in G\}$ 是宽停时; 若 ξ_t 的轨道是连续的, F 是闭集, 证明 $\tau'(\omega) = \inf\{t > 0, \xi_t \in F\}$ 是停时.

   可以参阅 [KS]p7 Problem 2.6, 2.7

   也可以参阅 《随机过程引论》(第二版) 钱敏平 龚光鲁 编著 北京大学出版社 p43 例 7 (但这个证明有些漏洞)

2. 阅读 [KS]p1-2. p47-71 (Chapter 2.1-2.4), p10 Definition 2.25

3. 阅读 [GQ]p2 定义 1.4，1.5，p3 定义 1.6；命题 1.1

4. [KS] p4 Exercise 1.7, Exercise 1.8

3　9 月 19 日 (有提示)

1. 若将平方可积鞅限制在有限闭区间 $[0,T]$, 得到 $\mathcal{M}_{2,T}(\mathcal{F}_t)=\{(M_t)_{t\in[0,T]}$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ 右连左极平方可积鞅. $\}$, 在其中定义范数 $\|M\|_{2,T}=(\mathrm{E}M_T^2)^{\frac{1}{2}}$. 证明: $\mathcal{M}_{2,T}(\mathcal{F}_t)$ 在范数 $\|M\|_{2,T}$ 下成为一个 Hilbert 空间; $M_{2,T}^c(\mathcal{F}_t)=\{(M_t)_{t\in[0,T]}$ 是 $(\mathcal{F}_t)$ 连续平方可积鞅. $\}$. 证明: $M_{2,T}^c(\mathcal{F}_t)$ 是 $M_{2,T}(\mathcal{F}_t)$ 的闭子空间.

   可以参阅 [GQ] p12 引理 1.7

2. 设 N_t 是强度参数为 λ 的 Poisson 过程. $\mathcal{F}_t=\sigma(N_s,s\le t)$.

   (1) 求 $(N_t-\lambda t)_{t\ge0}^2$ 的 Doob-Meyer 分解;
   提示: 设 $X_t=(N_t-\lambda t)^2$, 则 $(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ 是下鞅.
   $X_t=(N_t-\lambda t)^2-\lambda t+\lambda t$, 设 $M_t=(N_t-\lambda t)^2-\lambda t$, $c(t)=\lambda t$, 则 $(c(t))_t t\ge 0$ 为右连续可料增过程. 下面只需证明 $(M_t,\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ 是鞅,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[(N_t-\lambda t)^2-\lambda t|\mathcal{F}_s]\\
=\ &\mathrm{E}[\Big((N_t-N_s-\lambda(t-s))-(N_s-\lambda s)\Big)^2-\lambda t|\mathcal{F}_s]\\
=\ &\mathrm{E}[(N_t-N_s-\lambda(t-s))^2|\mathcal{F}_s]-2\mathrm{E}[(N_t-N_s-\lambda(t-s))(N_s-\lambda s)|\mathcal{F}_t]\\
&+\mathrm{E}[(N_s-\lambda s)^2|\mathcal{F}_s]-\lambda t\\
=\ &\mathrm{E}[(N_t-N_s-\lambda(t-s))^2]-0+N_s-\lambda s-\lambda t\\
=\ &\lambda(t-s)+(N_s-\lambda s)^2-\lambda t\\
=\ &(N_s-\lambda s)^2-\lambda s.
\end{aligned}
$$

   (2) 设 $(X_n)_{n\ge0}$ 是 i.i.d 的随机变量序列, X_0 的密度函数为 $p(x)$, $\mathrm{E}|X_0|<\infty$, $(N_t)_{t\ge0}$ 与 $(X_n)_{n\ge0}$ 独立的 Poisson 过程, 其强度参数为 λ. 设 $Y_t=\sum_{n=0}^{N_t}X_n$, 则 $(Y_t)_{t\ge0}$ 是一个时间齐次的独立增量过程, 称为复合 Poisson 过程. 此问中取 $\mathcal{F}_t=\sigma(Y_s,s\le t)$. 求 $(Y_t)_{t\ge0}$ 的 Doob-Meyer 分解.
   提示: $Y_t=M_t+C_t$, 其中鞅部分为 $M_t=Y_t-\lambda t\mathrm{E}X_0$, $C_t=\lambda t\mathrm{E}X_0$. 可以利用 $(Y_t)_{t\ge0}$ 的独立增量性证明 $(M_t)_{t\ge0}$ 的鞅性.

3. 设 $X,Y\in\mathcal{M}_2$,

   (1) 证明: $|\langle X,Y\rangle|^2\le\langle X\rangle\langle Y\rangle$.

   (2) 设 $\xi_t=\langle X,Y\rangle_t$, $\breve{\xi}_t$ 是 ξ 在 $[0,t]$ 上的全变差, 证明:

$$
\breve{\xi}_t(\omega)-\breve{\xi}_s(\omega)\le\frac{1}{2}\big[\langle X\rangle_t(\omega)-\langle X\rangle_s(\omega)+\langle Y\rangle_t(\omega)-\langle Y\rangle_s(\omega)\big]
$$

   几乎处处成立.

