$$T_n=h\left[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\cdots+f(a+(n-1)h)+\frac{1}{2}f(b)\right]\qquad h=\frac{b-a}{n}$$

将有误差估计式

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-T_n\right|\leqslant\frac{c}{n^{2k+1}}\tag{2.8.4}$$

式中

$$c=2M\,\frac{(b-a)^{2k+2}}{(2\pi)^{2k+1}}\sum_{j=1}^{\infty}j^{-(2k+1)}\tag{2.8.5}$$

因此当周期函数足够光滑时，即具有足够高阶的导数时，将有非常高阶的误差估式。

§2.9 奇异积分，不连续的被积函数

前面介绍的几种数值积分法，其误差估计都是在被积函数及其若干阶导数为连续的假定下作出的。因此，如果被积函数不满足这些条件，那末在使用这些积分公式时，其误差将有可能比估计式所指出的要大得多；在某些情况下，甚至根本不能作为积分近似。因此一般需作适当的处理，方能获得满意的结果。

2.9.1 存在有限个间断点的有界的被积函数

如果有界的被积函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上存在若干个间断点，譬如说存在一个间断点，位于 $x=c(a<c<b)$ 上，那末我们可以用间断点分割积分区间，写出积分

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx\tag{2.9.1}$$

如果 $f(x)$ 在区间 $[a, c]$，$[c, b]$ 上存在足够高阶的连续导数，则右端的两个积分可以用任何一种积分法来近似到所要的精度。

如果被积函数是连续的，但其某个低阶导数有一不连续点，则亦可用类似的办法处理。

2.9.2 无界的被积函数

设积分 $\int_a^b f(x)\,dx$，当 $x\to a$ 时 $f(x)\to\infty$。如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ 存在，则称此积分存在，且定义为

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx\tag{2.9.2}$$

对于 $f(x)$ 在积分上限处为无界的情形，其定义和处理方法都是类似的。因此我们仅就一种情形进行讨论。

这类奇异积分，有时可以采用变量的变换，或者采用分部积分法，将它化为正常积分。例如：

例 1　积分

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{n}}f(x)\,dx,\quad n\geqslant 2$$

其中 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，则可施以 $t^n=x$ 的变量变换，将积分化为正常积分

$$n\int_0^1 f(t^n)\,t^{n-2}\,dt$$

例2　积分

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

则可以通过分部积分后，得

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}\cos x \Big|_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{x}\sin x dx$$

这样就化为对函数$\sqrt{x}\sin x$的积分。它在[0, 1]上已无奇异点(但有一无界的导数的点)。

如果不能通过类似的数学演化工作来消除它的奇异性，那末便需在积分计算中进行适当的处理，或者采用特殊的积分方法。下面提供几种这样的方法。

一、区间的截去

适当地选取小数δ，使得在小区间$[a, a+\delta]$上的积分值处在允许的误差范围之内，即有

$$\left|\int_a^{a+\delta} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

那末就可计算正常积分

$$\int_{a+\delta}^b f(x)dx$$

来近似在全区间上的积分。

例如，计算积分

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}} dx$$

其中$g(x)$在[0, 1]上连续，且满足$|g(x)|\leqslant 1$。

因为在[0, 1]上，$x^{\frac{1}{2}}\leqslant x^{\frac{1}{3}}$，则有

$$\left|\frac{g(x)}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}\right| \leqslant \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

因此

$$\left|\int_0^\delta \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}} dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\delta \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \delta^{\frac{1}{2}}$$

由此得到，对于10^{-3}的精度要求，可取$\delta\leqslant 10^{-6}$，由计算在$[\delta, 1]$上的正常积分来得到所要的积分值。

二、分项法

为易于说明起见，假定积分具有如下的形式：

$$\int_a^b (x-a)^\alpha f(x)dx \quad (-1<\alpha\leqslant 0)$$

在$x=a$处，被积函数存在一奇异点，但$f(x)$是一充分光滑的函数，假定它存在$n+1$阶的连续导数，则可以写为

$$f(x) = g(x) + [f(x) - g(x)]$$

式中

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

而积分

$$\int_a^b (x-a)^\alpha f(x)\,dx=\int_a^b (x-a)^\alpha g(x)\,dx+\int_a^b (x-a)^\alpha[f(x)-g(x)]\,dx$$