   可以参阅 [GQ] p78 命题 2.20 Kunita-Watanabe 不等式的证明. [KS] p31 Problem 5.7

4. 设 X_t 是一个单生过程, 即其状态空间为 $\mathbb{Z}^+=\{0,1,2,\cdots\}$, 转移速率矩阵 Q 满足

$$
Q_{ij}=\begin{cases}\lambda_i & j=i+1,\\ -\lambda_i & j=i.\end{cases}
$$

   进一步假定 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}=\infty$, 即 X_t 非爆炸 (保守的), 而且 $t\ge0$, $\mathrm{E}X_t<\infty$, $X_0=0$. 求 X_t 的 Doob-Meyer 分解并证明你的结论.

   提示: 设 $T_0=0$, $T_1=\inf\{t\ge0,X_t\ne X_0\},\cdots,T_n=\inf\{t\ge T_{n-1},X_t\ne X_{T_{n-1}}\},\cdots$.

设 $\xi_n = T_n - T_{n-1}$，则 ξ_n 服从均值为 $\frac{1}{\lambda_{n-1}}$ 的指数分布．单生过程 $X_t = \sup\{n : T_n \le t\}$.

$$X_t = X_0 - \int_0^t \lambda_{X_r} \mathrm{d}r + \int_0^t \lambda_{X_r} \mathrm{d}r,$$

其中 $\left\{\int_0^t \lambda_{X_r} \mathrm{d}r\right\}_{t\ge 0}$ 连续适应，因此是可料的，而且为增过程．在下一题中，取 $f(x) = x$，计算 $Qf(X_r)$ 即得.

5. 设 X_t 是取值于 $\mathbb{Z}^+$ 上的连续时间参数的马氏链, 假设 X_t 非爆炸. 其转移速率矩阵为 Q. 设 $f : \mathbb{Z}^+ \mapsto \mathbb{R}$, $\forall t > 0$, $\mathrm{E}|f(X_t)| < \infty$. 并假设 X_t 的 Kolmogorov 向前方程、向后方程成立, 即

$$\text{向前方程} \quad \frac{\mathrm{dP}_t}{\mathrm{d}t} = \mathrm{P}_t Q;$$

$$\text{向后方程} \quad \frac{\mathrm{dP}_t}{\mathrm{d}t} = Q\mathrm{P}_t.$$

求 $f(X_t)$ 的 Doob-Meyer 分解并证明你的结论.

设 $Q = (q_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}^+}$.

以上的向前（向后）方程在无穷状态空间是形式记号，其实质意义是:

$$\frac{\mathrm{dE}[f(X_t)|X_0 = i]}{\mathrm{d}t} = \mathrm{E}[Qf(X_t)|X_0 = i].$$

其对应的积分形式是:

$$\mathrm{E}[f(X_t) - f(X_0)|X_0 = i] = \mathrm{E}[\int_0^t Qf(X_r)\mathrm{d}r|X_0 = i].$$

利用时间齐次性, 等价于:

$$\mathrm{E}[f(X_t) - f(X_s)|X_s] = \mathrm{E}[\int_s^t Qf(X_r)\mathrm{d}r|X_s]. \tag{1}$$

其中, $Qf(i) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^+} q_{ij} f(j)$. 利用马氏性, (1) 等价于

$$\mathrm{E}[f(X_t) - f(X_s) - \int_s^t Qf(X_r)\mathrm{d}r|\mathcal{F}_s] = 0, \tag{2}$$

即 $(f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Qf(X_r)\mathrm{d}r)_{t\ge 0}$ 是鞅. 由此得

$$f(X_t) = f(X_0) + f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Qf(X_r)\mathrm{d}r + \int_0^t Qf(X_r)\mathrm{d}r.$$

上式就是 $(f(X_t))_{t\ge 0}$ 的 Doob-Meyer 分解，其中 $(\int_0^t Qf(X_r)\mathrm{d}r)_{t\ge 0}$ 为可料连续有界变差过程.

6. 阅读 [GQ] 第 1.2，1.3 节内容；p76 定理 2.1，p77 命题 2.19, 定义 2.23，例 1；p78 命题 2.21

7. 阅读 [KS] p3-5; Chapter 1.4; Chapter 1.5 p30-p31 包括 Problem 5.7

4　9 月 26 日

1. 设 $(M_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 是平方可积鞅. $0 \leq t_0 \leq t_1 < t_2$, $\xi_t \in \mathcal{F}_{t_1}$. 证明:

$$\mathrm{E}[\xi_{t_1}^2 (M_{t_2} - M_{t_1})^2 | \mathcal{F}_{t_0}] = \mathrm{E}[\xi_{t_1}^2 (\langle M\rangle_{t_2} - \langle M\rangle_{t_1}) | \mathcal{F}_{t_0}].$$

   由上式证明, 对于 $X \in \mathcal{L}^*(\langle M\rangle)$,

$$\mathrm{E}[(I_t(X) - I_s(X))^2 | \mathcal{F}_s] = \mathrm{E}[\int_s^t X_u^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_u | \mathcal{F}_s] \ a.s.\mathrm{d}P.$$

   可以参考 [KS] p138 (2.16) 和 (2.18) 式.

2. **[KS] p35 Problem 5.12**
   设 $X \in \mathcal{M}_2^c$, T 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时. 若 $\langle X\rangle_T = 0, a.s.\mathrm{d}P$, 证明:

$$\mathrm{P}(X_{T\wedge t} = 0, \forall 0 \leq t \leq \infty) = 1.$$

3. 做 [KS]p20 Problem 3.24 (可以参阅 [RY] p71 Corollary 3.6)

4. 阅读 [KS]p128-141

5. 阅读 [KS] p9 Proposition 2.18

5　9 月 28 日

1. 设 $X, Y \in \mathcal{L}^0$, $M, N \in \mathcal{M}_2^c$, 证明:

$$\langle I^M(X), I^N(Y)\rangle_t = \int_0^t X_u Y_u \mathrm{d}\langle M, N\rangle_u.$$

2. 阅读 [KS]p141-145

6 10 月 10 日

1. 阅读 [KS] p142-143 Proposition 2.14 Kunita-Watanabe 不等式的证明.
2. 阅读 [KS]p36 Remark 5.16, 并完成 Remark 中提示的习题.
3. Suppose $M, N \in \mathcal{M}^{c,loc}$ and $X \in \mathcal{P}_g^*(M) \cap \mathcal{P}_g^*(N)$. Shows that for every pair (α, β) of real numbers we have
$$I^{\alpha M + \beta N}(X) = \alpha I^M(X) + \beta I^N(X).$$
[KS] p147 Problem 2.25
4. [RY] p131 Exercise 1.27
5. 阅读 [KS] p145-148
6. 阅读 [KS] p36 Definition 5.15

7　10 月 12 日

1. 阅读 [GQ] p79 命题 2.22, p91 引理 2.23 和 2.24.
2. [KS] p149 Problem 3.2.
3. 阅读 [GQ] p25-29 Itô 公式证明, 阅读 [KS] p149-153 Itô 公式证明.
4. 证明 [KS] p33-34 Theorem 5.8，Lemma 5.9 and Lemma 5.10.
5. 设 $B = (B_t)_{0\le t\le 1}$ 是标准布朗运动. $X = (aB_t)_{0\le t\le 1}$, 其中 $a > 0, a \neq 1$. 证明: B 和 X 在 $(C([0,1]), \mathcal{B}(C([0,1])))$ 上诱导的测度相互奇异.

8　10 月 17 日 (有提示)

1. **[KS] p155 Problem 3.12**

   Suppose we have two continuous semimartingales

   $$X_t = X_0 + M_t + B_t,\ Y_t = Y_0 + N_t + C_t;\ 0 \le t < \infty,$$

   where M and N are in $\mathcal{M}^{c,loc}$ and B and C are adapted, continuous processes of bounded variation with $B_0 = C_0 = 0$ a.s. Prove the integration by parts formula

   $$\int_0^t X_s \mathrm{d}Y_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s \mathrm{d}X_s - \langle M, N\rangle_t.$$

2. 阅读 [KS] p153-156

3. 阅读 [GQ] p29-37

4. **[KS] p158 Exercise 3.17** Let $W_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)})$ be a three-dimensional Brownian motion starting at the origin and define

   $$X = \prod_{i=1}^{3} \mathrm{sgn}(W_1^{(i)}),$$

   $$M_t^{(1)} = W_t^{(1)}, M_t^{(1)} = W_t^{(2)}, M_t^{(3)} = XW_t^{(3)}.$$

   Show that each of the pairs $(M^{(1)}, M^{(2)}, (M^{(1)}, M^{(3)}$ and $(M^{(2)}, M^{(3)}$ is a two-dimensional Brownian motion, but $(M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)})$ is not a three-dimensional Brownian motion. Explain why this does not provide a counter-example to Theorem 3.16, i.e., a three-dimensional processes which is not a Brownian motion but which has components in $\mathcal{M}^{c,loc}$ and satisfies

   $$\langle M^{(k)}, M^{(j)}\rangle_t = \delta_{ij} t;\quad 1 \le k, j \le d.$$

5. 阅读 [GQ] p3 命题 1.1，[KS] p85 2.6.13.

6. 阅读 [Liu] p43 例 3.2.3 和 p108 例 6.3.3

7. 设 $\phi \in \mathcal{L}_2^{loc}$, 若 $\langle \int_0^\cdot \phi_s \mathrm{d}B_s\rangle_t = f(t)$, 其中 $f(t)$ 为连续严格单调的非随机函数. 证明: $(\int_0^t \phi_u \mathrm{d}B_u)_{t\ge 0}$ 为独立增量过程且 $\int_s^t \phi_u \mathrm{d}B_u$ 服从 $N(0, f(t) - f(s))$.

8. 设 $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ 是二维布朗运动, $(B_0^{(1)})^2 + (B_0^{(2)})^2 \ne 0$. 判断 $(B_t^{(1)} B_t^{(2)})_{t\ge 0}$ 与 $\big(\ln\big[(B_t^{(1)})^2 + (B_t^{(2)})^2\big]\big)_{t\ge 0}$ 是否是 $(\mathcal{F}_t^{\mathbf{B}})_{t\ge 0}$ 鞅, 是否是 $(\mathcal{F}_t^{\mathbf{B}})_{t\ge 0}$ 局部鞅, 并请写出你的判断的数学证明.