右端的第一个积分,其被积函数

$$(x-a)^\alpha g(x)=f(a)(x-a)^\alpha+f'(a)(x-a)^{1+\alpha}+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n+\alpha}$$

可以逐项求出其积分值;右端的第二个积分,其被积函数在$[a, b]$上已无奇异性,并且相当光滑,因此可以利用任何一种求积公式来得到它的近似值。

例如 计算

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

因为

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

我们可取其若干项,譬如取二项,可得积分

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx=2-\frac{1}{5}+\int_0^1 \frac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}\,dx$$

右端积分的被积函数在[0, 1]上存在连续的三阶导数。如要使函数更光滑些,可以在$\cos x$的展式中再多取几项。

三、插值型积分公式

将奇异的被积函数$F(x)$分解成两个函数的乘积

$$F(x)=W(x)f(x)$$

使奇异性全部集中在函数$W(x)$中,而$f(x)$是一足够光滑的函数。

在$[a, b]$内适当选择一串坐标点

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n$$

构造积分公式

$$\int_a^b W(x)f(x)\,dx=\sum_{i=0}^n W_i f(x_i)$$

使得对任何n次多项式是准确的,亦即有

$$\int_a^b W(x)x^k=\sum_{i=0}^n W_i x_i^k \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

假设这$n+1$个方程左端的积分均存在,并且可以具体算出它们的量值,那末就可以从此线性方程组定出$n+1$个W_i值,而得到计算积分的近似公式。

例如 计算积分

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

其中$f(x)$在[0, 1]上连续。我们取3个坐标点:$x_0=\frac{1}{3}$, $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=1$,得线性方程组

$$W_1+W_2+W_3=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx=2$$

$$\frac{W_1}{3}+\frac{2W_2}{3}+W_3=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}x\,dx=\frac{2}{3}$$

$$\frac{W_1}{9}+\frac{4W_2}{9}+W_3=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}x^2dx=\frac{2}{5}$$

由此导出积分公式

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}f(x)dx\approx\frac{14}{5}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{8}{5}f\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{5}f(1)$$

四、高斯型积分公式

对于奇异积分常可应用高斯型求积公式来解决，只要奇异的被积函数 $F(x)$ 能分解成

$$F(x)=W(x)f(x)$$

其中 $W(x)$ 是一固定的非负的权函数，它在积分区间 $[a, b]$ 上存在一个或几个奇异点，并且积分 $\int_a^b W(x)x^kdx(k=0, 1, \cdots, n)$ 存在。而 $f(x)$ 是一足够光滑的函数。那末，可以按照§2.3介绍的方法来确定积分公式的结点和系数。下面列举 $W(x)$ 的几种情形：

(i) $W(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$，相应得高斯-切比雪夫积分公式。详见§2.3。

(ii) $W(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$，相应得积分公式

$$\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}f(x)dx=\sum_{k=1}^n W_kf(x_k)$$

此处

$$x_k=\cos\frac{k}{n+1}\pi,\quad W_k=\frac{\pi}{n+1}\sin^2\frac{k}{n+1}\pi$$

截断误差为

$$E_n=\frac{\pi}{(2n)!2^{2n+1}}f^{(2n)}(\xi)\quad -1<\xi<1$$

(iii) $W(x)=x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$，相应得积分公式

$$\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}f(x)dx=\sum_{k=1}^n W_kf(x_k)$$