   提示:

   $$\mathrm{d}(B_t^{(1)} B_t^{(2)}) = B_t^{(1)} \mathrm{d}B_t^{(2)} + B_t^{(2)} \mathrm{d}B_t^{(1)},\quad \mathrm{E}\int_0^t (B_s^{(1)})^2 \mathrm{d}s = \mathrm{E}\int_0^t (B_s^{(2)})^2 \mathrm{d}s = \frac{t^2}{2} < \infty.$$

   因为

   $$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\big(\ln\big[(B_t^{(1)})^2 + (B_t^{(2)})^2\big]\big) = \infty,$$

   所以 $\ln\big[(B_t^{(1)})^2 + (B_t^{(2)})^2\big]$ **不是鞅. 注意到对于 2 维布朗运动** $\mathbf{B}_t$**, 设** $\tau_0 = \inf\{t \ge 0, \mathbf{B}_t = 0\}$**, 则** $\mathrm{P}(\tau_0 < \infty | \mathbf{B}_0 = x) = 0, x \ne 0$**. 对** $\ln\big[(B_t^{(1)})^2 + (B_t^{(2)})^2\big]$ **用 Itô 公式即可.**

9 10 月 24 日 (有提示)

1. 阅读 [Liu] p105-109
2. 阅读 [KS] p158-163
3. 阅读 [KS]163-167 Martingale Moment Inequalities .
4. 阅读 [KS] p168-179;
5. 阅读 [GQ] p145 引理 3.8 及其证明.
6. 考虑如下的随机微分方程 (平方 Bessel 过程)

$$\mathrm{d}X(t) = n\mathrm{d}t + 2\sqrt{X(t)}\mathrm{d}B_t,$$

其中, n 为大于 1 的正整数. 设 $\tau_0 = \inf\{t \geq 0,\, X_t = 0\}$. 证明: $\mathrm{P}(\tau_0 = \infty | X_0 = x) = 1$, $x > 0$.

提示: 先证明这个方程在 $(0,\infty)$ 非爆炸.

$$S(x) = \begin{cases} \ln x & n = 2, \\ \frac{x^{1-\frac{n}{2}} - 1}{1-\frac{n}{2}} & n \geq 3. \end{cases}.$$

设 $0 < a < x < b$**,**

$$\mathrm{P}_x(\tau_a < \tau_b) = \frac{S(b) - S(x)}{S(b) - S(a)} = \begin{cases} \frac{\ln b - \ln x}{\ln b - \ln a} & n = 2, \\ \frac{b^{1-\frac{n}{2}} - x^{1-\frac{n}{2}}}{b^{1-\frac{n}{2}} - a^{1-\frac{n}{2}}} & n \geq 3. \end{cases}$$

取 $a_m \downarrow 0$**,** $\{\tau_0 < \tau_b\} = \cap_{m=1}^{\infty}\{\tau_{a_m} < \tau_b\}$**, 故**

$$\mathrm{P}_x\{\tau_a < \tau_b\} = \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}_x\{\tau_{a_m} < \tau_b\} = 0.$$

取 $b_m \uparrow \infty$**,** $\tau_\infty = \lim_{m\to\infty} \tau_{b_m}$**, 由非爆炸条件,** $\mathrm{P}_x(\tau_\infty = \infty) = 1$**,** $\{\tau_0 < \tau_\infty\} = \cup_{m=1}^{\infty}\{\tau_0 < \tau_\infty\}$**,**

$$\mathrm{P}_x(\tau_0 < \infty) = \mathrm{P}_x(\tau_0 < \tau_\infty) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}_x(\tau_0 < \tau_{b_m}) = 0.$$

故 $\mathrm{P}_x(\tau_0 = \infty) = 1$**.**

7. **[KS] p162 Problem 3.23**

Let $R = \{R_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ be a Bessel process with dimension $d \geq 2$ starting at $r > 0$, and define

$$m = \inf_{t\geq 0} R_t.$$

(i) Show that if $d = 2$, then $m = 0$ a.s. P.

(ii) Show that if $d \geq 3$, then m has the beta distribution

$$\mathrm{P}(m \leq c) = \Big(\frac{c}{r}\Big)^{d-2};\quad 0 \leq c \leq r.$$

8. **[KS] p163 Problem 3.24**

Let R be a Bessel process with dimension $d \geq 3$ starting at $r \geq 0$. Show that

$$\mathrm{P}(\lim_{t\to\infty} R_t = \infty) = 1.$$

10　10 月 26 日

1. 利用内蕴时间变换给 10 月 17 日第 7 题一个新的证明.

2. 能否构造一个连续局部鞅 $(M_t)_{t\in[0,1]}$ 其特征是 $[0,1]$ 上的康托函数.

3. 有兴趣的同学可以读下面论文的 Proposition 3.