此处

$$x_k=\cos^2\frac{2k-1}{2n+1}\frac{\pi}{2},\quad W_k=\frac{2\pi}{2n+1}x_k$$

截断误差为

$$E_n=\frac{\pi}{(2n)!2^{4n+1}}f^{(2n)}(\xi)\quad 0<\xi<1$$

(iv) $W(x)=(1-x)^{\frac{1}{2}}$，相应得积分公式

$$\int_0^1\sqrt{1-x}f(x)dx=\sum_{k=1}^n W_kf(x_k)$$

此处

$x_k=1-z_k^2$（z_k 是 $2n+1$ 次勒让德多项式 $L_{2n+1}(x)$ 的第 k 个正零点）。

$$W_k=2z_k^2W_k^{(2n+1)}$$

式中

$W_k^{(2n+1)}=\dfrac{2}{(1-z_k^2)[L'_{2n+1}(z_k)]^2}$ 是 $2n+1$ 点高斯-勒让德公式中相应于结点 z_k 的系数。

截断误差为

$$E_n=\frac{2^{4n+3}[(2n+1)!]^4}{(2n)!(4n+3)[(4n+2)!]^2}f^{(2n)}(\xi)\quad 0<\xi<1$$

(v) $W(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, 相应得积分公式

$$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{1-x}}dx=\sum_{k=1}^{n}W_kf(x_k)$$

此处

$$x_k=1-z_k^2\quad(z_k\text{ 是 }2n\text{ 次勒让德多项式 }L_{2n}(x)\text{ 的第 }k\text{ 个正零点})$$

$$W_k=2W_k^{(2n)}$$

式中

$$W_k^{(2n)}=\frac{2}{(1-z_k^2)[L_{2n}'(z_k)]^2}$$ 是 $2n$ 点高斯-勒让德公式中相应于结点 z_k 的系数。

截断误差为

$$E_n=\frac{2^{4n+1}}{4n+1}\frac{[(2n)!]^3}{[(4n)!]^2}f^{(2n)}(\xi)\quad 0<\xi<1$$

五、柯西主值的数值计算

考虑积分$\int_a^b f(x)dx$, 假定$f(x)$在$x=c\,(a<c<b)$的邻域内无界。此时的积分定义有两种:

(i) 如果积分

$\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ 存在, 即如果极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx$, $\lim\limits_{\delta\to0}\int_{c+\delta}^b f(x)dx$ 存在, 则定义

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

(ii) 如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right]$$

存在, 则此极限称为定积分的柯西主值, 且记为 $P\int_a^b f(x)dx$。

当两种极限都存在时, 这两种定义是一致的。但在 i) 之极限不存在时, ii) 之极限亦有可能存在。

关于柯西主值的计算, 可以利用下面的分解办法, 将它化为一个正常积分或者化为在积分下限处的奇异积分。

不妨假定 $c=0$, 且假定计算积分

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx$$

则可作函数

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],\qquad h(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

显见 $g(x)$是一奇函数, 即 $g(-x)=-g(x)$; $h(x)$是一偶函数, 即 $h(-x)=h(x)$, 而

$$f(x)=g(x)+h(x)$$

因此

$$\int_{-a}^{-\varepsilon}f(x)dx+\int_{\varepsilon}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{-\varepsilon}g(x)dx+\int_{\varepsilon}^{a}g(x)dx+\int_{-a}^{-\varepsilon}h(x)dx+\int_{\varepsilon}^{a}h(x)dx=2\int_{\varepsilon}^{a}h(x)dx$$

于是得柯西主值

$$P\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{a}h(x)\,dx=2\int_{0}^{a}h(x)\,dx=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\,dx$$

$h(x)$ 在某些情况下可能已无奇异性，这时就化为一正常积分的计算；在一般情况下，$h(x)$ 在 $x=0$ 处存在一奇异点，这就化为在积分下限处的奇异积分。

§2.10 在无穷区间上的积分

在实际工作中，我们也经常遇见在无穷区间上的积分，即需计算积分

$$\int_{a}^{\infty}f(x)\,dx \text{ 或 } \int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx \text{ 或 } \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$$

这样的积分是由正常积分的极限来定义的。

对单无穷区间上的积分，如果下式右端的极限存在，则定义为

$$\int_{a}^{\infty}f(x)\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{a}^{R}f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{b}f(x)\,dx$$

对于 $[-\infty,\ \infty]$ 上的积分，有两种定义：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{\infty}f(x)\,dx$