   Nualart, D. and Peccati, G., Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals. *Ann. Probab.* (2005) Vol. 33. No.1 p177-193

4. 阅读 [GQ] p37-39

5. 阅读 [GQ] p145-147

6. 阅读 [KS] p169-173

7. 设 $(B_t = B_t^{(1)} + \mathrm{i}B_t^{(2)})_{t\geq 0}$ 是复 BM，其中 $B^{(1)}$ 和 $B^{(2)}$ 独立的 BM. 设 $D\subset\mathbb{C}$ 是一个连通开子集, $f: D\mapsto\mathbb{C}$ 是一个非常数的解析函数, $\tau_D=\inf\{t\geq 0, B_t\notin D\}$, $B_0=z\in D$. 设 $S_t=\int_0^t |f'(B_r)|^2\mathrm{d}r$, $0\leq t<\tau_D$, $\sigma_s=S_s^{-1}$, 即 $\int_0^{\sigma_s}|f'(B_r)|^2\mathrm{d}r=s$. 证明: $Y_s=f(B_{\sigma_s})$, $0\leq s<S_{\tau_D}$ 与从 $f(z)$ 出发在 S_{τ_D} 上停止的复 BM 同分布.

11 10 月 31 日

1. 阅读并证明 **[RY]p182 Dambis, Dubins-Schwarz 定理的一般化 (Theorem 1.7).**

   There exist an enlargement $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\mathrm{P}})$ of $(\Omega, \mathcal{F}_{T_t}, \mathrm{P})$ and a BM $\tilde{\beta}$ on $\tilde{\Omega}$ independent of M such that the process

   $$B_t = \begin{cases} M_{T_t} & \text{if } \ t < \langle M \rangle_\infty, \\ M_\infty + \tilde{\beta}_{t-\langle M \rangle_\infty} & \text{if } \ t \geq \langle M \rangle_\infty \end{cases}$$

   is a standard BM. The process

   $$W_t = \begin{cases} M_{T_t} & \text{for } \ t < \langle M \rangle_\infty \\ M_\infty & \text{if } \ t \geq \langle M \rangle_\infty \end{cases}$$

   is a $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-BM stopped at $\langle M \rangle_\infty$.

2. 阅读并证明 **[RY]p183 Proposition**

   For a continuous local martingales M, the sets $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$ and $\{\lim_{t\to\infty} M_t \text{ exists}\}$ are almost-surely equal. Furthermore, $\limsup_{t\to\infty} M_t = +\infty$ and $\liminf_{t\to\infty} M_t = -\infty$ a.s. on the set $\{\langle M \rangle_\infty = \infty\}$.

3. **[RY]p186 Exercise 1.15**

   Let M be a continuous local martingale. Prove that on $\{\langle M \rangle_\infty = \infty\}$, one has

   $$\limsup_{t\to\infty} \frac{M_t}{\sqrt{2\langle M \rangle_t \log\log\langle M \rangle_t}} = 1 \quad a.s.$$

4. **[RY]p187 Exercise 1.20** If X is a cont. semimartingale and λ the Lebesgue measure on $\mathbb{R}_+$ prove that

   $$\lambda\Big(\Big\{t \geq 0 : \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{-\alpha}|X_{t+\varepsilon} - X_t| > 0\Big\}\Big) = 0 \ a.s.$$

   for every $\alpha < \frac{1}{2}$.

5. **[KS]p178 Problem 4.11**

   We cannot expect to be able to define the stochastic integral $\int_0^1 X_s \mathrm{d}W_s$ with respect to BM W for measurable adapted processes X which do not satisfy $\int_0^1 X_s^2 \mathrm{d}s < \infty$ a.s. Indeed, show that if

   $$\mathrm{P}\Big[\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s < \infty\Big] = 1, \text{ for } 0 \leq t < 1 \text{ and } E \triangleq \Big\{\int_0^1 X_s^2 \mathrm{d}s = \infty\Big\},$$

   then

   $$\limsup_{t\uparrow 1} \int_0^t X_s \mathrm{d}W_s = -\liminf_{t\uparrow 1} \int_0^t X_s \mathrm{d}W_s = +\infty, \text{ a.s. on } E.$$

6. **[KS]p179 Problem 4.12** Consider the semimartingale $X_t = x + M_t + C_t$ with $x \in \mathbb{R}$, $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$, C a continuous process of bounded variation, and assume that there exists a constant $\rho > 0$ such that $|C_t| + \langle M \rangle_t \leq \rho t, \forall t \geq 0$ is valid almost surely. Show that for fixed $T > 0$ and sufficiently large $n \geq 1$, we have

   $$\mathrm{P}\Big[\max_{0\leq t\leq T} |X_t| \geq n\Big] \leq \exp\Big\{\frac{-n^2}{18\rho T}\Big\}.$$

7. 阅读 [KS] p174-179 Continuous Local Martingales as Time-Changed Brownian Motions 章节及定理的详细证明.

8. 阅读 [KS]p179-180 F.B. Knight 定理及其讨论.

12　11 月 7 日

1. 阅读 **[KS] p180-190 内容, 特别关注 p189 Exercise 4.22**.
2. 阅读 **[GQ] p45-48 内容, 特别关注定理 1.9 关于** $[0,\infty)$ **区间的讨论**
3. 设 (B_t) 是标准布朗运动. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 为 $(B_t)_{t\geq 0}$ 的通常化扩张. 利用鞅表示定理证明并求去存在一个 $\mathcal{L}^*(B)$ 过程 $(H_t)_{t\geq 0}$ 使得
$$B_1^3 = \int_0^1 H_s \mathrm{d}B_s.$$
4. **[RY] p206 Exercise 3.16**

   Let t be fixed and ϕ be a bounded measurable function on $\mathbb{R}$. Find the explicit martingale representation for the random variable $F = \exp\left(\int_0^t \phi(B_s)\mathrm{d}s\right)$.
5. **[KS] p167 Exercise 3.31. 习题具体见 [KS], 这里不再抄录.**
6. 利用 Picard 迭代求解如下的线性随机微分方程:
$$\mathrm{d}X_t = \lambda X_t \mathrm{d}B_t, X_0 = \xi,$$
   其中, ξ 与布朗运动 $(B_t)_{t\geq 0}$ 独立.