(2) 积分的柯西主值 $P\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\,dx$

当两种极限都存在时，这两种定义是一致的。但在(1)之极限不存在时，(2)之极限有可能存在。

下面就积分

$$\int_{a}^{\infty}f(x)\,dx$$

提供几种处理方法。对于 $[-\infty,\ b]$ 上的积分，其处理是类似的。

一、变量的改变

在某些情况下，可以通过变量变换，将无穷区间上的积分变成一有限区间上的积分。

例如　令 $t=e^{-x}$，将区间 $0\leqslant x\leqslant\infty$ 变到区间 $0\leqslant x\leqslant 1$，而积分变成

$$\int_{0}^{\infty}f(x)\,dx=\int_{0}^{1}\frac{f(-\ln t)}{t}\,dt$$

或

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x}f(x)\,dx=\int_{0}^{1}f\left(\ln\frac{1}{t}\right)dt$$

二、无穷区间的截去

适当地选择一数 $R>a$，使得积分 $\int_{R}^{\infty}f(x)\,dx$ 的量值处在允许的误差范围之内，即有

$$\left|\int_{R}^{\infty}f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

则可以计算有限区间上的积分

$$\int_{a}^{R}f(x)\,dx\approx\int_{a}^{\infty}f(x)\,dx$$

来近似无穷区间上的积分。

例如　计算

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

因为对 $x\geqslant k$ 有 $x^2\geqslant kx$，故有估式

$$\int_k^{\infty} e^{-x^2}dx\leqslant\int_k^{\infty} e^{-kx}dx=\frac{e^{-k^2}}{k}$$

对于 $k=4$，有 $e^{-k^2}/k\approx10^{-8}$，因此对于 10^{-7} 的精度要求，计算积分 $\int_0^4 e^{-x^2}dx$ 即可满足。

三、高斯型积分公式

高斯型积分公式常可有效地用于计算无穷区间上的积分。可以建立积分公式

$$\int_0^{\infty} W(x)f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}W_kf(x_k)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}W_kf(x_k)$$

使对任何 $2n-1$ 次多项式是正确的。建立公式的方法可见 §2.4。在实际中经常使用的有以下几个公式：

(i) 拉盖尔(Laguerre)公式

相应于权函数 $W(x)=e^{-x}$，其公式为

$$\int_0^{\infty} e^{-x}f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}W_kf(x_k)$$

此处坐标 $x_k(k=1,\cdots,n)$ 是拉盖尔多项式

$$L_n(x)=(-1)^ne^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})=x^n+\cdots$$

的 n 个零点，而系数

$$W_k=\frac{(n!)^2x_k}{[L_{n+1}(x_k)]^2}$$

公式的截断误差是

$$E_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(\xi)\quad 0<\xi<\infty$$

计算拉盖尔多项式，可以采用递推公式

$$L_{n+2}(x)=[x-(2n+3)]L_{n+1}(x)-(n+1)^2L_n(x)$$

$$L_0(x)=1$$

$$L_1(x)=x-1$$

(ii) 广义拉盖尔公式

相应于权函数 $W(x)=x^{\alpha}e^{-x}(\alpha>-1)$，其公式为

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}W_kf(x_k)$$

此处坐标 $x_k(k=1,\cdots,n)$ 是广义拉盖尔多项式

$$L_n^{(\alpha)}(x)=(-1)^nx^{-\alpha}e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x})=x^n+\cdots$$

的 n 个零点，系数

$$W_k=\frac{n!\Gamma(n+\alpha+1)x_k}{[L_{n+1}^{(\alpha)}(x_k)]^2}$$

公式的截断误差是

$$E_n=\frac{n!\Gamma(n+\alpha+1)}{(2n)!}f^{(2n)}(\xi)\quad 0<\xi<\infty$$

计算广义拉盖尔多项式，可以采用递推公式

$$L_{n+2}^{(\alpha)}(x)=[x-\alpha-(2n+3)]L_{n+1}^{(\alpha)}(x)-(n+1)(n+\alpha+1)L_n^{(\alpha)}(x)$$
$$L_0^{(\alpha)}(x)=1$$
$$L_1^{(\alpha)}(x)=x-(\alpha+1)$$