   (可以参考 [GQ] p130 例 1)

13 11 月 9 日

1. 阅读 [KS] **p190-201，多关注 p192 Discussion 和 p193 Remark 的内容;** [GQ] **p39-45 内容**

2. 证明: [GQ] **p33 引理 1.19.** 即:

   $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 上鞅 X 是 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 鞅, 当且仅当 $\mathrm{E}X_t =$ 常数$,\forall t$.

3. [KS] **p201, Exercise 5.18**

   With $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq 1\}$ is a Brownian motion, we define $T = \inf\{0 \leq t \leq 1; t + W_t^2 = 1\}$, $X_t = -\frac{2}{(1-t)^2} W_t \mathbf{1}_{\{t\leq T, t<1\}}$; $0 \leq t < 1$,

   (i) Prove that $\mathrm{P}(T < 1) = 1$, and therefore $\int_0^1 X_t^2 \mathrm{d}t < \infty$ a.s.

   (ii) Apply Itô's rule to the process $\{\frac{W_t}{(1-t)^2}; 0 \leq t < 1\}$ to conclude that

   $$\int_0^1 X_t \mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\int_0^1 X_t^2 \mathrm{d}t = -1 - 2\int_0^T \Big[\frac{1}{(1-t)^4} - \frac{1}{(1-t)^3}\Big] W_t^2 \mathrm{d}t \leq -1.$$

   (iii) The exponential supermartingale $\{Z_t(X), \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq 1\}$ is not a martingale; however, for each $n \geq 1$ and $\sigma_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\{Z_{t\wedge\sigma_n}(X), \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq 1\}$ is a martingale.

4. [KS] **p201, Exercise 5.18**

   Suppose that $\{L_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0} \in \mathcal{M}^{c,loc}$ is such that $Z_t = \exp[L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t]$ is a martingale under P, and define the new probability measure $\tilde{\mathrm{P}}_T(A) = \mathrm{E}(\mathbf{1}_A Z_T); A \in \mathcal{F}_T$, then

   $$\tilde{M_t} = M_t - \langle L, M\rangle_t = M_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} \mathrm{d}\langle Z, M\rangle_s, 0 \leq t \leq T$$

   is a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ continuous local under $\tilde{\mathrm{P}}$.

5. [RY] **p334, Exercise 1.23**

   Let B be the standard BM. For any stopping time T such that $\mathrm{E}[\exp(\frac{1}{2}T)] < \infty$, prove that

   $$\mathrm{E}[\exp(B_T - \frac{1}{2}T)] = 1.$$

6. [RY] **p334, Exercise 1.24**

   (1) Let B be the standard BM and prove that

   $$T = \inf\{t : B_t^2 = 1 - t\}$$

   is a stopping time such that $\mathrm{P}(0 < T < 1) = 1$.

   (2) Set $H_s = -\frac{2B_s \mathbf{1}_{\{T\geq s\}}}{(1-s)^2}$ and prove that for every t,

   $$\int_0^t H_s^2 \mathrm{d}s < \infty,\ a.s.$$

   (3) If $M_t = \int_0^t H_s \mathrm{d}B_s$, compute $M_t - \frac{1}{2}\langle M, M\rangle_t + (1 - t\wedge T)^{-2} B_{T\wedge t}$.

   (4) Prove that $\mathrm{E}[\exp(M_1 - \frac{1}{2}\langle M\rangle_1)] < 1$ and hence that $\{\exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t), t \in [0,1]\}$ is not a martingale.

14　11 月 14 日

1. **[RY] p336, Exercise 1.36**

   Let P be the Wiener measure on $\Omega = C([0,1],\mathbb{R})$, $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(s), s \le t)$ and b be a bounded predictable process. We set

   $$Q = \exp\left\{\int_0^1 b(s,\omega)\mathrm{d}\omega(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 b^2(s,\omega)\mathrm{d}s\right\}\cdot \mathrm{P}$$

   and $\theta(\omega)_t = \omega(t) - \int_0^t b(s,\omega)\mathrm{d}s$.

   Prove that if $(M_t, t \le 1)$ is a $(\mathcal{F}_t, \mathrm{P})$-martingale then $(M_t \circ \theta, t \le 1)$ is a $(\mathcal{F}_t, Q)$-martingale. For instance, if h is a function of class $C^{2,1}$ such that $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$ then $h(\theta(\omega)_t, t)$ is a $(\mathcal{F}_t, Q)$-martingale.

2. 有兴趣的同学阅读可以阅读如下论文:

   Sheffield, S . Gaussian free fields for mathematicians. *Probab. Theory Related Fields* 139 (2007), no. 3-4, 521–541.