(iii) 埃尔米特(Hermite)公式

相应于权函数 $W(x)=e^{-x^2}$，其公式为

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}W_kf(x_k)$$

此处坐标 $x_k(k=1,\cdots,n)$ 是埃尔米特多项式

$$H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})=2^nx^n+\cdots$$

的 n 个零点，系数

$$W_k=\frac{2^{n+1}n!\sqrt{\pi}}{[H_{n+1}(x_k)]^2}$$

公式的截断误差是

$$E_n=\frac{n!\sqrt{\pi}}{2^n(2n)!}f^{(2n)}(\xi)\quad -\infty<\xi<\infty$$

计算埃尔米特多项式可以采用递推公式

$$H_{n+2}(x)=2xH_{n+1}(x)-2(n+1)H_n(x)$$
$$H_0(x)=1$$
$$H_1(x)=2x$$

关于这些积分公式的收敛性，已有定理证明了：

(a) 如果函数 $f(x)$ 当 x 充分大时满足不等式

$$|f(x)|\leqslant\frac{e^x}{x^{\alpha+1+\rho}}\quad 对某个\ \rho>0(\alpha>-1)$$

则广义拉盖尔积分公式收敛到积分

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}W_kf(x_k)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\alpha}f(x)dx$$

(拉盖尔积分公式是其 $\alpha=0$ 的特殊情形)。

(b) 如果函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 充分大时，满足不等式

$$|f(x)|\leqslant\frac{e^{x^2}}{|x|^{1+\rho}}\quad 对某个\ \rho>0$$

则埃尔米特积分公式收敛到积分

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}W_kf(x_k)=\int_0^{\infty}e^{-x^2}f(x)dx$$

四、柯西主值的计算

与求奇异积分柯西主值同样的分解方法，可得

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} [f(x)+f(-x)]\,dx$$

§2.11 计算重积分的累次积分法

考虑二重积分

$$\iint_D f(x,\ y)\,dxdy \tag{2.11.1}$$

此处积分域 D 是平面上的一个有界域。常见的有如下二种区域:

(1) $a\leqslant x\leqslant b\quad c\leqslant y\leqslant d$

(2) $a\leqslant x\leqslant b\quad c(x)\leqslant y\leqslant d(x)$

此处 $c(x)$ 和 $d(x)$ 是 $[a,\ b]$ 上的连续函数，且有 $c(x)\leqslant d(x)$。

对于任何简单的平面有界域，总可以通过区域的适当分解，化为若干个这样区域的和。因此我们只讨论二重积分

$$I=\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c(x)\leqslant y\leqslant d(x)}} f(x,\ y)\,dxdy \tag{2.11.2}$$

此处 $c(x)$，$d(x)$ 是 $[a,\ b]$ 上的连续函数，亦可为常数，且 $f(x,\ y)$ 在积分域上假定是连续的。

我们记

$$g(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\ y)\,dy \tag{2.11.3}$$

对于任何固定的 x 值，这是个单重定积分，因此函数 $g(x)$ 是有定义的，且根据 $c(x)$、$d(x)$ 及 $f(x,\ y)$ 的连续性，它也是连续的。于是积分

$$I=\int_a^b g(x)\,dx \tag{2.11.4}$$

存在。因此我们可以将二重积分(2.11.2)化为累次积分

$$I=\int_a^b\left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,\ y)\,dy\right]dx \tag{2.11.5}$$