15 11 月 21 日

1. 课堂上所讲的 Onsager-Machlup (OM) 泛函的内容可以阅读

   Iketa, N., Watanabe S. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.* Second Edition, North-Holland Publishing Company, 1989

   Charpter VI, Section 9 的内容.

   进一步想了解 OM 泛函也可以阅读如下比较好读的文献:

   Dürr, Detlef; Bach, Alexander. *The Onsager-Machlup function as Lagrangian for the most probable path of a diffusion process.* Comm. Math. Phys. 60 (1978), no. 2, 153–170.

2. **阅读 [GQ] p196-202 关于大偏差原理的内容**

3. 设 $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 是一个处处 C^1 光滑, 除有限个点 $\{x_1,\dots,x_n\}$ 外, 处处 C^2 光滑, 且 $|g''(x)|\le M$ (g'' 在不连续出左右极限存在). 证明: 下面的 Itô 公式成立:

$$g(B_t)=g(B_0)+\int_0^t g'(B_s)\mathrm{d}B_s+\frac{1}{2}\int_0^t g''(B_s)\mathrm{d}s.$$

4. **阅读 [GQ] p104-116 关于局部时的内容**

5. **阅读 [KS] p201-226 关于局部时的内容, 注意 [KS] 定义的局部时与上课讲的差了一个 $\frac{1}{2}$ 的系数**

16 11 月 23 日

1. **阅读 [KS] p209 Problem 6.12**

   For a continuous function $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ with compact support, the following interchange of Lebesgue and Itô integrals is permissible

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(a)\Big(\int_0^t \mathbf{1}_{(a,\infty)}(W_s)\mathrm{d}W_s\Big)\mathrm{d}a = \int_0^t \Big(\int_{-\infty}^{\infty} h(a)\mathbf{1}_{(a,\infty)}(W_s)\mathrm{d}a\Big)\mathrm{d}W_s,\ a.s.\mathrm{P}^0.$$

5. **阅读 [KS] p225 Problem 7.7**

   Let X be a continuous semimartingale with decomposition

$$X_t = X_0 + M_t + V_t;\ 0 \le t < \infty,$$

   μ be a σ-finite measure on $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, and $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ be a continuous function with compact support. Then

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(a)\Big(\int_0^t \mathbf{1}_{(a,\infty)}(X_s)\mathrm{d}M_s\Big)\mu(\mathrm{d}a) = \int_0^t \Big(\int_{-\infty}^{\infty} h(a)\mathbf{1}_{(a,\infty)}(X_s)\mu(\mathrm{d}a)\Big)\mathrm{d}W_s.$$

6. Show that the semimartingale local time of a continuous process of bounded variation is identically zero.

17　11 月 28 日

1. **阅读 [KS] p281-290**

2. **阅读 [GQ] p119-130，请特别关注 p125 中的“第二步”以及 p129 定理 3.2 关于局部化的处理办法**

3. **阅读 [RY] p365-375**

4. **阅读 [KS] p291-300，重点阅读 p291 Proposition 2.13（ Yamada-Watanabe 唯一性定理）和 p293 Proposition 2.18 比较定理**

5. 求如下随机微分方程

   $$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2X_t}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-X_t}\mathrm{d}B_t,\ X_0 = a \in \mathbb{R},$$

   在爆炸时 ξ 之前的解.

   (可以参考 [GQ] p128 定义 3.4)

6. **[KS] p293 Exercise 2.17**

   The stochastic equation

   $$X_t = 3\int_0^t X_s^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}s + 3\int_0^t X_s^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}W_s$$

   has uncountable many strong solution of the form

   $$X_t^{(\theta)} = \begin{cases} 0; & 0 \le t < \beta_\theta, \\ W_t^3; & \beta \le t < \infty, \end{cases}$$

   where $0 \le \theta \le \infty$ and $\beta_\theta = \inf\{s \ge \theta; W_s = 0\}$.

18 12 月 5 日

1. [KS] p294 Exercise 2.19
2. [KS] p295 Exercise 2.20
3. [KS] p305 Exercise 3.12
4. [KS] p305 Problem 3.13.
5. [KS] p306 Problem 3.15
6. 阅读 [KS] p301-306
7. 阅读 [GQ] p132-145
8. 阅读 [GQ]p154 定理 3.6 及其证明, 并与 [KS] p305 Problem 3.13 比较.

19 12 月 7 日

1. **阅读 [KS] p314-322**
2. **阅读 [GQ] p145-148**
3. 考虑 SDE

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t b_i(s, X_s)\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)\mathrm{d}W_s^j, \quad i = 1, \cdots, d. \tag{3}$$

证明: 对于带流概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathrm{P})$ 及其上的循序可测过程 X, 若任意的 $f \in C_0^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$,

$$M^f = f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t \big[\frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + \mathcal{A}_s f(s, X_s)\big]\mathrm{d}s$$

为 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 鞅, 则 X 为 SDE(3) 的弱解 (可以在扩展的概率空间中考虑). 其中

$$\mathcal{A}_s g(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d a_{ik}(s, x)\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(s, x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x),\ (a_{ij})_{1\leq i,j\leq d} = \sigma\sigma^T.$$

若 $g \in C_0^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$, 求 $\langle M^f, M^g \rangle$.

20　12 月 12 日

1. **阅读 [GQ] p186-187**
2. **阅读 [GQ] p149-153**
3. **阅读 [KS] p323-328**
4. **阅读 [KS] p60-71**

21　12 月 19 日

1. **阅读 [GQ] p77-95 第 2.4 节，第 2.5 节，第 2.6 节，p272-283 第 7.1 节**

2. 设 $(N_t)_{t\geq 0}$ 是强度参数为 λ 的 Poisson 过程. $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, s \leq t)$. 已知 $(N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$ 是鞅, 求其平方 (二次) 变差过程. (平方变差概念的定义可以参见 [GQ] p31 的 3° 或 [KS] p32 第二段内容)

22　12 月 21 日

1. 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是一维 Brown 运动, 证明:$(|B_t|^\alpha)_{t\geq 0}, 0<\alpha<1$ 不是半鞅; $(\int_0^t (t-s)^\alpha \mathrm{d}B_s)_{t\geq 0}, 0<\alpha<\frac{1}{2}$ 不是半鞅.

2. 证明: 右连左极非随机函数 $f(t)$ 是半鞅的充要条件是 $f(t)$ 是有界变差的函数.

3. 设 $(N_t)_{t\geq 0}$ 是强度参数为 λ 的 Poisson 过程. $\mathcal{F}_t=\sigma(N_s, s\leq t)$. 已知 $(\tilde{N}(t)=N_t-\lambda t)_{t\geq 0}$ 是鞅, 求 $\int_0^t N(s-)\mathrm{d}\tilde{N}(s)$.

23 12 月 26 日

1. 设 X 是半鞅, 证明下面的方程

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t Y(s-)\mathrm{d}X(s),$$

有如下唯一解

$$\begin{aligned} Y(t) = \mathcal{E}(X)(t) &:= \mathrm{e}^{X(t)-X(0)-\frac{1}{2}\langle X^c\rangle(t)} \prod_{s\le t}(1+\Delta X(s))\mathrm{e}^{-\Delta X(s)} \\ &= \mathrm{e}^{X(t)-X(0)-\frac{1}{2}[X](t)} \prod_{s\le t}(1+\Delta X(s))\mathrm{e}^{(-\Delta X(s))+\frac{1}{2}(\Delta X(s))^2}. \end{aligned}$$

$\mathcal{E}(X)$ 称为 X 的随机指数.

2. 设 X 是有限变差半鞅, 写出关于 X 的 Itô 公式.

3. 设 X 是有限变差半鞅, 且 $\Delta X(t) = 1$ 或 0, 求 $\mathcal{E}(X)$.

4. 阅读 [GQ] p283-302 第 7.2-7.6 节; 也可以继续阅读 p302-332 第 7.7-7.9 节. 其中 Brown 运动游弋律是很有趣, 也很深刻的内容, 值得学学.

5. 设 T 是取值于 $(0,\infty)$ 的随机变量, $\forall t \ge 0$, $\mathrm{P}(T>0)>0$. 记 $F(t)$ 为其分布函数. 设

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1 & t \ge T(\omega) \\ 0 & t < T \end{cases}.$$

$X_0 = 0$, $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ 是 $(X_t)_{t\ge 0}$ 生成的事件域流经过通常化扩张得到的事件域流. $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ 是下鞅. 证明: 其 Doob-Meyer 分解的可料增过程, 即其补偿子 (compensator) 是

$$A_t = \int_{(0,t\wedge T]} \frac{\mathrm{d}F(s)}{1-F(s-)}.$$

6. 设 T 是取值于 $(0,\infty)$ 的随机变量, $\forall t \ge 0$, $\mathrm{P}(T>0)>0$. 记 $F(t)$ 为其分布函数. 设随机变量 $\xi(\omega)$ 满足 $\mathrm{P}(\xi(\omega)=0)=0$. 设

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} \xi(\omega) & t \ge T(\omega) \\ 0 & t < T \end{cases}.$$

$Y_0 = 0$, $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ 是 $(Y_t)_{t\ge 0}$ 生成的事件域流经过通常化扩张得到的事件域流. 设

$$\mu(\omega, t, B) = \mathbf{1}_{\{t\ge T\}}\mathbf{1}_{\{\xi\in B\}},$$

其中 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. 设 $\lambda(B,t)$ 是 ξ 关于 T 的正则条件分布, $A_t = \int_{(0,t\wedge T]} \frac{\mathrm{d}F(s)}{1-F(s-)}$. 设

$$\mu_p(\omega, t, B) = \int_{(0,t]} \lambda(B,s)\mathrm{d}A_s.$$

证明: $(\mu_p(\omega,t,B))_{t\ge 0}$ 是可料过程, 而且 $(\mu(\omega,t,B) - \mu_p(\omega,t,B), \mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ 为鞅. 进一步证明 $(Y_t)_{t\ge 0}$ 有如下随机测度的典则分解 (canonical decomposition):

$$Y_t(\omega) = \int_{(0,t]}\int_{\mathbb{R}\setminus 0} x\big[\mu(\omega,t,\mathrm{d}x) - \mu_p(\omega,t,\mathrm{d}x)\big] + \int_{(0,t]}\int_{\mathbb{R}\setminus 0} x\mu_p(\omega,t,\mathrm{d}x).$$