将一个多重积分化为累次积分后，任何前面介绍的求单重积分的数值积分法都可以用来求一多重积分。因为对于积分式(2.11.4)，可以应用某个数值积分法来计算它的量值，即可写成

$$I\approx\sum_{i=1}^{n} W_i g(x_i) \tag{2.11.6}$$

用关系式(2.11.3)代入后，有

$$I\approx\sum_{i=1}^{n} W_i\int_{c(x_i)}^{d(x_i)} f(x_i,\ y)\,dy \tag{2.11.7}$$

对于式中的 n 个定积分

$$g(x_i)=\int_{c(x_i)}^{d(x_i)} f(x_i,\ y)\,dy \tag{2.11.8}$$

我们亦可以应用某个数值积分法算出它的量值

$$g(x_i)=\sum_{j=1}^{m_i} V_{ij} f(x_i,\ y_j) \tag{2.11.9}$$

以此代入(2.11.7)式，于是得积分近似式

$$I\approx\sum_{i=1}^{n}W_i\sum_{j=1}^{m_i}V_{ij}f(x_i, y_j) \tag{2.11.10}$$

对于三重积分的累次积分法亦是类似的。但累次积分法仅适用于低重积分。对于高重积分，由于工作量太大，一般不宜使用。

§2.12 计算高重积分的数论网格法

假设要计算 S 重积分

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, x_2, \cdots, x_S)dx_1, \cdots, dx_S \tag{2.12.1}$$

此处积分域是 S 维单位超立方体。对于一般的积分域，可以通过域的分解和变量变换，化为在此标准域上的积分。对此有一系列的数论网格方法。本节仅介绍其中之一，即柯洛波夫(Коробов)方法[5]。

在介绍方法之前，先定义两个函数类:

(1) 设 $f(x_1, \cdots, x_S)$ 在 S 维超立方体

$$0\leqslant x_i\leqslant 1 \quad (i=1, 2, \cdots, S) \tag{2.12.2}$$

上是连续的。且设 $f(x_1, \cdots, x_S)$ 对每个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_S$ 都是以 1 为周期的周期函数。且令 $c(m_1, \cdots, m_S)$ 表示 f 的傅里叶系数，即

$$f(x_1, \cdots, x_S)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_S=-\infty}^{\infty}c(m_1, \cdots, m_S)\exp[2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_Sx_S)] \tag{2.12.3}$$

$$c(m_1, \cdots, m_S)=\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, \cdots, x_S)\exp[-2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_Sx_S)]dx_1\cdots dx_S \tag{2.12.4}$$

如果满足

$$|c(m_1, \cdots, m_S)|\leqslant\frac{c}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\cdots\overline{m}_S)^{\alpha}} \tag{2.12.5}$$

此处 $\overline{m}_i=\max(1, |m_i|)(i=1, \cdots, S)$，而 α 是大于 1 的实数，c 是与 $m_1, \cdots, m_S$ 无关的常数，则称 f 属于 $E_S^{\alpha}(c)$ 类的，记为 $f\in E_S^{\alpha}(c)$。

特别在 α 为整数时，具有连续导数 $\dfrac{\partial^{\alpha S}f}{\partial x_1^{\alpha}\cdots\partial x_S^{\alpha}}$ 的周期函数是属于 $E_S^{\alpha}(c)$ 类的。

(2) 如果 $f(x_1, \cdots, x_S)$ 在单位超立方体(2.12.2)上导数

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_S^{n_S}} \quad (0\leqslant n\leqslant \alpha S, 0\leqslant n_i\leqslant\alpha) \quad \alpha\text{ 是}\geqslant 1\text{ 的整数} \tag{2.12.6}$$

存在且连续，并且有界 c_1，则称 f 属于 $H_S^{\alpha}(c_1)$ 类，记为 $f\in H_S^{\alpha}(c_1)$。

对于积分(2.12.1)，考虑到积分公式

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, \cdots, x_S)dx_1\cdots dx_S=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f[\xi_1(k), \cdots, \xi_S(k)]-E \tag{2.12.7}$$

此处点集合 $M=\{\xi_1(k), \cdots, \xi_S(k)\}$ 称为网格; E 是积分公式的截断误差。

如果把 S 维单位超立方体分成 $N=n^S$ 个相等的小超立方体，这就得到均匀网格。但对于 $E_S^{\alpha}(c)$ 类中的函数，其误差估计为

$$E=O\left(\frac{1}{N^{\alpha/S}}\right) \tag{2.12.8}$$

由此看出，对于均匀网格，随着积分重数 S 的增加，其准确度迅速地下降。因此为了提高精